Probabilidad y estadística

ERIKA PEÑA ALVARADO

Red Tercer Milenio

Probabilidad y estadística

ERIKA PEÑA ALVARADO

Red Tercer Milenio

AVISO LEGAL

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Datos para catalogación bibliográfica

Érika Peña Alvarado

Probabilidad y estadística

ISBN 978-607-733-076-9

Primera edición: 2012

Revisión pedagógica: Germán A. Seelbach González

Revisión editorial: Mónica Gabriela Ortega Reyna

DIRECTORIO

ÍNDICE

OBJETIVO DE APRENDIZAJE GENERAL

Adquirir las herramientas que generan habilidades y capacidades con la finalidad de resolver problemáticas que requieren el conocimiento de la probabilidad y la estadística, para llevar a cabo la toma de decisiones en los diferentes ámbitos laborales y de investigación en los que se desenvolverán los estudiantes como futuros profesionistas activos, en el momento de aplicar la descripción y el análisis de datos, así como la realización de inferencias con apoyo en la predicción por aleatoriedad.

INTRODUCCIÓN

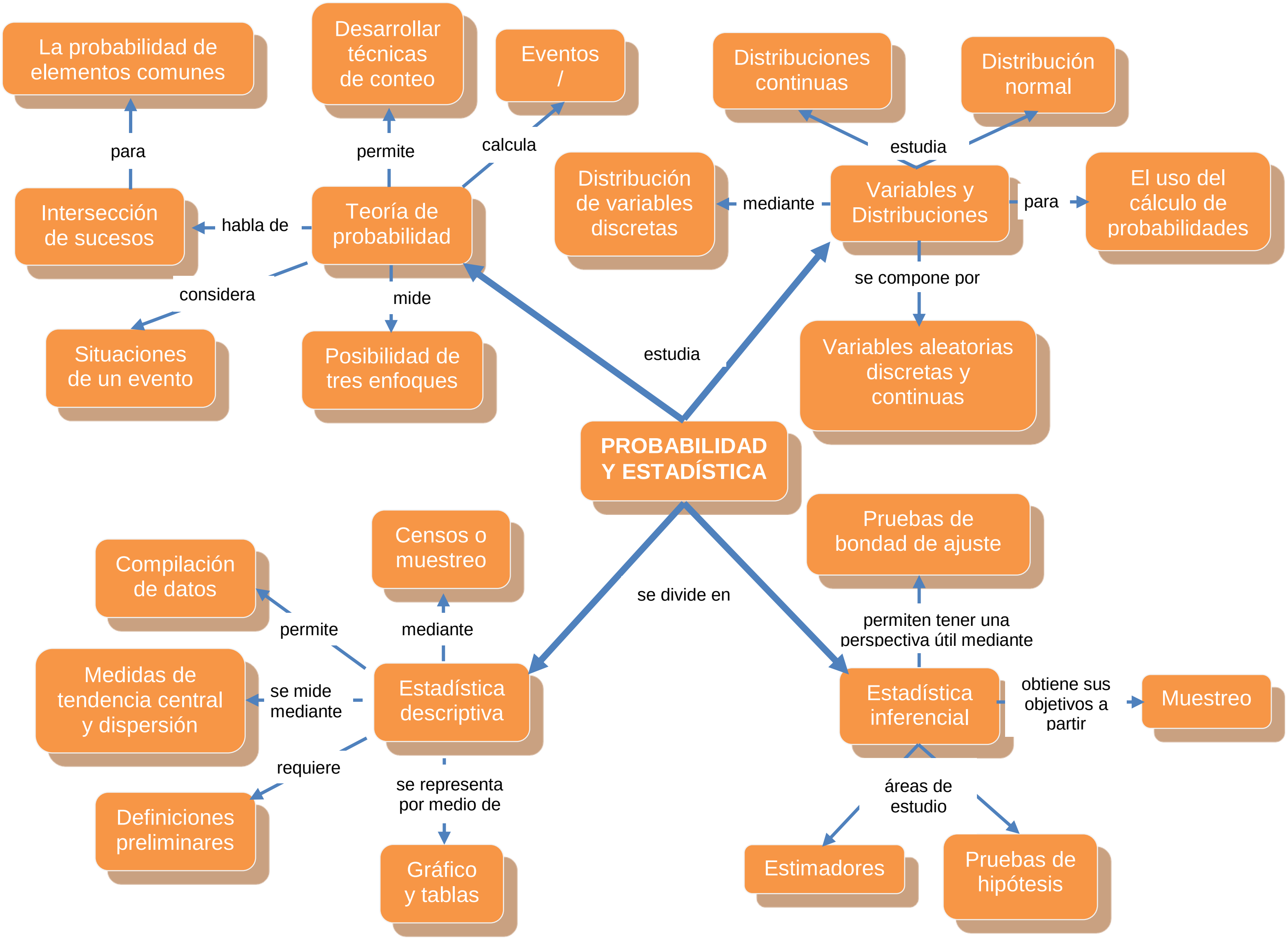
En la vida cotidiana el hombre se enfrenta a situaciones que no siempre tienen un dominio de certidumbre; en ocasiones las personas realizamos la pregunta qué tan probable es que suceda algún evento, ya que no existe la certeza de que puedan ocurrir ciertos fenómenos. De ahí el interés de conocer las probabilidades y es precisamente la probabilidad la que nos permite medir la incertidumbre.

Por su parte, la estadística es una herramienta principal para el conocimiento de los datos, desde la forma como se recolectan, presentan y, lo más importante, se interpretan para realizar inferencias estadísticas para la toma de decisiones.

La probabilidad y la estadística son herramientas importantes por aprender por los estudiantes de diferentes carreras, es por ello que han ganado importantes lugares en diferentes ámbitos de investigación, administrativos o productivos, en mercados de riesgo e inclusive hasta en áreas de ciencias de la salud, porque son instrumento elemental para la toma de decisiones.

El presente libro habilitará las capacidades de los estudiantes de las diversas carreras, por medio de ejercicios prácticos reales que les permitirán cristalizar la parte teórica al desarrollarlos en la realidad, de acuerdo con el entorno en el que se desenvuelve cada estudiante; además de que se les mostrará la importancia que tiene el cálculo de las probabilidades y el conocimiento de la estadística descriptiva como inferencial.

MAPA CONCEPTUAL



UNIDAD 1

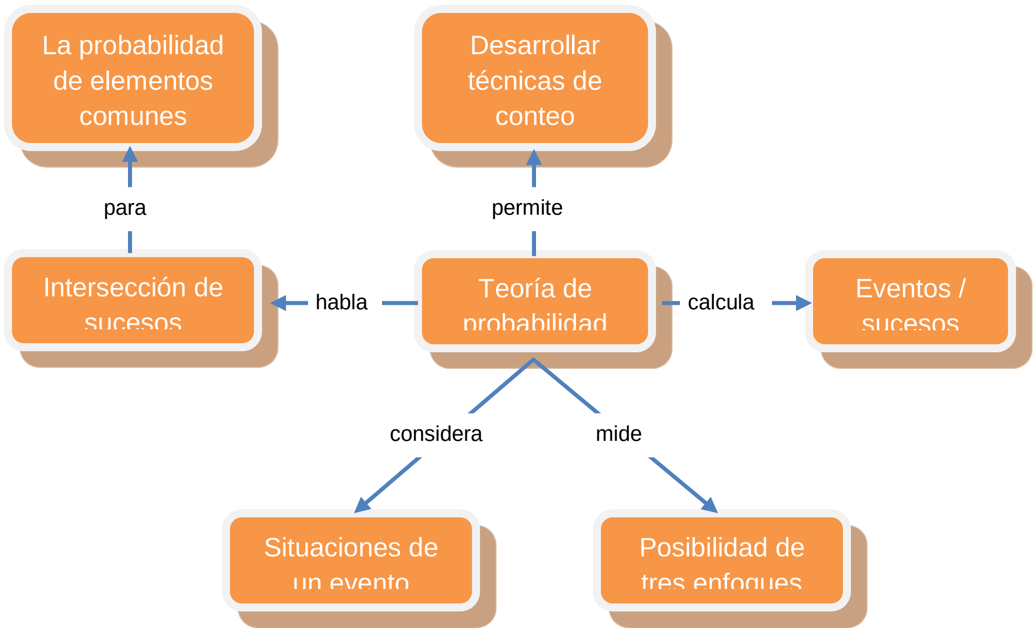
TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

OBJETIVO

El estudiante conocerá el concepto de probabilidad para su aplicación de acuerdo con los tres enfoques de probabilidad existentes. Asimismo, aplicará el teorema de Bayes y diferenciará las permutaciones de las combinaciones por medio del desarrollo de ejercicios prácticos.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

El término de probabilidad se emplea de manera cotidiana, sin necesidad de ser matemáticos; por ejemplo, al intentar pronosticar el estado de tiempo, se está empleando la probabilidad ya que se trata con el azar y la incertidumbre.

Existen 3 enfoques diferentes de probabilidad, los cuales serán desarrollados en la presente unidad. Asimismo, existen eventos dependientes que llevan a calcular probabilidades condicionales o el inverso del patrón usual de probabilidad condicional (teorema de Bayes), que se estudiará junto con el desarrollo de las técnicas de conteo, como permutaciones y combinaciones.

1.1 PROBABILIDAD

El término de probabilidad es utilizado de manera continua en la vida cotidiana, por ejemplo, al salir de casa surge la interrogante de qué tan probable es que llueva o al ver un partido de fútbol por televisión, de qué tan probable es que nuestro equipo favorito gane o pierda.

La probabilidad forma base del estudio de la estadística y permite medir la incertidumbre y la certidumbre. Algunos autores, como Ernest F. Haeussler Jr. y Richard S. Paul, consideran que la probabilidad es "la base de estudio de la estadística",[1] y también hacen mención de que en el estudio de la probabilidad, se trabaja con una población conocida y se sabe con certeza o probabilidad la posibilidad de obtener una muestra particular de ella.[2]

De acuerdo con lo anterior se puede decir que la probabilidad está basada en una serie de reglas en las que debe determinarse si un fenómeno puede llegar a ocurrir, bajo el fundamento de las diferentes teorías, los estadísticos y, por supuesto, los cálculos.

Existen tres enfoques para definir la probabilidad: probabilidad clásica, probabilidad frecuencial relativa y probabilidad subjetiva.

La probabilidad clásica se conoce también como probabilidad *a priori*, ya que significa "antes de". Consiste en decir que en un espacio muestral existen resultados mutuamente excluyentes, es decir, que no pueden ocurrir dos o más eventos a la vez; y resultados equiprobables, es decir, que todos los eventos tienen la misma probabilidad de ocurrencia, y que si un evento A en particular puede ocurrir de m maneras, entonces la probabilidad de A es igual a la razón del número de casos favorables m entre el número total de casos n.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

---

[1] Ernest Haeussler Jr. y Richard S. Paul, *Matemáticas para la administración, economía, ciencias sociales y de la vida*, 8a. ed., Prentice-Hall, 1997, p. 401.
[2] *Idem.*

Ejemplo: Si en una urna se tienen 15 canicas rojas y 9 canicas blancas. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una canica de color blanca?

Datos: m = 9, n = 24.

Desarrollo:

$$P(B) = \frac{9}{24}$$

$$P(B) = 0.375$$

Respuesta: la probabilidad de extraer una bolita blanca es de 37.5%.

La probabilidad frecuencial relativa se conoce también con el nombre de *posteriori*, ya que significa "después de". Consiste en decir que si un experimento ∈ se repite n veces y un evento A ocurre m veces, entonces la frecuencia relativa de A es $fr = \frac{m}{n}$; y, dado el límite cuando n tiende al infinito (ya que se repite varias veces el experimento), la frecuencia relativa de A es igual a la probabilidad de A.

$$\lim_{n \to \infty} fr(A) = P(A)$$

Ejemplo: en un hipódromo se ha observado que el caballo con el número 20 tiene 8 carreras ganadas de 10. Si usted quiere apostar por este caballo, ¿cuál es la probabilidad de que gane la apuesta?

Datos: m = 8, n = 10.

Desarrollo:

$$\lim_{n \to 8} fr(A) = P(A)$$

$$P(A) = \frac{8}{10}$$

$$P(A) = 0.8$$

Respuesta: la probabilidad de ganar la apuesta y la carrera por apostar al caballo número 20, es de 80%.

La probabilidad subjetiva, tal y como dice su nombre, se determina de acuerdo con una percepción; es la probabilidad que una persona asigna a un evento con base en su experiencia.

Ejemplo: cuando una persona pronostica el tiempo, determinando la probabilidad de que llueva o no, dependiendo cómo ve el cielo, y considerando que no es una regla porque puede ocurrir de manera distinta cada vez.

Por otro lado es de suma importancia mencionar que muchas de las probabilidades se calculan de forma axiomática.

El entendimiento de los axiomas de probabilidad como aquellas condiciones mínimas que deben verificarse para que una función definida sobre un conjunto de sucesos determine consistentemente sus probabilidades, es atribuido a Kolmogorov, quien consideró la relación entre la frecuencia relativa de un suceso y su probabilidad mediante el número de veces que se realiza un experimento grande. Al desarrollar la teoría axiomática de la probabilidad, se apoyó en 3 axiomas y 5 teoremas, que a continuación se presentan:

Axiomas:

1. $P(S) = 1$.
2. Si *A* es un evento cualquiera, $P(A) \geq 0$.
3. Si *A* y *B* son eventos mutuamente excluyentes $(A \cap B) = \emptyset$, la probabilidad que ocurra *A* o *B* es $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, en general si $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes $(\cap_{i=1}^{n} A_i = \emptyset)$ entonces $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Teoremas:

1. $P(\emptyset) = 0$.

2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. Si *A* y *B* son eventos tales que $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

4. Si *A* y *B* son eventos entonces $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

5. Si *A* y *B* son dos eventos cualesquiera entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejemplo: en una cartera se tienen 20 billetes de 20 pesos, 10 billetes de 50 pesos, 5 billetes de 100 pesos y 3 billetes de 500 pesos, ¿cuál es la probabilidad de extraer un billete de 50 pesos o de 500 pesos al azar?

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{10}{38} \;;\; P(B) = \frac{3}{38} \;;\; P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = \frac{10}{38} + \frac{3}{38} -$$

$$P(A \cup B) = \frac{13}{38}$$

$$P(A \cup B) = 0.3421$$

Respuesta: la probabilidad de extraer un billete de 50 o de 500 pesos es de 34.21%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. En una urna hay bolitas de diferentes colores y cada una de ellas está debidamente numerada de acuerdo con su color. Hay 20 bolitas blancas, 10 rojas, 40 amarillas y 10 azules.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bolita blanca o una azul?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de extraer una blanca, con numeración mayor a 12 o amarilla con numeración mayor a 26?

2. En una elección existen cuatro candidatos, si *D* tiene el doble de probabilidad de ganar que *C*, *C* igual a *B* y *B* el doble de A.
   a) ¿Cuál es la probabilidad que gane C?
   b) ¿Cuál es la probabilidad que no gane A?

1.2 EVENTOS

Cuando se realiza cualquier cálculo en alguna ciencia aplicada, se recurre al apoyo de los modelos matemáticos, los cuales conforman un conjunto de relaciones unitarias, binarias y trinarias que permiten la satisfacción de proposiciones derivadas del conjunto de axiomas de la teoría.

Existen dos tipos de modelos, los determinísticos y no determinísticos. En el caso de los primeros, no juegan ningún papel de incertidumbre, mientras que los segundos son los de tipo probabilístico aleatorio.

Los cálculos matemáticos que suelen realizarse, se aplican para resolver algún fenómeno de la realidad observable, cuantificable y reproducible.

La experimentación es el proceso mediante el cual se reproducen eventos, se obtienen resultados y una propiedad importante es que dicha reproducción es repetible.

Los experimentos se dividen en determinísticos y no determinísticos. El determinístico es aquel en que las condiciones naturales con las cuales se efectúa el experimento permitirán que los resultados siempre sean los mismos. Por ejemplo, en el área de química se conoce que siempre $NAOH + HCL \rightarrow H_2O + NACL$, o bien, otro ejemplo es que siempre que se coloca el agua a hervir, entrará en estado de ebullición a los 100°C.

Los experimentos no determinísticos son los que se trabajan en probabilidad, y se refieren a aquellos en que las condiciones materiales bajo las cuales se efectúa el experimento determinan la probabilidad de ocurrencia de los resultados. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda.

De acuerdo con lo anterior, en el experimento no determinístico o probabilístico no se podrán predecir los resultados, sin embargo, se puede conocer todo el conjunto de posibles resultados del experimento, el cual se llamará *espacio muestral*.

El espacio muestral se representa mediante la letra *S* y con { } (llaves) indicará que es un conjunto.

Por ejemplo, al determinar el espacio muestral del lanzamiento de una moneda; una moneda tiene dos caras, una es águila y otra sol (para este ejemplo se utilizará la nomenclatura *a* para águila y *t* para sol), entonces:

$$S = \{a, t\}$$

Ahora, si se determina el espacio muestral del lanzamiento de una moneda dos veces:

$$S = \{aa, at, ta, tt\}$$

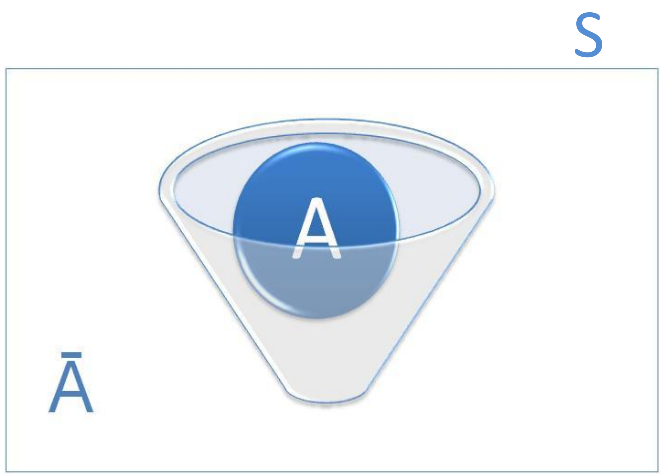
S al ser el espacio muestral, está conformado por resultados del experimento y éstos son descomponibles, por dicha cuestión surge el concepto de evento o suceso.

El suceso o evento es el subconjunto del espacio muestral y se representa con cualquier letra mayúscula del abecedario con excepción de la *S*.

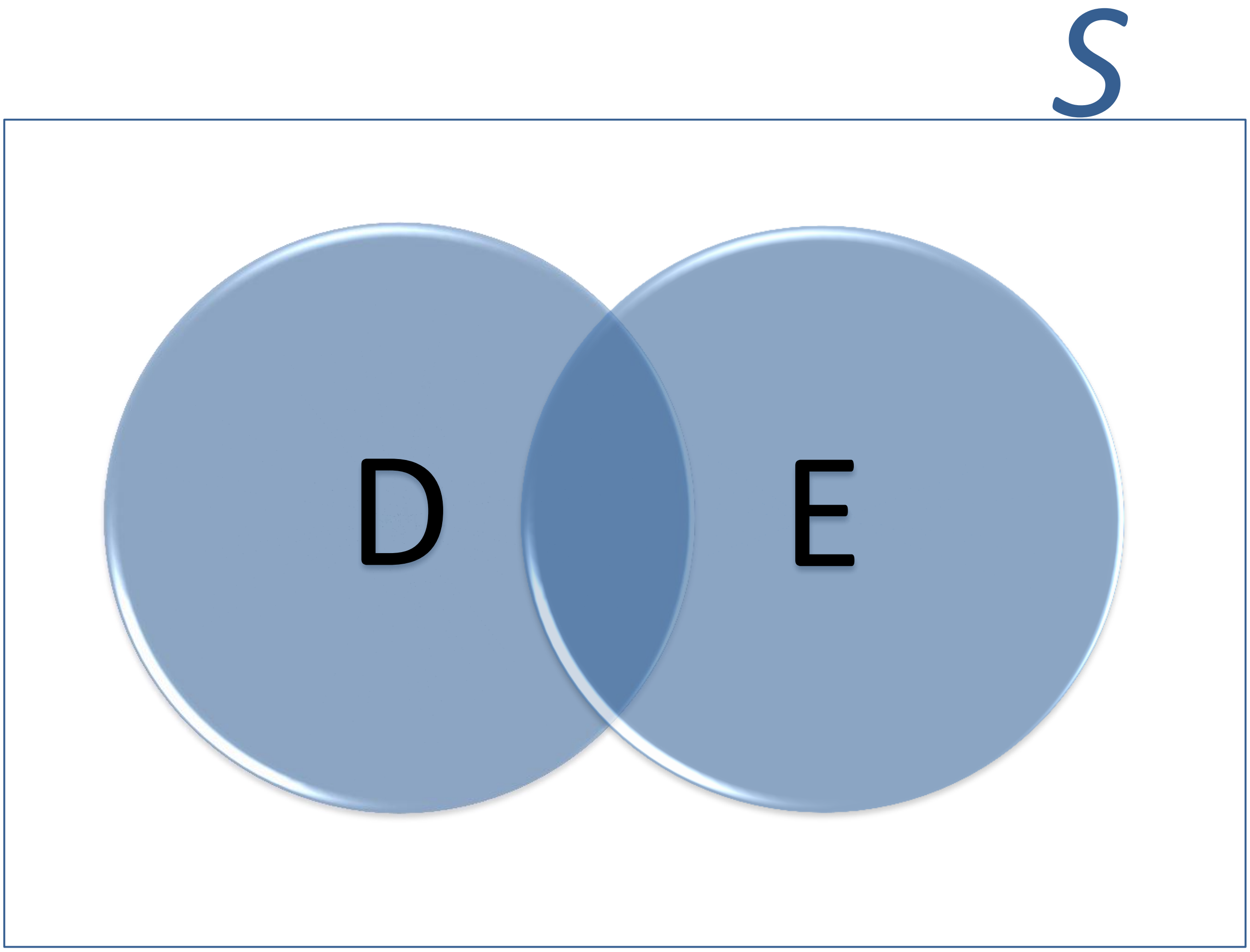
Por ejemplo, si $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, TTT, THT, TTH\}$ y se pretende de *S* un evento que se llamará *A*, en el cual ocurren exactamente tres *H*, la respuesta es $A = \{HHH\}$; ahora si se intenta crear un suceso denominado *B*, pero éste ocurre por lo menos una *H*, entonces $B = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$.

Algunas ocasiones es más sencillo representar el espacio muestral y los eventos por medio de diagramas de Venn, ya que se pueden apreciar mejor los eventos que pueden ser utilizados para formar otros eventos.

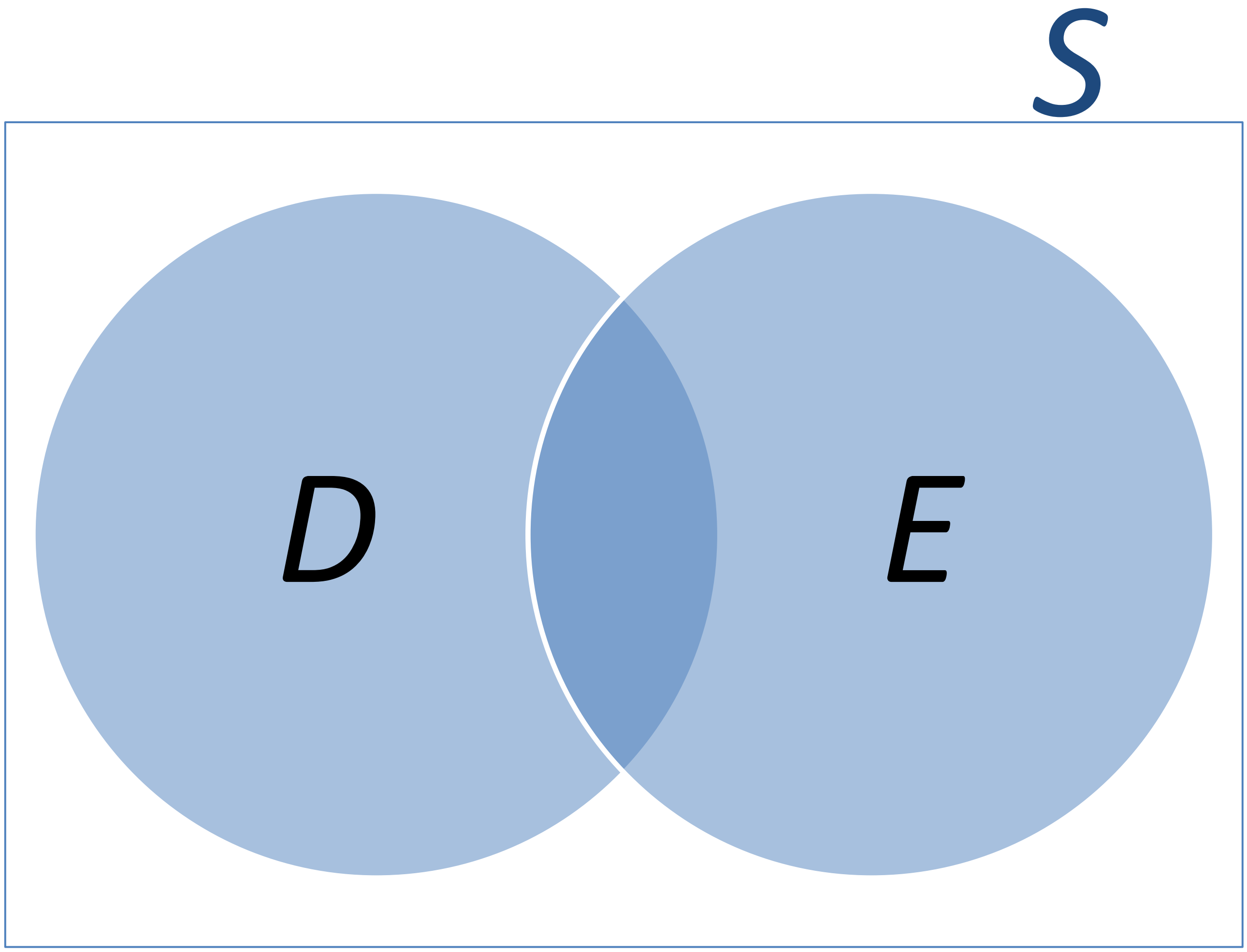
Si se intenta representar un espacio muestral y un evento *A*, la región dentro del rectángulo pero fuera del círculo, representa el conjunto de todos los puntos de *S* que no están en *A* y se denota como $\bar{A}$ y se observa de la siguiente manera:



La unión de dos eventos, *D* y *E*, distinguida por la región sombreada entre dichos eventos, abarca el conjunto de todos los puntos muestrales que están en ambos eventos se representa mediante el símbolo ∪, se denota $D \cup E$ y se observa de la siguiente manera:



La intersección entre dos eventos, *D* y *E*, distinguida también por la región sombreada, representa los puntos muestrales que son comunes en ambos sucesos, se representa mediante el símbolo ∩, se denota $D \cap E$ y se observa de la siguiente manera en un diagrama de Venn:



Por ejemplo, al suponer que un espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ para el tiro de un dado, sean $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1\}$, se determinarán los siguientes eventos:

a) $\bar{A}$. En este caso, el complemento del evento *A*, son todos aquellos puntos de *S* que no se encuentran en *A*, por tanto el resultado es:

$$\bar{A} = \{2, 4, 6\}$$

b) $A \cup B$. Aquí se requieren tanto los puntos del evento *A* como del *B*, por tanto:

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$$

c) $A \cap C$. Significa que los puntos muestrales tanto del evento *A* como del *C* son comunes, por tanto:

$$A \cap C = \{1\}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver el siguiente ejercicio:

1. Dado el espacio muestral:

$$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,0\}$$

a) Determinar el evento *B*, donde aparezca un número par.

b) Determinar el evento *C*, donde aparezca un número impar.

c) De acuerdo con los eventos *B* y *C*, conformados con anterioridad, realizar la intersección de ambos conjuntos.

1.3 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Antes de poder entender la probabilidad condicional, es importante conocer que existen eventos dependientes e independientes.

Cuando un evento no tiene efecto sobre la probabilidad de ocurrencia de otros, se habla de eventos independientes; por ejemplo, cuando se lanza un dado, el resultado que se obtiene de realizar el primer lanzamiento no afecta sobre las probabilidades del segundo lanzamiento.

Si los eventos *A* y *B* son independientes, se puede representar dicha independencia con la siguiente expresión:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Entonces:

$$P(B \mid A) = P(B)$$

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Los eventos dependientes se refieren a la ocurrencia o la no ocurrencia de un evento con respecto a otros eventos, y precisamente con este tipo de eventos empleamos la probabilidad condicional.

La probabilidad condicional es aquella que considera situaciones semejantes en las que se quiere encontrar la probabilidad de un evento *A*, cuando se conoce lo que ha ocurrido en algún otro evento *B*.

Si *A* y *B* son dos eventos particulares de un espacio muestral y $P(B) > 0$, entonces la probabilidad de *A* dado *B* es:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Por ejemplo, si se quiere calcular la probabilidad del lanzamiento de una moneda dos veces y que el resultado obtenido sea que en el segundo volado resulte la cara sol, dado que el primer lanzamiento sea águila.

Para este ejemplo se empleará la siguiente nomenclatura:

T = águila

H = sol

El espacio muestral es:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

Y se quiere conocer la probabilidad condicional, que se expresa así:

$$P(H \mid T) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)}$$

Entonces el espacio muestral reducido del águila consiste en todos los resultados donde el primer lanzamiento es águila (*T*).

$$T = \{TH, TT\}$$

Mientras que el evento $H \cap T$ es el de todos los resultados en águila (*T)* para los cuales el segundo volado es sol (*H*).

$$H = \{HH, TH\}$$

Cuando se realiza la intersección de *H* con *T*, se observan los elementos en común, por tanto:

$$H \cap T = \{TH\}$$

Y como en la fórmula original se denota una división, se realiza con los resultados obtenidos anteriormente; y se obtiene $\frac{1}{4}$ porque sólo aparece un elemento, que es *TH,* de la intersección entre el espacio reducido de *T* y *H*, con respecto al espacio muestral; y $\frac{2}{4}$ porque son dos elementos que son *TH* y *TT* que aparecen del espacio muestral reducido de *T*, entonces:

$$P(H \mid T) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}$$

$$P(H \mid T) = \frac{1}{2}$$

Respuesta: la probabilidad de que al lanzar una moneda dos veces y el resultado obtenido sea que en el segundo volado salga sol, dado que el primer lanzamiento sea águila es de 50%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Una empresa dedicada a la producción de perfumes lanza la presentación de su nuevo perfume por televisión. La empresa cree que el anuncio será visto por 32% de televidentes y 2% de aquellos que vieron el anuncio comprarán el perfume. Calcular la probabilidad de que el televidente vea el anuncio y compre el perfume.

2. Si una familia tiene dos hijos, encontrar la probabilidad de que ambos sean hombres.

3. Un banco tiene un teléfono computarizado que selecciona de manera aleatoria números telefónicos de los deudores; la experiencia ha demostrado que 5% muestran interés en pagar y 22% aceptan pagar, ¿cuál es la probabilidad de que una persona receptora haga contacto con el banco y pague su deuda?

1.4 PROBABILIDADES DE INTERSECCIONES DE EVENTOS

La intersección de un evento *A* y otro *B*, se escribe $A \cap B$, y es el evento que consiste en todos los puntos muestrales que son comunes a ambos (*A* y *B*).

Entonces, cuando se habla de la intersección de los sucesos, se hace referencia al suceso compuesto por los elementos comunes de los dos o más sucesos que se intersectan y, por tanto, la probabilidad, será igual a la probabilidad de los elementos comunes.

Las propiedades de la intersección de conjuntos son:

$$A \cap S = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Si $B \subset A$ entonces $A \cap B = B$

Ejemplo 1*:* si se lanza un dado al aire y se quieren analizar dos sucesos; el primero que salga con un número impar y el segundo que salga con un número menor a 3.

Se tiene:

$A =$ número impar

$B =$ menor a 4

Entonces:

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

Solución: como se trata de una intersección de las probabilidades, los elementos en común de *A* y *B* son los números 1 y 3, lo que significa que son dos de los seis elementos del espacio muestral que se intersectan.

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

$$P(A \cap B) = 0.3333$$

Respuesta: la probabilidad que al lanzar un dado al aire y que salga un número impar y menor a cuatro es de 33.33%.

Ejemplo 2*:* en una baraja inglesa se analizan dos sucesos; el primero que salga una reina y el segundo que sea roja.

Se tiene:

R = carta roja

N = carta negra

C = corazón

D = diamante

T = trébol

E = espada

A al 10 = as al 10

J = joto

Q = reina

$R = \text{rey}$

Solución: el suceso *A* está conformado por todas las cartas de la baraja inglesa que son de corazones, mientras que *B* está formado por aquellas cartas que son reinas; en el caso de *A* ∩ *B* los elementos que tienen en común son dos QC_R y QD_R.

Entonces:

$$A = \{AC_{R,}2C_R, 3C_R, 4C_R, 5C_R, 6C_R, 7C_R, 8C_R, 9C_R, 10C_R, JC_R, QC_R, RC_{R,}$$
$$AD_{R,}2D_R, 3D_R, 4D_R, 5D_R, 6D_R, 7D_R, 8D_R, 9D_R, 10D_R, JD_R, QD_{R,}RD_{R,}\}$$

$$B = \{QC_R, QD_{R,}QE_N, QT_{N,}\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52}$$

$$P(A \cap B) = 0.03846$$

Respuesta: la probabilidad de que salga una carta roja y sea reina es de 3.84%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. En una tómbola hay 10 bolitas negras y 2 blancas, ¿cuál es la probabilidad de que primero salga una bolita blanca y después una negra?

2. En una baraja española se analizan dos sucesos: el primero que salga un rey y el segundo de copas.

3. Si se lanza un dado al aire y se quieren analizar dos sucesos: el primero que salga un número par y el segundo que salga un número mayor que 2.

1.5 Teorema de Bayes

El Teorema de Bayes, permite calcular una probabilidad de un suceso *F*, a partir de lo ocurrido en el suceso *E*. Este tipo de teorema usualmente es aplicable a las áreas de control de calidad, para conocer las probabilidades de defectuosidad o no defectuosidad.

La fórmula de Bayes: suponga que $F_{1,}F_{2,\dots.}F_n$ son *n* eventos que constituyen una participación de un espacio muestral *S*. Esto es, los F_1 son mutuamente excluyentes y su unión es *S*, además se supone que *E* es cualquier evento en *S*, donde $P(E) > 0$. La probabilidad condicional de F_1 dado el evento *E*, ha ocurrido y se expresa por medio de la siguiente fórmula:

$$P(F_{1,}|E) = \frac{P(F_{1,})P(E|F_{1,})}{P(F_{1,})P(E|F_{1,}) + P(F_{2,})P(E|F_{2,}) + \cdots..+P(F_{n,})P(E|F_{n,})}$$

Sin embargo, la fórmula de Bayes puede ser difícil de recordar y, por tanto, se menciona de forma sencilla:

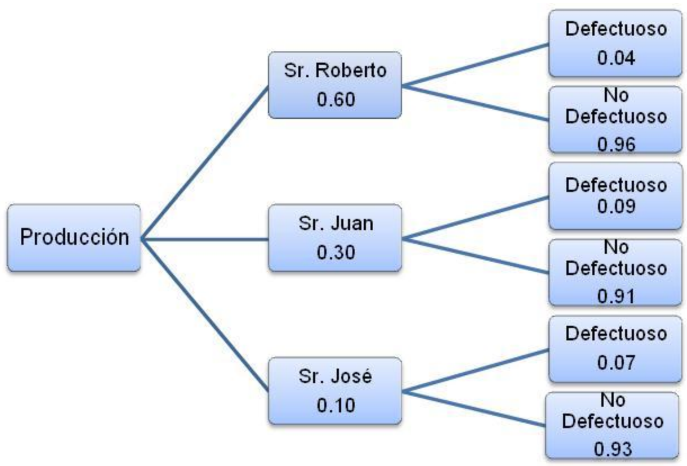
$$P(F_{1,}|E) = \frac{Probabilidad\ para\ el\ camino\ de\ F_1\ y\ E}{Suma\ de\ todas\ las\ probabilidades\ de\ los\ caminos\ a\ E}$$

Cuando se desarrolla la fórmula de Bayes, se puede apoyar en un árbol de probabilidad**,** el cual es una representación gráfica que permite visualizar las formas en que se llevan a cabo las agrupaciones de los elementos.

Ejemplo*:* en una microempresa de ropa se da a maquilar pantalones de mezclilla, dicho negocio cuenta con tres proveedores, el señor Roberto, quien maquila 60%, el señor Juan, 30%, y el resto es producido por el señor José.

Con base en la experiencia, el dueño de la empresa cree que la probabilidad de producir un pantalón defectuoso del señor Roberto es de 4% y las probabilidades correspondientes para el señor Juan y el señor José son 9% y 7%, respectivamente. El día de la entrega se encontró un pantalón defectuoso, ¿de qué maquilador es más probable que provenga el pantalón de mezclilla defectuoso?

Primero se realiza un árbol de probabilidad para que se pueda ilustrar los caminos de probabilidad:



Después se sustituye la fórmula:

$$P(F_{1,}|E) = \frac{Probabilidad\ para\ el\ camino\ de\ F_1\ y\ E}{suma\ de\ todas\ las\ probabilidades\ de\ los\ caminos\ a\ E}$$

Solución: se sigue el camino de cada uno de los maquiladores, que sería el nombre del maquilador, y después se multiplica por lo el dato que se quiere conocer, en este caso, el camino defectuoso que le corresponde, y finalmente se divide entre todos los caminos a seguir de los casos defectuosos.

Por tanto, si se quiere conocer la probabilidad de que el pantalón defectuoso provenga del señor Roberto:

$$P(F_{1,}|E) = \frac{(0.60)(0.04)}{(0.60)(0.04) + (0.30)(0.09) + (0.10)(0.07)}$$

$$= \frac{0.024}{0.058}$$

$$= 0.4137$$

$$= 41.37\%$$

Si se quiere conocer la probabilidad que provenga del señor Juan:

$$P(F_{1,}|E) = \frac{(0.30)(0.09)}{(0.60)(0.04) + (0.30)(0.09) + (0.10)(0.07)}$$

$$= \frac{0.027}{0.058}$$

$$= 0.4655$$

$$= 46.55\%$$

Si se quiere conocer la probabilidad que provenga del señor José:

$$P(F_{1,}|E) = \frac{(0.10)(0.07)}{(0.60)(0.04) + (0.30)(0.09) + (0.10)(0.07)}$$

$$= \frac{0.027}{0.058}$$

$$= 0.1206$$

$$= 12.06\%$$

Respuesta: es más probable que el pantalón de mezclilla defectuoso provenga del maquilador Juan, ya que la probabilidad es de 46.55%, mayor que la de los otros maquiladores.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Una fábrica tiene 3 sucursales las cuales producen 12, 45 y 43 por ciento del total de producción y manejan los siguientes porcentajes de no defectuosidad 91, 92 y 93, respectivamente. En caso de elaborar un producto defectuoso, ¿de qué sucursal es más probable que provenga?

2. Una compañía fabrica zapatos. De las unidades producidas, 8% proviene de la máquina A, 48% de la máquina B y el resto de la máquina C, y de acuerdo con la experiencia del productor, se intuye que 15% de los zapatos mal acabados provienen de A, 27% de B y el resto de C. ¿Cuál es la probabilidad de que en el último pedido el producto mal acabado provenga de A?

3. Hay dos urnas, en la primera hay dos canicas moradas y en la segunda dos canicas rojas. Una urna es seleccionada al azar y de ella se saca una morada, ¿cuál es la probabilidad de que la otra canica en la urna seleccionada sea roja?

1.6 TÉCNICAS DE CONTEO

Cuando se calcula una probabilidad puede darse el caso que se contabilicen elementos que sea complicado o tedioso contarse en el conjunto, por tal motivo es importante desarrollar técnicas favorecedoras para realizar un conteo con la finalidad que permita resolver y entender ciertos problemas en probabilidad; por lo que se realizará con el análisis combinatorio, el cual permite conocer las selecciones o subconjuntos que se pueden formar con los elementos de un conjunto.

1. Permutaciones. La permutación es cuando interesa el orden de *r* objetos sin repetición, seleccionados entre *n* objetos distintos y el número de permutaciones se anota con la nomenclatura ${}_nP_r$.

El número de permutaciones de *n* objetos tomados de *r* en *r*, se determina:

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}_{r \text{ factores}}$$

Sin embargo, cuando se tienen grandes cantidades se utilizará el término de factorial y la fórmula se expresará de la siguiente manera:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo 1:

$${}_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!}$$

$$= \frac{7!}{4!}$$

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}$$

$$= 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$= 210$$

Ejemplo 2: en un estudio de mercado se realiza un cuestionario para determinar las preferencias del consumidor de cierto refresco de marca. El encuestado debe seleccionar de seis rubros, cuatro razones por las que le interesa consumir el refresco, además que debe ordenar de mayor a menor, anotando con el número 1 el de mayor interés y con el 4 el de menor interés. ¿De cuántas maneras puede responder un ciudadano el cuestionario?

Solución: como un encuestado debe ordenar cuatro de los seis problemas, y es importante el orden que da, la respuesta es el ordenado de seis elementos tomando únicamente cuatro, por tanto es una permutación n = 6, ya que éste es el número total de opciones que se pueden contestar en el cuestionario y r = cuatro opciones que se eligen, donde es importante el orden que se le da a cada una.

$$_6P_4 = \frac{6!}{(6-4)!}$$

$$= \frac{6!}{2!}$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{2 \cdot 1!}$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= 360$$

2. Combinaciones. La combinación se da sin importar el orden de *r* objetos sin repetición, seleccionados de entre *n* objetos tomados de *r* en *r*; las combinaciones se anotan con la nomenclatura $_nC_r$.

Por tanto, el número de combinaciones de *n* objetos tomados de *r* en *r* está dado por:

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo: en el departamento de una empresa hay 20 trabajadores, quienes deben cubrir una guardia el fin de semana por lo que se formará un grupo de guardia el día sábado conformado por cuatro trabajadores. ¿Cuántos grupos diferentes de 4 miembros son posibles?

Solución: en este ejemplo, el orden de los miembros que conforma el grupo de guardia no es importante, ya que no es necesario determinar cómo van a estar acomodados los integrantes del grupo, por tanto:

$$_{20}C_{4} = \frac{20!}{4!(20-4)!}$$

$$_{20}C_{4} = \frac{20!}{4! \cdot 16!}$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 16!}$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{116280}{24} = 4845$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Emiliano, Rafael, Edgar y Alfredo quieren formar su compañía, y desean utilizar sus nombres para hacerlo. ¿Cuántos nombres son posibles?

2. Una dirección gubernamental cuenta con 102 empleados ¿de cuántas maneras pueden ser asignados los cargos de director general, director general adjunto, director de área, subdirector, jefe de departamento, si ningún miembro puede tener más de un cargo? y ¿de cuántas maneras pueden ser asignados los cinco cargos si cada uno debe ser ocupado por miembros diferentes?

3. Una empresa se dedica a realizar visitas guiadas a zonas arqueológicas, tiene tres camionetas y cada una tiene capacidad de 20 pasajeros, pero llegan 33 personas para la excursión. ¿De cuántas maneras se pueden asignar las personas a las camionetas?

AUTOEVALUACIÓN

1. Relacionar las siguientes columnas:

1. N permite medir la certidumbre a incertidumbre. ( )	*a)* Probabilidad subjetiva.
2. Se repite *n* veces y un evento *A* ocurre *m* veces. ( )	*b)* Determinístico.
3. Las corridas de caballos es un ejemplo claro de un experimento: ( )	*c)* Probabilidad frecuencial.
4. Al poner un papel al fuego y saber que se quema es un ejemplo claro de: ( )	*d)* No determinístico.
5. Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento. ( )	*e)* Espacio muestral.
6. Es el subconjunto de un espacio muestral. ( )	*f)* Evento.

2. Subrayar la respuesta que corresponda con la afirmación.
   a) Se conoce como probabilidad *a priori* ya que se determina antes.
      - probabilidad clásica
      - probabilidad frecuencial
      - probabilidad subjetiva

   b) Es la probabilidad que se obtiene de acuerdo con una percepción.
      - probabilidad clásica
      - probabilidad frecuencial
      - probabilidad subjetiva

   c) Es aquella probabilidad que considera situaciones semejantes en las que quiere encontrar la probabilidad de un evento *A*, cuando se conoce lo que ha ocurrido en un evento *B*.
      - probabilidad condicional
      - probabilidad frecuencial

- probabilidad subjetiva

d) Es cuando interesa el orden de los objetos sin la repetición, seleccionados de distintos objetos.

- análisis combinatorio
- permutación
- combinación

3. En las siguientes afirmaciones o definiciones escribir el concepto que falta.

a) El ____________________________ permite calcular una probabilidad de un suceso *F*, a partir de lo ocurrido en el suceso *E*, este tipo de teorema usualmente es aplicable en las áreas de control de calidad.

b) El ____________________________ es una representación gráfica que permite visualizar las formas en que se llevan a cabo las agrupaciones de los elementos.

c) El ____________________________ permite conocer las selecciones o subconjuntos que pueden formar con los elementos de un conjunto.

Respuestas

1.

1. *a)*
2. *c)*
3. *d)*
4. *b)*
5. *e)*
6. *f)*

2.

a) probabilidad clásica

b) probabilidad subjetiva

c) probabilidad condicional

d) permutación

3.

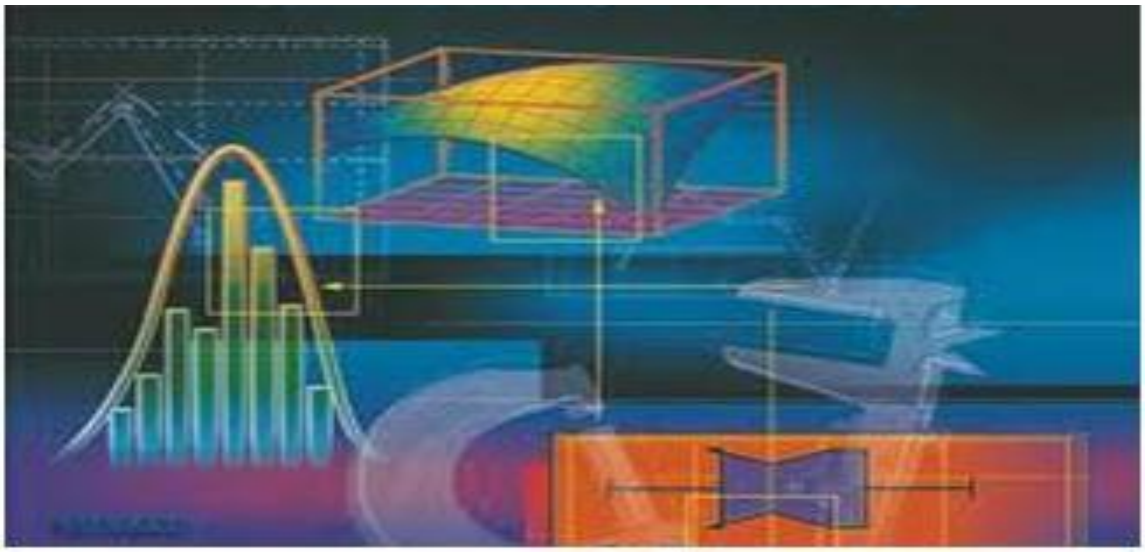
a) teorema de Bayes

b) árbol de probabilidad

c) análisis combinatorio

UNIDAD 2

VARIABLES Y DISTRIBUCIONES

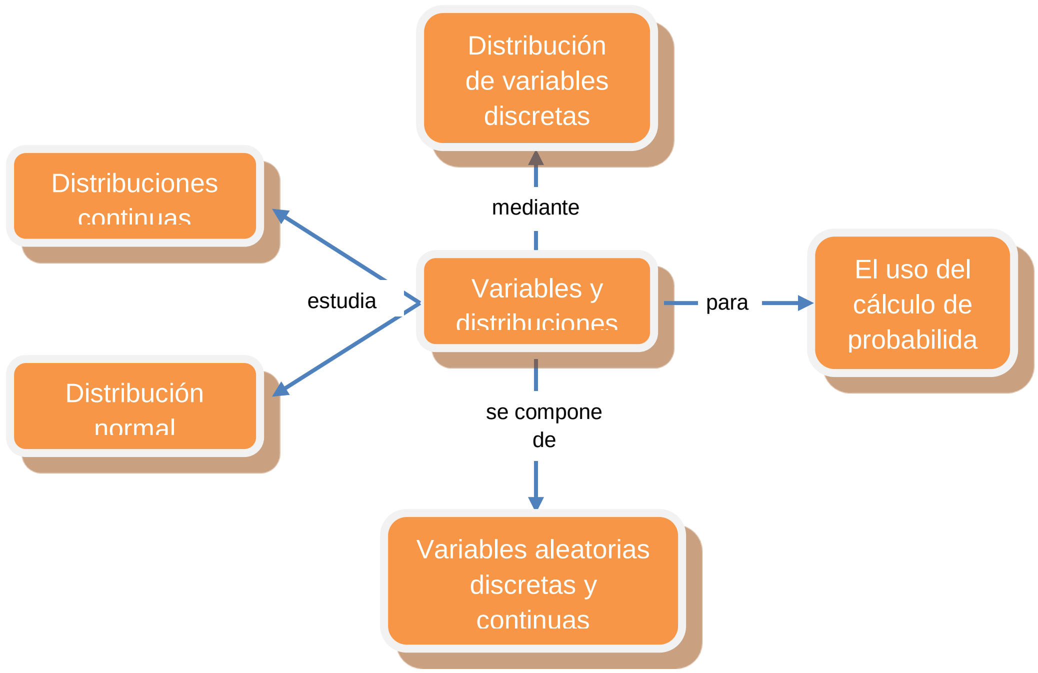


OBJETIVO

El estudiante conocerá y diferenciará distribuciones de probabilidad de variables aleatorias, de la discreta y la continua, además de aprender a calcular la esperanza matemática y la varianza, mediante el desarrollo de ejercicios prácticos, además de conocer la aplicación de los diferentes tipos de distribución, por medio del desarrollo de ejercicios prácticos.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

La teoría de la probabilidad permite tomar decisiones, pues de acuerdo con los cálculos realizados se elaboran inferencias estadísticas y con base en los resultados estadísticos obtenidos, se proyecta la probabilidad de ocurrencia de un cierto evento.

Conocer la variación de los datos, es decir, la muestra de estudio, y calcular probabilidades de acuerdo con la información con la que se cuenta son los temas que se abordarán es esta unidad, ya que existen diferentes métodos para calcular la probabilidad de ciertos eventos, de acuerdo con las características con las que se cuenta y el tipo de variable de estudio que le corresponda, llámese continua o discreta.

2.1 VARIABLES ALEATORIAS

En esta sección se hablará de las variables aleatorias, pero antes de definirlas es importante recordar qué es una variable.

Cuando se observa cierta característica que toma valores distintos, se está frente a una variable. Por ejemplo, si se observan las características de una persona, se puede percibir que éstas son variables, pero cuando se observa a más personas, resulta que cada una de ellas tiene características distintas. El ejemplo anterior permite percibir cómo es que cada variable es diferente, o bien puede llegar a tomar valores distintos.

Estas variables pueden ser aleatorias, lo cual significa que el valor obtenido de la variable es resultado de un factor fortuito; y su vez, dividirse en discretas o continuas.

2.1.1 Variables aleatorias discretas

Las variables aleatorias discretas se caracterizan por tener saltos o interrupciones en los valores, es decir, si se quiere representar las caras de un dado se anotaría 1, 2, 3, 4, 5, 6; éste es un ejemplo claro de una variable discreta, porque un dado no tiene números fraccionados, es decir, nunca vamos a encontrar que un dado tiene una cara de 1.5 o 3.8.

Cuando se hace referencia a una variable aleatoria discreta, se habla de una función mediante la cual a cada uno de los eventos del espacio muestral se les hace corresponder un número dentro de los números reales, mediante una ley de correspondencia.

$$f: S \to \mathbb{R}$$

Lo anterior quedará más claro con el siguiente ejemplo: el lanzamiento de una moneda dos veces, para conocer el número de ocurrencia de águilas. En este caso, se representan las águilas con la letra *a*, y los soles con la letra *t*:

$aa \rightarrow 2$ Porque puede ocurrir en el primer y segundo lanzamiento águila.

$at \rightarrow 1$ Porque puede ocurrir sólo en el primer lanzamiento águila.
$ta \rightarrow 1$ Porque puede ocurrir sólo en el segundo lanzamiento águila.

$tt \rightarrow 0$ Porque en ningún lanzamiento ocurre águila.

Este ejemplo permite observar de manera más sencilla cómo a cada uno de los eventos pertenecientes al espacio muestral le corresponde un número real.

Como ya se comentó, se pueden dar diversos valores y éstos pueden ser organizados por medio de una función de probabilidad, mediante la cual a cada uno de los valores que toma la variable discreta se le asigna una probabilidad mediante una ley de correspondencia.

$$f: S \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

Partiendo del ejemplo anterior, puede ocurrir un valor al que le corresponde una probabilidad: $x \rightarrow f(x)$, el cual ocurre en dos lanzamientos águila a los que le corresponde la probabilidad de ¼, porque sólo en una opción sale doble águila de cuatro posibles opciones:

$$2 \rightarrow 1/4$$

Ocurre un águila por primer lanzamiento (primer valor) y un águila por segundo lanzamiento (segundo valor), en donde corresponde una probabilidad de ½, porque se da una sola opción de salir un águila, ya sea en primer lanzamiento o segundo lanzamiento, pero es divisible entre dos porque se cumple en dos condiciones.

$$1 \rightarrow 1/2$$

$$1 \rightarrow 1/2$$

No ocurre ningún lanzamiento águila, entonces le corresponde la probabilidad de ¼, porque el cero representa un valor respecto de las cuatro posibles opciones:

$$0 \rightarrow 1/4$$

De acuerdo con lo anterior, son dos las propiedades: una que la suma de las probabilidades es uno, y la otra que son positivas y se puede representar por medio de una tabla:

x	**0**	**1**	**2**
F(x)	¼	½	¼

La regla de correspondencia, representada en la tabla anterior, es una función de probabilidad.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Elaborar un cuadro sinóptico que contenga las características más importantes de una variable aleatoria discreta.

2.1.2 Variables aleatorias continuas

Las variables aleatorias continuas no poseen saltos o interrupciones, pueden tener cualquier valor dentro de un intervalo especificado, por ejemplo 1.67 o 28.5; se pueden emplear cuando se mide la temperatura, la estatura o el peso.

Por tanto, se pueden definir como *x,* que es una función definida sobre el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento, entonces:

$$X(s): s \rightarrow \mathbb{R}$$

Si *x* es una variable aleatoria continua y *f(x)* satisface las siguientes condiciones:

1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

3. $P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b)$

Ejemplo: calcular la $P(0.2 < X < 0.8)$, que es la probabilidad de una variable continua, un intervalo, por tanto, sus valores no tienen saltos, ya que oscilan entre 0.2 y 0.8; para la realización de este ejercicio se empleará el cálculo integral.

$$\int_{0.2}^{0.8} x \, dx$$

$$\frac{x^{1+1}}{1+1} \Big|_{0.2}^{0.8}$$

$$\frac{x^2}{2} \Big|_{0.2}^{0.8}$$

$$\frac{(0.8)^2}{2} - \frac{(0.2)^2}{2}$$

$$\frac{0.64}{2} - \frac{0.04}{2}$$

$$0.32 - 0.02 = 0.3$$

Respuesta: la probabilidad de *x* cuando tiende de 0.2 a 0.8, es de 30%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Elaborar un cuadro sinóptico que contenga las características más importantes de una variable aleatoria continua.

2.1.3 Valor esperado de una variable aleatoria

El concepto de valor esperado surge de los juegos de azar con la esperanza de ganar el juego en repetidas ocasiones.

La esperanza matemática evoluciona en términos de valor esperado, es decir, el valor promediado durante un gran número de repeticiones del fenómeno, este valor promedio se obtiene de un gran número de experimentos.

La esperanza matemática de una variable discreta se calcula de la siguiente forma:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x\, p(x) = \mu$$

$E(x)$ significa el operador del valor esperado, es decir, el valor promedio de la variable x; x es la variable discreta, función de los valores que toma x, y $p(x)$ es la probabilidad de x.

La esperanza matemática cuenta con operadores, los cuales permiten simplificar el cálculo de la esperanza:

1. Si C es una constante, entonces $E(x) = CE(X)$.
2. Si x y y son variables aleatorias, entonces $E(x + y) = E(x) + E(y)$.
3. Si x y y son variables aleatorias independientes, entonces $E(xy) = E(x)\,E(y)$.

Ejemplo: x es el número de puntos obtenidos cuando se lanza un dado equilibrado, con este dato se calculará la esperanza matemática. Lo más recomendable es realizar una pequeña tabla donde las columnas tengan el valor de *x* (valores que puede tomar la variable discreta, *p(x)* la probabilidad que ocurra la variable discreta, y finalmente *x p(x)* que representa la multiplicación de *x* con *p(x)*). Los valores que toma *x* son, en este ejemplo, las caras del dado (1 a 6).

En el caso de *p(x)*, se anota la probabilidad de ocurrencia de la variable discreta: la probabilidad de que salga cualquier número entre el 1 y el 6 es 1/6:

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
p(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
x p(x)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6

Si la fórmula es:

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x\, p(x)$$

Entonces:

1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 + 6/6 = 21/6 = 3.5

Respuesta: la esperanza matemática, o el primer momento alrededor de la media, de lanzar un dado al aire es 3.5.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Calcular el primer momento alrededor de la media si *x* es la suma de valores que se obtienen al lanzar dos dados equilibrados.

2.1.4 Varianza de una variable aleatoria

El valor esperado de ciertas funciones de la variable aleatoria se representa por medio de momentos, que son las medidas descriptivas que caracterizan la distribución de probabilidad. La variable aleatoria se puede definir en cualquier punto, pero nos interesa lo que se define alrededor del cero y la media (el primer momento alrededor del cero de una variable aleatoria, la cual como ya se estudió, es la famosa esperanza matemática).

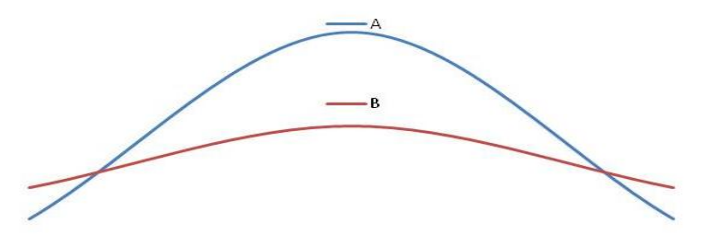
El segundo momento alrededor de la media recibe el nombre de varianza y matemáticamente se representa de la siguiente manera:

$$n = 2 \rightarrow \mu_2 = (x - \mu)^2 = var(x) = \sigma^2 x$$

Esto es igual a:

$$\mu^2 = E(x - \mu)^2 = E(x^2) - \mu^2$$

La varianza mide el grado de variabilidad o el grado de dispersión de los datos y gráficamente se representa de la siguiente forma:



En esta gráfica es posible observar que la varianza es más grande en *B* que en *A*; en el caso de *A*, el grado de dispersión es cada vez más pequeño, y para el caso de *B*, la varianza es mayor, por lo que el grado de dispersión es más grande; en resumen, mientras que la curva es más plana, existe mayor grado de dispersión entre sus datos, es decir, su distribución no es muy cercana al valor medio.

La varianza tiene una serie de operadores, los cuales se enumeran a continuación:

1. Si C es una constante de la forma $V(c) = 0 \rightarrow E[c - E(c)]^2 = E(c - c)^2 = E(0)^2 = 0$.
2. Si C es una constante de la forma $V(cx) = c^2 v(x) \rightarrow V(cx) = E[cx - E(cx)]^2 - E[cx - c\mu]^2 = E[c(x - \mu)]^2 = c^2 E(x - \mu)^2 = c^2 \text{var}(x)$.
3. Si x y y son variables aleatorias entonces $v(x + y) = v(x) + v(y) + 2\text{cov}(x, y)$.

Para ejemplificar la varianza, se desarrollará un ejemplo retomando el ejercicio del apartado anterior del lanzamiento de un dado, pero ahora se calculará el segundo momento o la varianza, del lanzamiento de un dado.

Lo más recomendable es retomar la tabla en donde las columnas tienen el valor de x (valores que puede tomar la variable discreta, *p(x)* la probabilidad que ocurra la variable discreta, y finalmente x *p(x)*), que representa la multiplicación de x con *p(x)*, pero ahora incorporando el valor de x al cuadrado:

$$\mu^2 = E(x - \mu)^2 = E(x^2) - \mu^2$$

Los valores que toma x son, para este ejemplo, las caras del dado (1 a 6); el valor de μ representa la esperanza matemática o el primer momento alrededor de la media.

El cuadro anterior quedaría:

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
x²	1	4	9	16	25	36
p(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
x p(x)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6
x²p(x)	1/6	4/6	9/6	16/6	25/6	36/6

Si la fórmula es:

$$\mu^2 = E(x-\mu)^2 = E(x^2) - \mu^2$$

Primero se elevan y anotan los valores de x al cuadrado, se multiplican respectivamente por $p(x)$, y se sustituye la suma de la multiplicación de x^2 por $p(x)$:

1/6 + 4/6 + 9/6 + 16/6 + 25/6 + 36/6 = 91/6

Entonces $E(x^2)$ = 91/6 y se le resta μ^2 (μ es la esperanza matemática o el primer momento alrededor de la media), y es 21/6, por tanto $\left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{441}{36}$; entonces, realizando las sustituciones en la fórmula de la varianza:

$$\mu^2 = E(x-\mu)^2 = E(x^2) - \mu^2$$

$$= \left(\frac{91}{6}\right) - \left(\frac{21}{6}\right)^2$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{441}{36}$$

$$= \frac{105}{36} = 2.91$$

Respuesta: la varianza o el segundo momento alrededor de la media de lanzar un dado al aire es 2.91.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Calcular el segundo momento alrededor de la media si x es la suma de valores que se obtienen al lanzar dos dados equilibrados.

2.2 DISTRIBUCIÓN DE VARIABLES DISCRETAS

En el apartado 2.1.1 se estudiaron las variables aleatorias discretas y en esta sección se estudiarán las distribuciones de probabilidad de una variable discreta, definida como una fórmula, una tabla, gráfica o cualquier otro medio que permita especificar todos los posibles valores que toma una variable aleatoria junto con sus respectivas probabilidades.

Las distribuciones de probabilidad para los casos discretos son:

- De Bernoulli.
- Binominal.
- Geométrica.
- Binominal negativa.
- Hipergeométrica.
- De Poisson.

2.2.1 Distribuciones de Bernoulli y binominal

Distribución de Bernoulli: la distribución de Bernoulli hace referencia a un solo ensayo de algún experimento que tiene dos posibles resultados: acierto o fracaso (θ = acierto; $1 - \theta$ = fracaso).

Su fórmula es:

$$f(x,\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}, para\ x = 0{,}1$$

Cuando se tiene un acierto toma el valor de 1 y cuando es fracaso el valor es 0, además los resultados son independientes, es decir, el resultado de cualquier ensayo particular no es afectado por el resultado de otro ensayo.

Ejemplo: supóngase que la probabilidad de ser aceptado en la universidad para estudiar derecho es de 5%, entonces: θ = 0.05 es el acierto, y $1 - \theta$ = 0.95, el fracaso.

El caso anterior, es un ejemplo claro de una distribución de Bernoulli, porque representa un solo experimento, que es quedarse en la universidad y únicamente hay dos posibilidades (quedarse o no quedarse).

Distribución binominal: se emplea para obtener cierta cantidad de aciertos constates al realizar una cantidad de experimentos independientes. Es decir, cuando se realiza un experimento de Bernoulli pero más de dos ocasiones (*"n"* veces) y cada ensayo es independiente del anterior; a diferencia de la distribución de Bernoulli, en la binominal el 0 significa que todos los experimentos han sido fracasos y en lugar de 1, se tiene el valor *n*, el cual significa que todos los experimentos han sido aciertos.

De acuerdo con la distribución binominal, *x* es una variable aleatoria y su función de probabilidad es:

$$b(x; n, \sigma) = \left(\frac{n}{x}\right) \theta^{x} (1-\theta)^{n-x} \; para \; x = 0,1,2, \dots., n$$

Por tanto, si *x* es una variable aleatoria binominal su función de probabilidad es:

$$b(x; n, \theta) = \left(\frac{n}{x}\right) \theta^{x} (1-\theta)^{n-x}$$

En esta distribución es básico el número de los ensayos y la probabilidad.

Ejemplo: se quiere calcular la probabilidad de que 7 de 10 personas encuentren trabajo después de salir de la universidad, con base en que la probabilidad de que ninguno obtenga trabajo es de 70%.

Solución: este ejemplo se resuelve por la binominal porque hay dos posibilidades de que se encuentre o no trabajo (acierto o fracaso); entonces los datos de la fórmula son: *x* = 7 porque se quiere conocer la probabilidad de que 7 personas encuentren trabajo después de salir de la universidad; *n* = 10, que es el total de personas, y θ = 0.3 porque si 0.70 es el fracaso y 1 – θ, el resto es 0.30.

Sustituyendo:

$$b(7; 10, 0.3) = \binom{10}{7} 0.3^7 (1 - 0.3)^{10-7}$$

$$= \frac{10!}{7! * (10-7)!} * 0.0002187 * (0.7)^3$$

$$= 120 * 0.0002187 * 0.343$$

$$= 0.0090$$

Respuesta: la probabilidad de que 7 de cada 10 personas encuentren trabajo después de salir de la universidad es de 0.90%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Calcular la probabilidad de obtener exactamente tres caras del águila al lanzar 5 volados.

2. Si en un lote de producción de ropa, 5% tiene algún defecto ¿cuál es la probabilidad de que en 10 piezas elegidas no exista una pieza defectuosa?

3. Calcular la probabilidad de obtener máximo un sol en cinco lanzamientos de una moneda.

2.2.2 Distribuciones geométrica y binominal negativa

Distribución geométrica: se emplea cuando se realizan cierto número de experimentos antes de tener un acierto, es decir, es un caso especial de la binominal, ya que se desea que ocurra el acierto por primera y única vez en el último ensayo que se realiza el experimento.

Consiste en un número no definido de experimentos separados y el proceso concluirá cuando se tenga por primera vez el resultado deseado, es decir, el acierto. Por tanto, la distribución geométrica se da cuando una variable aleatoria discreta *X* tiene una función de densidad de probabilidad.

Su fórmula es:

$\theta(X = x) = \theta_1^{x-1}\theta; donde\ \theta_1 = 1 - \theta$ De la fórmula anterior, es importante mencionar que la nomenclatura θ es acierto, θ_1 es fracaso, y x es el número de repeticiones del experimento para que ocurra por única y primera vez el acierto.

Ejemplo: se lanza al aire una moneda cargada 8 veces, de tal manera que la probabilidad de que salga águila es 2/3 y de que salga sol es 1/3, ¿cuál es la probabilidad que en el último lanzamiento salga águila?

Solución: este ejemplo se resuelve por distribución geométrica, ya que se requiere que ocurra el acierto por primera y única vez en el última ocasión que se realiza el experimento, en este caso es que salga águila; entonces los datos de la fórmula son: x = 8, porque son los lanzamientos necesarios para que aparezca águila; θ = 2/3, que es la probabilidad (de acuerdo con el ejercicio) de que salga águila, y θ_1 = 1/3, que es la probabilidad de que salga sol.

Sustituyendo:

$$\theta(X = 8) = \frac{1}{3}^{8-1} * \frac{2}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^7 * \frac{2}{3}$$

$$= 0.0003048 * 100$$

$$= 0.0304$$

Respuesta: la probabilidad de que salga águila en el último lanzamiento de 8, es de 0.03%.

Distribución binominal negativa: esta distribución también es conocida como de Pascal y una variación de la distribución binominal. Estudia el número de experimentos independientes entre sí, realizados hasta obtener un *n*-ésimo acierto y es una variable aleatoria que tiene una distribución binominal con los parámetros: *k*, que es el número de ensayos asertivos donde acaba el experimento y *θ*, que es la probabilidad de acierto en un experimento.

Su fórmula es:

$$b^*(x, k, \theta) = \binom{x-1}{k-1} \theta^k (1-\theta)^{x-k}$$

Donde:

$$\binom{x-1}{k-1} = \frac{(x-1)!}{(k-1)(x-k)!}$$

Ejemplo: si la probabilidad de que una persona sea aceptada para trabajar en una oficina es de 40%, ¿cuál es la probabilidad de que el décimo postulante sea el tercero que la empresa contrate?

Solución: este ejemplo se resuelve por distribución binominal negativa, ya que se requieren varios experimentos; para este ejemplo existen 10 elementos, donde existe un número de eventos asertivos, que son 3 y se quiere conocer la probabilidad de que en un experimento, en este caso, el décimo, el tercer postulante sea seleccionado; entonces los datos de la fórmula son: *x* = 10, que es el número de personas postuladas al empleo; *k* = 3, que es el número de ensayos asertivos, en los que, en este caso, acaba el experimento, y θ = 0.40, que es la probabilidad de acierto de un solo experimento.

Sustituyendo:

$$b^*(10{,}3{,}0.40) = \binom{10-1}{3-1} 0.40^3 (1-0.40)^{10-3}$$
$$= \binom{9}{2} * 0.064 * (0.60)^7$$

$$= \frac{(10-1)!}{(3-1)(10-3)!} * 0.064 * 0.0279936$$

$$= \frac{9!}{2*7!} * 0.064 * 0.0279936$$

$$= \frac{362880}{2*5040} * 0.064 * 0.0279936$$

$$= 36 * 0.064 * 0.0279936$$

$$= 0.0644 * 100$$

Respuesta: la probabilidad de que el décimo postulante sea el tercero que la empresa contrate es de 6.44%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Si la probabilidad de que sacar un premio de una rifa es de 97%, ¿cuál es la probabilidad de que el tercer concursante sea el primer ganador?

2. La probabilidad de un matrimonio en tener un hijo de ojos claros es de 43%, ¿cuál es la probabilidad que de cuatro hijos el segundo tenga ojos claros?

3. Se lanza una moneda al aire 7 veces, de tal manera que la probabilidad de que salga águila es 2/3 y de que salga sol es 1/3, ¿cuál es la probabilidad que en el último lanzamiento salga sol?

2.2.3 Distribución hipergeométrica

La distribución hipergeométrica se emplea cuando se realizan experimentos con muestras grandes, en relación con el tamaño de la población. Ésta permite calcular las probabilidades en aquellos casos que no son constantes, es decir, cuando no existe un reemplazo, a diferencia de las anteriores distribuciones que se hablaba de acierto o fracaso y se manejaban de forma implícita reemplazos; sin embargo, cuando se tienen poblaciones muy pequeñas se complica realizar un reemplazo y es necesario apoyarse en este tipo de distribución.

En los experimentos que son sujetos a ocupar la distribución hipergeométrica:

1. Se espera tener dos tipos de resultados.
2. Las probabilidades asociadas no son constantes.
3. Los experimentos son dependientes entre sí.
4. El número de repeticiones es constante.

Su fórmula es:

$$P(x) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

Y para poder realizar el cálculo, la forma anterior se expresa:

$$P(x = k) = \frac{\left|\begin{matrix} N1 \\ k \end{matrix}\right| * \left|\begin{matrix} N2 \\ n-k \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} N \\ n \end{matrix}\right|}$$

Donde:

$$\left|\begin{matrix} N1 \\ k \end{matrix}\right| = \frac{N1!}{k! * (N1 - k)!}$$

$$\left|\begin{matrix} N2 \\ k \end{matrix}\right| = \frac{N2!}{(n - k)! * (N2 - (n - k))!}$$

$$\left|\begin{matrix} N \\ n \end{matrix}\right| = \frac{N!}{n! * (N - n)!}$$

Ejemplo: en una empresa hay 7 hombres y 5 mujeres, y se escogen 4 personas para una comisión en el extranjero, ¿cuál es la probabilidad que 3 sean hombres?

Solución: este ejemplo se resuelve por distribución hipergeométrica, ya que los ensayos son dependientes al ir eligiendo a cada persona, además de que no hay dos posibles resultados (acierto y fracaso), porque en la pregunta de probabilidad se determina que de las cuatro personas que se elijan, tres sean hombres; entonces los datos de la fórmula son: $N = 12$, que es el número total de elementos (personas); $N_1 = 7$, que corresponde al primer grupo de 7 hombres; $N_2 = 5$, que corresponde al segundo grupo de 5 mujeres; $k = 3$, que es la probabilidad, de acuerdo con lo que se requiere, y $n = 4$, que es el número de ensayos que se realizan.

Sustituyendo:

$$P(x = 3) = \frac{\left|\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix}\right| * \left|\begin{matrix} 5 \\ 4-3 \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} 12 \\ 4 \end{matrix}\right|}$$

Para:

$$\left|\begin{matrix}7\\3\end{matrix}\right| = \frac{7!}{3! * (7-3)!}$$

$$= \frac{5040}{144}$$

$$= 35$$

Ahora:

$$\left|\begin{matrix}5\\4-3\end{matrix}\right| = \frac{5!}{(4-3)! * (5-(4-3))!}$$

$$= \left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right| = \frac{5!}{1! * (5-1)!}$$

$$= \left|\begin{matrix}5\\1\end{matrix}\right| = \frac{5!}{1!\,4!}$$

$$= \frac{120}{24}$$

$$= 5$$

Después:

$$\left|\begin{matrix}12\\4\end{matrix}\right| = \frac{12!}{4! * (12-4)!}$$

$$= \frac{12!}{4! * 8!}$$

$$= \frac{479001600}{967680}$$

$$= 495$$

Y finalmente:

$$P(x = 3) = \frac{35 * 5}{495}$$

$$= \frac{175}{495}$$

$$= 0.3535 \ * 100$$

Respuesta: la probabilidad de que de las cuatro personas seleccionadas, tres sean hombres es de 35.35%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. En una tómbola hay un total de 29 bolitas, 10 de las cuales son blancas, si se seleccionan cinco al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tres sean negras?
2. ¿Cuál es la probabilidad que un tendero se rehúse a vender únicamente a 10 menores de edad licor si verifica aleatoriamente 7 identificaciones de 15, de las cuales cinco indican que sus portadores no tienen la edad suficiente?

2.2.4 Distribución de Poisson

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que se emplea cuando ocurre un evento en un periodo de tiempo que no es constante. Expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media, la probabilidad de que que ocurra un determinado número de eventos durante cierto periodo de tiempo.

Consiste en que *A* sea un segmento de recta de longitud *a*, y *b* un segmento de longitud *B* contenido en *A*, entonces la probabilidad de que un punto $x \in A$, también pertenezca a *B*, independientemente de la posición de *B* dentro de *A*, es $\frac{b}{a}$; por tanto, la probabilidad de acierto depende de si en *n* puntos distribuidos aleatoriamente sobre *A*, la probabilidad de *r* sea menor o igual de *n*, y estos pertenezcan a *B*, independientemente de si la posición de *B* dentro de *A*, se distribuye. Su fórmula es:

$$P(x;\lambda) = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^x}{x!}\ para\ x = 0, 1, 2, 3$$

Donde:

$$n = \infty, cuando\ n\ es\ muy\ grande\ y\ \theta = 0$$

Y:

$$n\theta\ es\ constante\ por\ lo\ que: n\theta = \lambda$$

$$\theta\ = \frac{\lambda}{n};\ es\ la\ probabilidad\ de\ acierto$$

Ejemplo: si la probabilidad de que un niño sea hiperactivo es de 0.5%, ¿cuál es la probabilidad de que entre 3,000 niños haya 18 hiperactivos?

Solución: este ejemplo se resuelve por distribución de Poisson ya que el tiempo en que puede manifestarse un niño hiperactivo no es constante; entonces los datos de la fórmula son: n = 3000, que es el número total de mi población en niños; θ = 0.005, que es la probabilidad de acierto que exista un niño hiperactivo; λ = 15 ($n\theta = \lambda$), y x = 18, que es el número de aciertos de probabilidad que se está calculando.

Sustituyendo:

$$P(18; 15) = e^{-15} * \frac{15^{18}}{18!}$$

$$= 3.059023205^{-07} * \frac{1.47789188^{21}}{6.402373706^{15}}$$

$$= 3.059023205^{-07} * 230834.9915$$

$$= 0.0706 * 100$$

Respuesta: la probabilidad de que 18 niños de 3,000 sean hiperactivos es de 7.06%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Si la probabilidad de que una persona deportista sufra un infarto es de 0.001%, calcular la probabilidad de que un total de 2,500 deportistas sufran un episodio de este tipo.
2. Si la probabilidad de que un mexicano tenga un empleo bien remunerado es de 3%, ¿cuál es la probabilidad de que de 1,200 mexicanos, 500 obtengan una buena remuneración?

2.3 Distribuciones continuas

Antes de hablar de una distribución continua, es importante recordar que la variable continua es aquella que no posee interrupciones o saltos, es decir, su valor se encuentra dentro de un intervalo especificado de valores asumidos por la variable (ejemplos de variables continuas pueden ser el peso, la estatura o la temperatura). Por tanto, entre dos valores cualesquiera asumidos por la variable continua (intervalo), existe un número infinito de valores; con la variable aleatoria continua es posible saber cuál es la probabilidad de tener un resultado dentro de un intervalo y no fuera de él.

Entonces, las distribuciones continuas son una forma de presentar distribuciones discretas que tienen muchos posibles resultados cercanos entre sí; algunos ejemplos de distribuciones continuas son la uniforme y la exponencial, las cuales serán estudiadas en los siguientes apartados.

2.3.1 Distribución uniforme

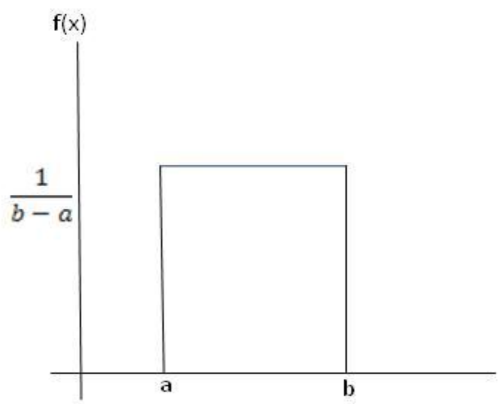
La distribución uniforme es una distribución de probabilidad que se caracteriza porque los valores tienen la misma probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1, si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0, para\ todos\ los\ valores \end{cases}$$

Esta función se denomina de densidad uniforme sobre $[0, 1]$, donde *x* tiene una distribución uniforme ya que la gráfica de densidad es horizontal sobre $[0, 1]$, por lo que es probable que *x* tome un valor en el subintervalo de $[0, 1]$, como en otro de igual longitud.

Se representa de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & ; si\ a \leq x \leq b \\ 0, para\ otros\ valores & \end{cases}$$



En esta gráfica $[a, b]$, la región bajo la gráfica es un rectángulo con la altura $\frac{1}{b-a}$ y ancho *b* – *a*; el área está dada por $\left[\frac{1}{b-a}\right][b-a]$ = 1; entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, si $[c, d]$, es cualquier intervalo dentro de $[a, b]$ entonces:

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{1}{b-a}dx$$

$$= \frac{x}{b-a}|_c^d = \frac{d-c}{b-a}$$

Ejemplo: suponiendo que *x* está uniforme distribuida en $[2,7]$ y se requiere encontrar $P(4 < X < 5)$. Los valores son: *a* = 2, *b* = 7, *c* = 4, y *d* = 5.

Sustituyendo:

$$P(4 < X < 5) = \frac{5-4}{7-2} = \frac{1}{5} = 0.20 \ * 100$$

Respuesta: la probabilidad de que *x* tome valor entre 4 y 5 en un intervalo de $[2,7]$ es de 20%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Calcular las siguientes probabilidades de distribución uniforme:

1. Suponiendo que *x* está uniformemente distribuida en $[1,3]$ y se requiere encontrar $P(6 < X < 7)$.

2. Suponiendo que *x* está uniformemente distribuida en $[8,9]$ y se requiere encontrar $P(1 < X < 2)$.

2.3.2 Distribución exponencial

La distribución exponencial permite conocer el tiempo en que ocurre un primer evento después de cualquier punto aleatorio que ha sido seleccionado.

Se define de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx}, si\ x \geq 0 \\ 0, si\ x < 0 \end{cases}$$

Donde *k*, es un parámetro que es una constante positiva y su valor depende del experimento. Si *x* es una variable aleatoria entonces es una distribución exponencial, siendo k = 1, entonces, $f(x) = e^{-x}$ para $x \geq 0$, y $f(x) = 0$, para $x<0$.

Ejemplo: se requiere encontrar $P(2 < X < 3)$:

$$P(2 < X < 3) = \int_2^3 e^{-x}\, dx$$

$$= -e^{-x}|_2^3$$

$$-e^{-3} - (-e^{-2})$$

$$e^{-2} - e^{-3} \approx 0.086$$

Respuesta: la probabilidad de que x tome valor un entre 2 y 3 en un es de 8.6%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

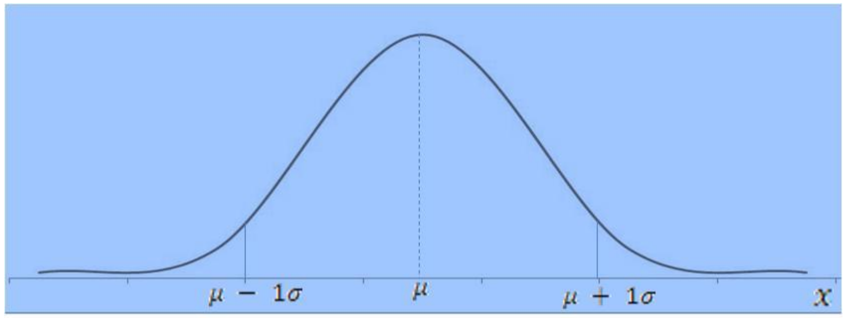
Resolver los siguientes ejercicios:

1. Encontrar $P(0 < X < 1)$.
2. Encontrar $P(\frac{2}{4} < X < 4)$.
3. Encontrar $P(3 < X < 3.3)$.

2.4 Distribución normal

La distribución normal es una de las distribuciones de probabilidad para variables aleatorias continuas que aparece con mayor frecuencia en sucesos reales, es decir, variables asociadas con fenómenos naturales o acontecimientos existentes. En resumen, es útil para calcular la probabilidad de ocurrencia de distintos sucesos, intervalos y cantidades específicas.

También es conocida como distribución de Gauss o gaussiana porque Carl Friedrich Gauss profundizó en su estudio y formuló la ecuación de la curva conocida como la campana de Gauss; esta curva se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda sin llegar a tocar el eje *x* (eje horizontal), es decir, es asíntota.



$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

Esta curva, es la gráfica más importante de todas las funciones de densidad, en donde los dos parámetros de la distribución μ y σ son la media y la desviación estándar de *x*.

La desviación estándar determina el grado de apuntamiento de la curva. Cuanto mayor sea el valor de desviación estándar, más se dispersarán los datos en torno a la media y la curva será más plana.

La media nos indica la posición de la campana, de tal manera que para diferentes valores de μ, la gráfica es desplazada a lo largo del eje horizontal.

"Esta distribución nos da la probabilidad de que al elegir un valor, éste tenga una medida contenida en unos intervalos definidos, esto permitirá predecir de forma aproximada, el comportamiento futuro de un proceso, conociendo los datos del presente."[3]

Los siguientes puntos son las propiedades más importantes de la distribución normal:

1. El área bajo la curva es igual a uno.

[3] http://www.tuveras.com/estadistica/normal/normal.htm

2. La curva es simétrica respecto a su media, los valores se distribuyen de manera geométrica.
3. La media, la mediana y la moda son iguales, es decir, es unimodal.
4. La distancia horizontal que hay de la media hasta donde la curva se hace cóncava hacia arriba, se llama desviación estándar atípica.
5. La distribución normal es una familia de distribuciones, ya que tienen el mismo grado de la desviación estándar pero su media es distinta.
6. *X* puede tomar el valor de todos los números reales $-\infty < x < +\infty$.
7. La manera que se dan los valores de *X* respecto a su media.

A fin de reducir la escala, la distribución normal se estandariza, es decir, se reducen los datos que se utilizan para su cálculo, esto también es conocido como distribución normal estándar y para calcularla se utiliza la tabla indicada para dicha distribución, donde las variables distribuidas normalmente se pueden transformar utilizando la siguiente fórmula:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

Dónde $\bar{x}$ representa la media muestral, μ expresa la media poblacional, y σ la desviación estándar. Y es una distribución normal a la que le corresponde una distribución de media 0 y varianza 1.

2.4.1 Uso de la distribución normal en el cálculo de posibilidades

En la sección anterior se explicó la distribución normal, una vez partiendo de la teoría, en esta sección se desarrollarán ejercicios para el cálculo de posibilidades apoyándonos en ella.

La siguiente tabla de distribución normal sirve de apoyo para realizar los cálculos mencionados, ya que proporciona el área de bajo de la curva conforme el valor de *Z*:

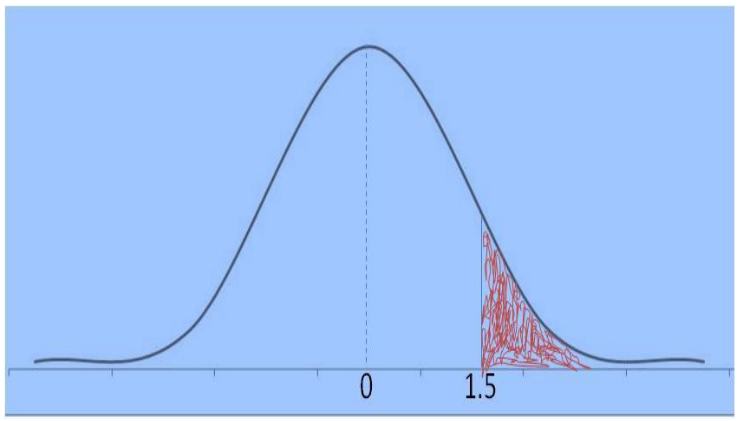
Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0	0.004	0.008	0.012	0.016	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.091	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.148	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.17	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.195	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.219	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.258	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.291	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.334	0.3365	0.3389
1	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.377	0.379	0.381	0.383
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.398	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.437	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.475	0.4756	0.4761	0.4767
2	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.483	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.485	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.489
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.492	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.494	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.496	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.497	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.498	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.499	0.499

Ejemplo 1: encontrar $P(Z > 1.5)$.

Solución: esta probabilidad es el área a la derecha de z = 1.5, y su valor en tabla es 0.4332; por tanto el área es igual a la diferencia entre el área total a la derecha de z = 0, que es 0.5.

$$P(Z > 1.5) = 0.5 - 0.4332$$

$$P(Z > 1.5) = 0.0668$$

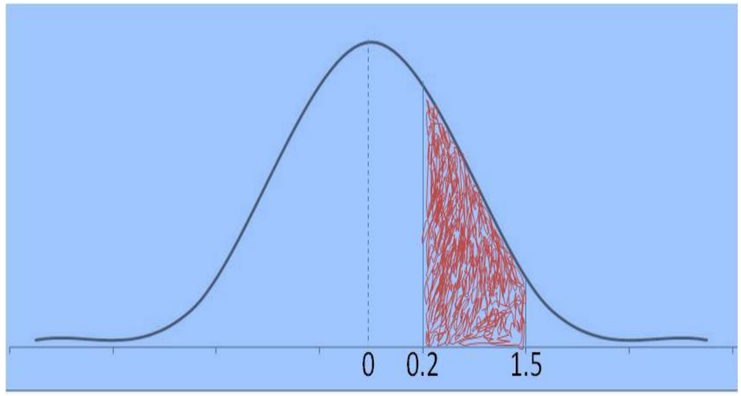


Ejemplo 2: encontrar $P(0.2 < Z < 1.5)$.

Solución: esta probabilidad es el área entre 0.2 y 1.5, cuyos valores en tabla son 0.0793, y 0.4332, respectivamente; entonces el área es la diferencia de dos áreas.

$$P(0.2 < Z < 1.5) = 0.4332 - 0.0793$$

$$P(0.2 < Z < 1.5) = 0.3539$$



Ejemplo 3: se supone que la media del salario diario es de \$100 en una empresa, con una desviación estándar de \$25. Si un trabajador es seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad que tenga un salario diario por debajo de \$150?

Los datos de la fórmula son: $\bar{x} = 150$, $\mu = 100$ y $\sigma = 25$.

Sustituyendo:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{150 - 100}{25}$$

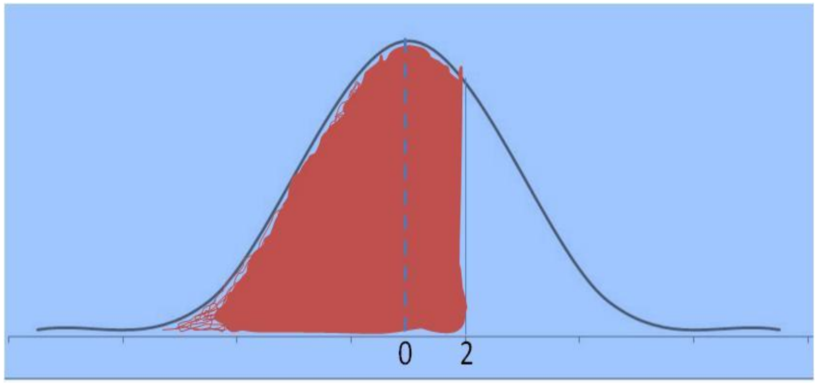
$$Z = 2$$

$$El\ valor\ en\ tablas\ de\ Z = 2, es\ 0.4772$$

Esta probabilidad es el área a la izquierda de z = 2, y su valor en tabla es 0.4772; por tanto, el área es igual a la suma entre el área total a la derecha de z = 0, que es 0.5, entonces:

$$P(Z < 2) = 0.5 + 0.4772$$

$$P(Z < 1.5) = 0.9772$$



Respuesta: la probabilidad de que el trabajador extraído al azar obtenga un salario por debajo de 150 diarios es de 97.77%.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Resolver los siguientes ejercicios:

1. Encontrar $P(3 < Z < 5.5)$.

2. Encontrar $P(3 < Z)$.

3. Encontrar $P(Z < 5.5)$.

4. Un pedagogo observa que las calificaciones del examen aplicado a sus alumnos están distribuidas de una forma aproximadamente normal con una media de 9 y una desviación estándar de 1.8. Si un alumno seleccionado al azar realiza el examen ¿cuál es la probabilidad de que saque una calificación menor a 8?

2.4.2 Distribuciones relacionadas con la distribución normal

Las distribuciones más importantes que están relacionadas con la distribución normal son:

1. *t*-Student
2. *F*-Fischer
3. *Chi*-cuadrada (*ji*-cuadrada)

A continuación se explicará cada una de ellas.

Distribución t-*Student*

El creador de la distribución de *t*-Student fue W. S. Gosset. Esta distribución está altamente relacionada con la distribución normal; la diferencia radica en que cuando tenemos muestras pequeñas y resulta complicado construir un intervalo de confianza, la *t*-Student ayuda a conocer la desviación estándar de la población y el tamaño de la muestra cuando éste es relativamente pequeño.

La distribución de *t*-Student se abrevia con la letra *t* y se calcula de la siguiente manera:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Las propiedades de la *t*-Student son las siguientes:

1. Tiene una media de 0.
2. Es simétrica en torno a la media.
3. En general tiene varianza mayor de 1, pero ésta tiende a 1 en la medida que aumenta el tamaño de la muestra.
4. El valor de *t* va de $-\infty$ a ∞.
5. La distribución es una familia de distribuciones, ya que se tiene un valor distinto para cada valor muestral.
6. Comparada con la distribución normal, es menos puntiaguda en el centro y tiene colas más altas.

7. En la medida que su grado de libertad se aproxima al infinito, se acerca a la distribución normal (los grados de libertad se refieren a las observaciones cuando se calcula una suma de diferencia).

Ejemplo: un gerente de banco desea medir el rendimiento de las cuentas del ahorro para el retiro. El rendimiento medio de las cuentas de forma mensual es de 500 pesos. Para verificar esta afirmación toma una muestra de 25 cuentas. Si con el valor de *t* calculado entre $-t_{0.05}$ y $t_{0.05}$ con 28 grados de libertad, queda satisfecha dicha afirmación, ¿qué conclusión extraería de una muestra que tiene una media de rendimiento de 518 pesos al mes con una desviación estándar de 40?

Solución: este ejemplo se resuelve por medio de la *t*-Student ya que la muestra para verificar es de 25 elementos, motivo por el cual de acuerdo con la estadística es una muestra pequeña aquella que se encuentra por debajo de 30 elementos.

Los datos de la fórmula son: $\bar{x} = 518$, media muestral; $\mu = 500$, media poblacional; *S* = 40, desviación estándar, y *n* = 25, elementos de la muestra.

Sustituyendo:

$$t = \frac{518 - 500}{40/\sqrt{25}}$$

$$= \frac{18}{8}$$

$$= 2.25$$

Ahora se buscan en la tabla de *t*-Student los grados de libertad y el valor de *t*:

Tabla de *t*-Student

∞ / n	0.300	0.250	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.003	0.001	0.001
1	0.727	1.000	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	127.321	318.309	636.619
2	0.617	0.817	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0.584	0.765	0.979	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0.569	0.741	0.941	1.533	2.132	2.777	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.559	0.727	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.553	0.718	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.549	0.711	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.500	4.029	4.785	5.408
8	0.546	0.706	0.889	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.544	0.703	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.542	0.700	0.879	1.372	1.813	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.540	0.697	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.539	0.696	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.538	0.694	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.373	3.852	4.221
14	0.537	0.692	0.868	1.345	1.761	2.145	2.625	2.977	3.326	3.787	4.141
15	0.536	0.691	0.866	1.341	1.753	2.132	2.603	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.535	0.690	0.865	1.337	1.746	2.120	2.584	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.534	0.689	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.534	0.688	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.533	0.688	0.861	1.328	1.729	2.093	2.540	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.533	0.687	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.533	0.686	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.532	0.686	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.532	0.685	0.858	1.320	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.531	0.685	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.531	0.684	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.531	0.684	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.531	0.684	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.530	0.683	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.530	0.683	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.530	0.683	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.529	0.681	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.705	2.971	3.307	3.551
80	0.527	0.678	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
120	0.526	0.677	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.374
∞	0.524	0.675	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Contiene los valores *t* tales que *p*[*T* > *t*] =α , donde *n* son los grados de libertad.

En esta tabla, la primera columna indica los grados de libertad, en este caso se busca el 24, en la fila se ubica el valor de $t_{0.05}$, el cual es 1.711; este valor de tablas permite decir que el gerente quedará satisfecho con la afirmación que planteó desde un principio de que la muestra de 25 cuentas rinde su valor entre −1.711 y 1.711.

Cuando se calculó el valor de *t*, dio como resultado 2.25 y comparándolo con el valor entre -1.711 a 1.711, se observa que se encuentra por arriba de éste.

Respuesta: el gerente de banco puede concluir que el rendimiento de las cuentas de ahorro es mayor de lo que pensaba.

Distribución F-*Fisher*

En algunas ocasiones se desea comparar dos varianzas y para hacerlo se debe formar una razón de σ_1^2/σ_2^2 , ya que se necesitan realizar cálculos con dos varianzas de dos muestras extraídas de la misma población o de diferentes poblaciones, pero no se conocen las varianzas de las poblaciones de interés y por tanto la comparación se basará en la varianza de las muestras, de manera que se utiliza la distribución de $(s_1^2/\sigma_1^2)/(s_2^2/\sigma_2^2)$, la cual debe satisfacer el cálculo de s_1^2 y s_2^2 a partir de muestras independientes de tamaños n_1 y n_2, extraídas de dos poblaciones con distribución normal. Es aquí donde se aplica la distribución *F*: en este caso se tendrían dos grados de libertad y expresados como $n_1 - 1$, que es el grado de libertad del numerador y $n_2 - 1$, que es el grado de libertad del denominador.

Entonces, para crear el intervalo de confianza:

$$\frac{s_1^2\ /s_2^2}{F_{(1-\propto/2)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{s_1^2\ /s_2^2}{F_{\propto/2}}$$

Ejemplo: un profesor tiene interés por conocer el nivel de variabilidad de aprendizaje que hay entre sus alumnos. El profesor tiene dos grupos, uno matutino y otro vespertino; del turno matutino extrae una muestra de 22 alumnos y del vespertino una de 15 alumnos, las varianzas son 1600 y 1225, respectivamente. ¿Cuál es el intervalo de confianza de 95% para comparar las dos varianzas de ambos turnos?

Solución: este ejemplo se resuelve por medio de distribución *F*-Fischer porque se quiere conocer la variabilidad de dos muestras.

Los datos de la fórmula son:

$$n_1 = 22;\ n_2 = 15$$

$$s_1^2 = 1600\ ;\ s_2^2 = 1225$$

$$grados\ de\ libertad\ del\ numerador = 21;\ ya\ que\ es\ 22 - 1$$

$$grados\ de\ libertad\ del\ denominador = 14;\ ya\ que\ es\ 15 - 1$$

$$\propto = 0.05;\ porque\ 1 - .95$$

$$F_{.025=}.395;\ es\ .025\ porque\ es\ \frac{1 - 0.05}{2}$$

$$F_{.975} = 2.84\ porque\ es\ \frac{0.05}{2}$$

Los valores de $F_{.975} = 2.84$ y $F_{.025=}.395$ se obtienen de la tabla de *F*-Fischer, en la que $\propto = 0.05$:

Observamos que v_1 son los valores del numerador y v_2 son valores del denominador, pero para este caso la columna del numerador no tiene el número 21 para los grados de libertad, entonces se toma el valor más cercano que es el 20 y se intercepta con el 14 que es el denominador y el valor encontrado es el 2.84 que corresponde al de $F_{.975}$.

Ahora, para obtener el otro valor de $F_{.025}$ se intercambian los grados de libertad del numerador y el denominador, y se toma el valor de 15, porque no tiene 14 en la fila del encabezado y se intercepta en la columna donde se encuentra el 21 y el valor obtenido es 2.53; por último, se toma el recíproco de este valor, es decir, $\frac{1}{2.53}$ = 0.395.

Tabla de *F*-Fisher

v1 / v2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	647.793	799.482	864.151	899.599	921.835	937.114	948.203	956.643	963.279	968.634	973.028	976.725	979.839	982.545	984.874	986.911	988.715	990.345	991.8	993.081
2	38.506	39	39.166	39.248	39.298	39.331	39.356	39.373	39.387	39.398	39.407	39.415	39.421	39.427	39.431	39.436	39.439	39.442	39.446	39.448
3	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.54	14.473	14.419	14.374	14.337	14.305	14.277	14.253	14.232	14.213	14.196	14.181	14.167
4	12.218	10.649	9.979	9.604	9.364	9.197	9.074	8.98	8.905	8.844	8.794	8.751	8.715	8.684	8.657	8.633	8.611	8.592	8.575	8.56
5	10.007	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.568	6.525	6.488	6.456	6.428	6.403	6.381	6.362	6.344	6.329
6	8.813	7.26	6.599	6.227	5.988	5.82	5.695	5.6	5.523	5.461	5.41	5.366	5.329	5.297	5.269	5.244	5.222	5.202	5.184	5.168
7	8.073	6.542	5.89	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761	4.709	4.666	4.628	4.596	4.568	4.543	4.521	4.501	4.483	4.467
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295	4.243	4.2	4.162	4.13	4.101	4.076	4.054	4.034	4.016	3.999
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.32	4.197	4.102	4.026	3.964	3.912	3.868	3.831	3.798	3.769	3.744	3.722	3.701	3.683	3.667
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.95	3.855	3.779	3.717	3.665	3.621	3.583	3.55	3.522	3.496	3.474	3.453	3.435	3.419
11	6.724	5.256	4.63	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526	3.474	3.43	3.392	3.359	3.33	3.304	3.282	3.261	3.243	3.226
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	3.321	3.277	3.239	3.206	3.177	3.152	3.129	3.108	3.09	3.073
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.25	3.197	3.153	3.115	3.082	3.053	3.027	3.004	2.983	2.965	2.948
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.38	3.285	3.209	3.147	3.095	3.05	3.012	2.979	2.949	2.923	2.9	2.879	2.861	2.844
15	6.2	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.06	3.008	2.963	2.925	2.891	2.862	2.836	2.813	2.792	2.773	2.756
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986	2.934	2.889	2.851	2.817	2.788	2.761	2.738	2.717	2.698	2.681
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922	2.87	2.825	2.786	2.753	2.723	2.697	2.673	2.652	2.633	2.616
18	5.978	4.56	3.954	3.608	3.382	3.221	3.1	3.005	2.929	2.866	2.814	2.769	2.73	2.696	2.667	2.64	2.617	2.596	2.576	2.559
19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	3.051	2.956	2.88	2.817	2.765	2.72	2.681	2.647	2.617	2.591	2.567	2.546	2.526	2.509
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.721	2.676	2.637	2.603	2.573	2.547	2.523	2.501	2.482	2.464
21	5.827	4.42	3.819	3.475	3.25	3.09	2.969	2.874	2.798	2.735	2.682	2.637	2.598	2.564	2.534	2.507	2.483	2.462	2.442	2.425
22	5.786	4.383	3.783	3.44	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.7	2.647	2.602	2.563	2.528	2.498	2.472	2.448	2.426	2.407	2.389
23	5.75	4.349	3.75	3.408	3.183	3.023	2.902	2.808	2.731	2.668	2.615	2.57	2.531	2.497	2.466	2.44	2.416	2.394	2.374	2.357
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.874	2.779	2.703	2.64	2.586	2.541	2.502	2.468	2.437	2.411	2.386	2.365	2.345	2.327
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.56	2.515	2.476	2.441	2.411	2.384	2.36	2.338	2.318	2.3
26	5.659	4.265	3.67	3.329	3.105	2.945	2.824	2.729	2.653	2.59	2.536	2.491	2.452	2.417	2.387	2.36	2.335	2.314	2.294	2.276
27	5.633	4.242	3.647	3.307	3.083	2.923	2.802	2.707	2.631	2.568	2.514	2.469	2.429	2.395	2.364	2.337	2.313	2.291	2.271	2.253
28	5.61	4.221	3.626	3.286	3.063	2.903	2.782	2.687	2.611	2.547	2.494	2.448	2.409	2.374	2.344	2.317	2.292	2.27	2.251	2.232
29	5.588	4.201	3.607	3.267	3.044	2.884	2.763	2.669	2.592	2.529	2.475	2.43	2.39	2.355	2.325	2.298	2.273	2.251	2.231	2.213
30	5.568	4.182	3.589	3.25	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.458	2.412	2.372	2.338	2.307	2.28	2.255	2.233	2.213	2.195
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.334	2.288	2.248	2.213	2.182	2.154	2.129	2.107	2.086	2.068
50	5.34	3.975	3.39	3.054	2.833	2.674	2.553	2.458	2.381	2.317	2.263	2.216	2.176	2.14	2.109	2.081	2.056	2.033	2.012	1.993
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.27	2.216	2.169	2.129	2.093	2.061	2.033	2.008	1.985	1.964	1.944
70	5.247	3.89	3.309	2.975	2.754	2.595	2.474	2.379	2.302	2.237	2.183	2.136	2.095	2.059	2.028	1.999	1.974	1.95	1.929	1.91
80	5.218	3.864	3.284	2.95	2.73	2.571	2.45	2.355	2.277	2.213	2.158	2.111	2.071	2.035	2.003	1.974	1.948	1.925	1.904	1.884
90	5.196	3.844	3.265	2.932	2.711	2.552	2.432	2.336	2.259	2.194	2.14	2.092	2.051	2.015	1.983	1.955	1.929	1.905	1.884	1.864
100	5.179	3.828	3.25	2.917	2.696	2.537	2.417	2.321	2.244	2.179	2.124	2.077	2.036	2	1.968	1.939	1.913	1.89	1.868	1.849
200	5.1	3.758	3.182	2.85	2.63	2.472	2.351	2.256	2.178	2.113	2.058	2.01	1.969	1.932	1.9	1.87	1.844	1.82	1.798	1.778

500	5.054	3.716	3.142	2.811	2.592	2.434	2.313	2.217	2.139	2.074	2.019	1.971	1.929	1.892	1.859	1.83	1.803	1.779	1.757	1.736
1000	5.039	3.703	3.129	2.799	2.579	2.421	2.3	2.204	2.126	2.061	2.006	1.958	1.916	1.879	1.846	1.816	1.789	1.765	1.743	1.722

$1 - \alpha = 0.975$ V_1 = grados de libertad del numerador.

$1 - \alpha = P(F £ f_{\alpha, n1, n2})$ V_2 = grados de libertad del denominador.

Sustituyendo:

$$\frac{1600\ /1225}{2.84} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{1600/1225}{.395}$$

$$.460 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 3.31$$

Respuesta: el intervalo de variación en los dos grupos es de 0.460 a 3.31.

Chi-*cuadrada* χ^2 (*ji*-cuadrada j^2)

La distribución *chi*-cuadrada se emplea cuando se extraen muestras de tamaño *n* de una población de distribución y se tiene interés en la varianza poblacional en lugar de la proporción de las medias poblacionales, ya que esta distribución determina la significancia de la diferencia de las frecuencias observadas.

La varianza de la muestra y la varianza de la población se determinan por medio de *chi*-cuadrada con *n* - 1 grados de libertad, con la condición de que la población de la cual se extraen los datos tenga una distribución normal.

Para determinar el intervalo de confianza de *chi*-cuadrada se utiliza la siguiente expresión:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} > \sigma^2 > \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}$$

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} > \sigma > \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}}$$

Se utilizará como referencia una parte del ejemplo anterior, cuando se estudio el desarrollo de la *F*-Fischer, pero únicamente considerando la variabilidad de aprendizaje del turno vespertino:

Solución: se resuelve por de *chi*-cuadrada porque se quiere conocer la variabilidad de una muestra.

Los datos de la fórmula son:

$$n = 15$$

$$s^2 = 1225$$

$$grados\ de\ libertad\ del\ denominador = 14;\ ya\ que\ es\ 15 - 1$$

$$\propto = 0.05;\ porque\ 1 - .95$$

$$\chi^2{}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=} 26.119;\ porque\ se\ busca\ en\ tabla\ de\ \chi^2\ 0.975$$

$$ya\ que\ se\ obtuvo\ el\ valor\ anterior\ de\ 1 - \frac{0.05}{2}$$

$$\chi^2{}_{\alpha/2} = 5.629\ porque\ se\ busca\ en\ tabla\ de\ \chi^2\ 0.025$$

$$ya\ que\ se\ obtuvo\ el\ valor\ anterior\ de\ \frac{0.05}{2}$$

Los valores de $\chi^2{}_{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=} 26.119$ y $\chi^2{}_{\alpha/2} = 5.629$ se obtienen de la tabla de χ^2 (*chi*-cuadrada) con 14 grados de libertad en 0.975 y 0.025, respectivamente.

Sustituyendo:

$$\frac{(14)(1225)}{26.119} > \sigma^2 > \frac{14(225)}{5.629}$$

$$656.6101 > \sigma^2 > 3046.7223$$

$$\sqrt{656.6101} > \sigma > \sqrt{3046.7223}$$

$$25.62 > \sigma > 55.20$$

Respuesta: el intervalo de variación del grupo vespertino es de 25.62 a 55.20.

Tabla de *Chi*-cuadrada

v	0.005	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.00003935	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290

27	11.808	12.878	14.573	16.151	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.994
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.335
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Elaborar un cuadro comparativo de las distribuciones relacionadas con la distribución normal.

AUTOEVALUACIÓN

4. Relacionar las siguientes columnas:

1. Se caracteriza por tener saltos o interrupciones en los valores. ( ) 2. La media se conoce con el nombre de: ( ) 3. Es una función mediante la cual a cada uno de los eventos del espacio muestral se les hace corresponder un número dentro de los números reales por medio de una ley de correspondencia. ( ) 4. No posee saltos ni interrupciones; puede tener cualquier valor dentro de un intervalo. ( ) 5. La varianza se conoce también con el nombre de: ( )	*a)* Variable aleatoria discreta. *b)* Primer momento alrededor de la media. *c)* Variable aleatoria. *d)* Segundo momento alrededor de la media. *e)* Variable aleatoria continua.

2. Subrayar la respuesta que corresponda con la afirmación:

a) La binominal es del tipo de:
- distribución variable discreta
- distribución variable continua

b) La geométrica es del tipo de:
- distribución variable discreta
- distribución variable continua

c) La Poisson es del tipo de:
- distribución variable discreta
- distribución variable continua

d) La exponencial es del tipo de:

- distribución variable discreta
- distribución variable continua

e) La uniforme es del tipo de:

- distribución variable discreta
- distribución variable continua

3. En las siguientes afirmaciones o definiciones, indicar la palabra que falta:

a) La distribución ____________________________ se emplea cuando se extraen muestras de tamaño *n* de una población de distribución y se tiene interés en la varianza poblacional en lugar de la proporción de las medias poblacionales.

b) La distribución________________________ posee ciertas características como por ejemplo, que es unimodal, el área de bajo de la curva es 1 y es una familia de distribuciones, por mencionar algunas.

c) La distribución ___________________________ es del tipo continua y se caracteriza porque sus valores tienen la misma probabilidad.

d) La distribución ___________________________ también es conocida como distribución de Pascal.

e) La distribución ___________________________ hace referencia a un solo ensayo de algún experimento que tiene dos posibles resultados (acierto o fracaso).

Respuestas

1.

1. *a)*
2. *b)*
3. *c)*
4. *e)*
5. *d)*

2.

a) distribución variable discreta

b) distribución variable discreta

c) distribución variable discreta

d) distribución variable continua

e) distribución variable continua

3.

a) chi-cuadrada

b) normal

c) uniforme

d) binominal negativa

e) Bernoulli