Geometría analítica

JAVIER ORDUÑA FLORES

Red Tercer Milenio

GEOMETRÍA ANALÍTICA

GEOMETRÍA ANALÍTICA

JAVIER ORDUÑA FLORES

RED TERCER MILENIO

AVISO LEGAL

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Datos para catalogación bibliográfica

Javier Orduña Flores

Geometría analítica

ISBN 978-607-733-037-0

Primera edición: 2012

DIRECTORIO

ÍNDICE

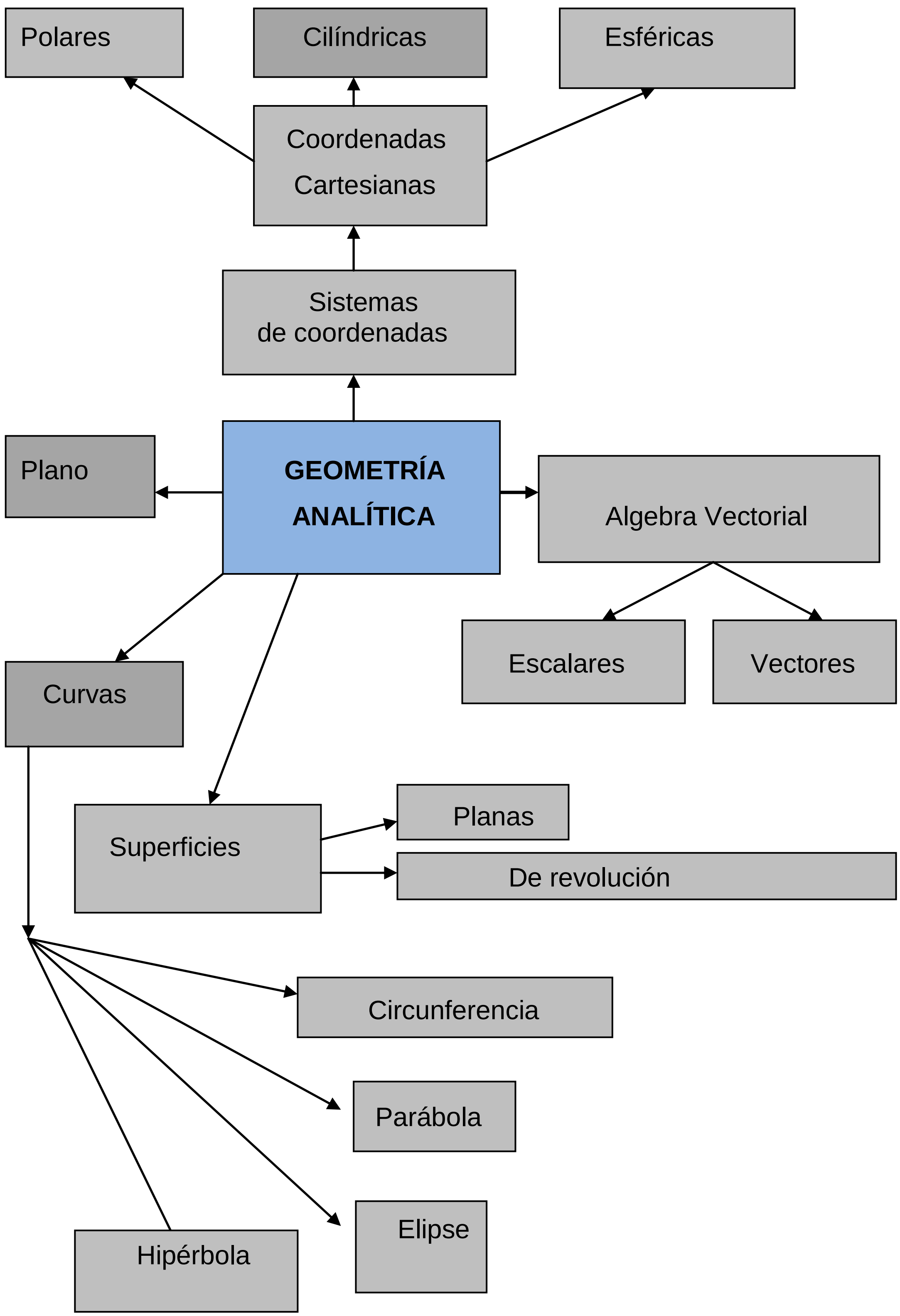
INTRODUCCIÓN

Muchos de los cálculos y diseños realizados en la industria de la construcción, fundamentan su teoría en la geometría y la trigonometría; obedeciendo a la forma de las figuras, a la simetría y, por supuesto, a la obtención de superficies y volúmenes.

Este libro pretende brindar al estudiante de arquitectura fundamentos sólidos que le faciliten la mejor comprensión de la materia con base en los objetivos y actividades del programa académico de estudio.

El estudio de funciones cartesianas, gráficas, sistemas de coordenadas, álgebra vectorial, rectas y curvas, son parte de la formación integral del alumno; el dominio de las llamadas ciencias básicas constituye una plataforma rígida y segura sobre la cual se erige el conocimiento de materias subsecuentes e indispensables para la trayectoria estudiantil del futuro profesionista.

MAPA CONCEPTUAL



UNIDAD 1

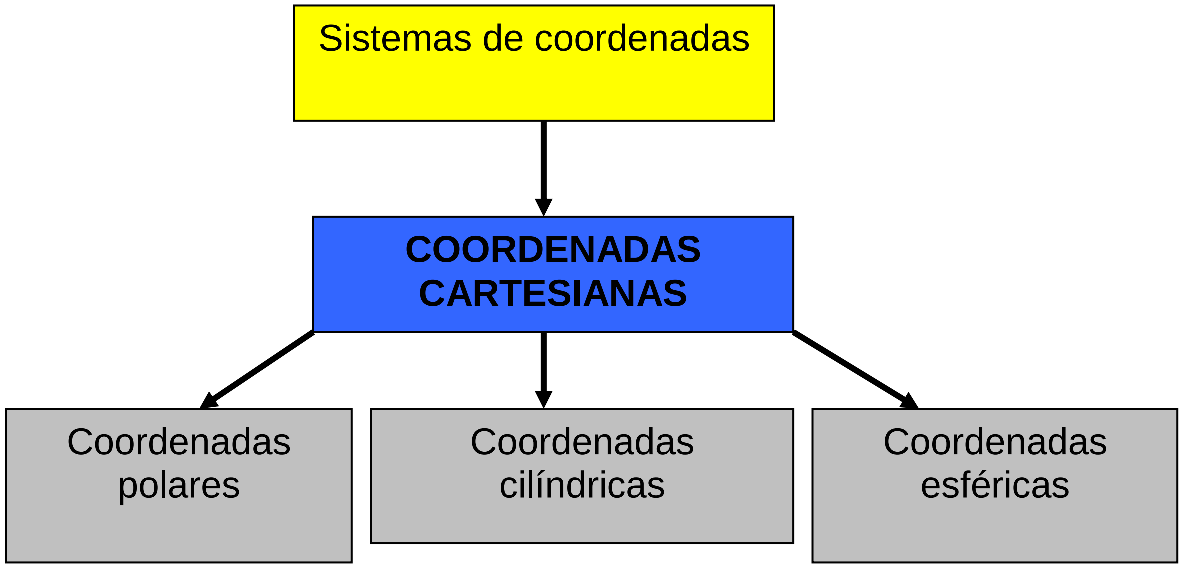
SISTEMAS DE COORDENADAS

OBJETIVO

Analizar geométricamente las coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas; así como las fórmulas de transformación equivalentes entre ellas.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



1.1 SISTEMAS DE COORDENADAS

Desde el punto de vista de la geometría analítica, un sistema de coordenadas es uno de referencia, cuyos ejes permiten ubicar puntos o vectores en el plano o el espacio. Para la mecánica, un sistema de coordenadas corresponde a un marco de referencia inercial, en virtud del cual podrán establecerse las principales condiciones de equilibrio estático.

Ejes coordenados
- Plano (X, Y)
- Espacio (X, Y, Z)

Los sistemas coordenados requieren de magnitudes escalares (simples números) o bien, de magnitudes vectoriales (magnitudes que poseen dirección y sentido), según el problema matemático que se analice.

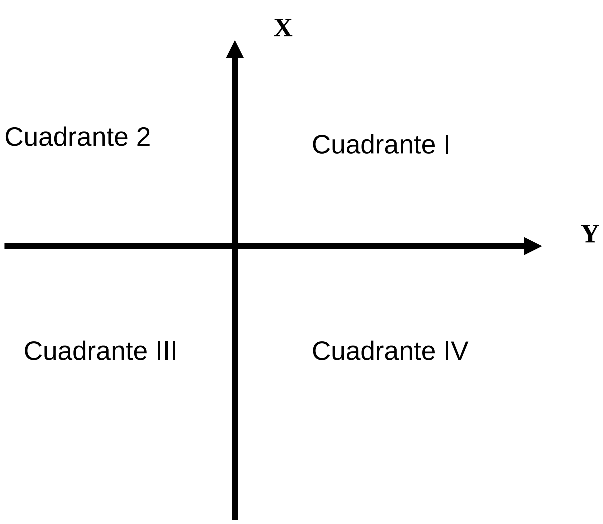


Figura 1. Plano cartesiano

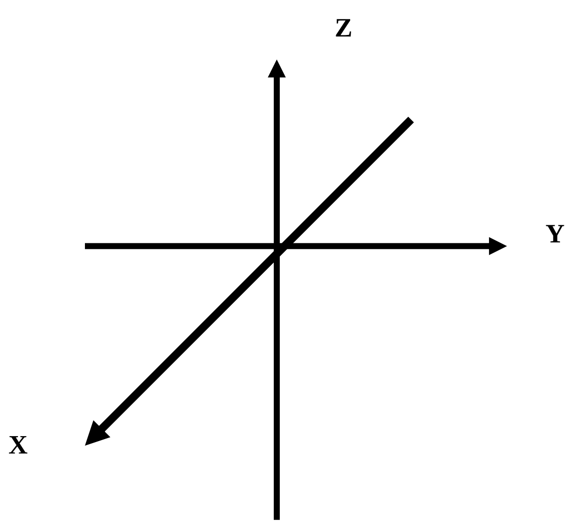
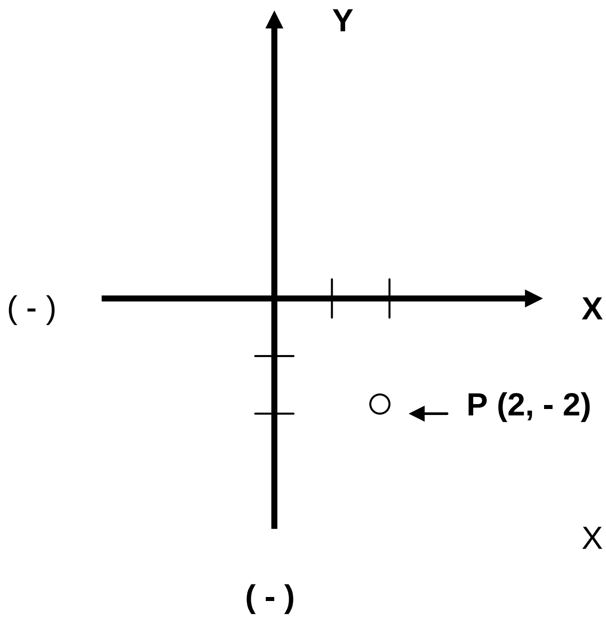


Figura 2. Espacio

El eje *X* recibe el nombre de abscisa, el eje *X* corresponde a la ordenada, y el eje *Z* muy frecuentemente recibe el nombre de cota.

Ubicación de puntos en el plano y el espacio



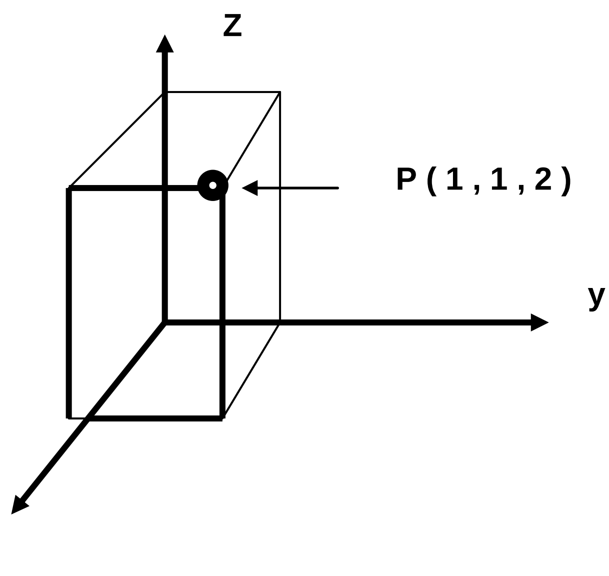
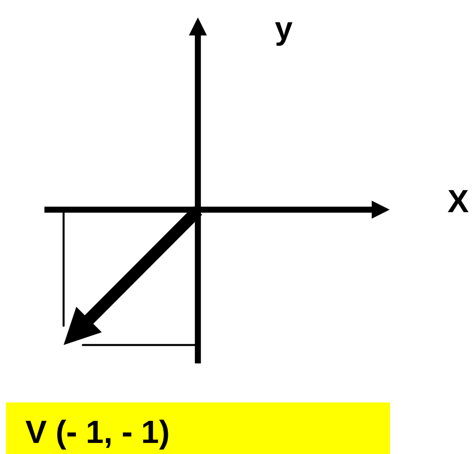


Figura 3. Punto en el plano. *Figura* 4. Punto en el espacio.

Ubicación de vectores en el plano y el espacio



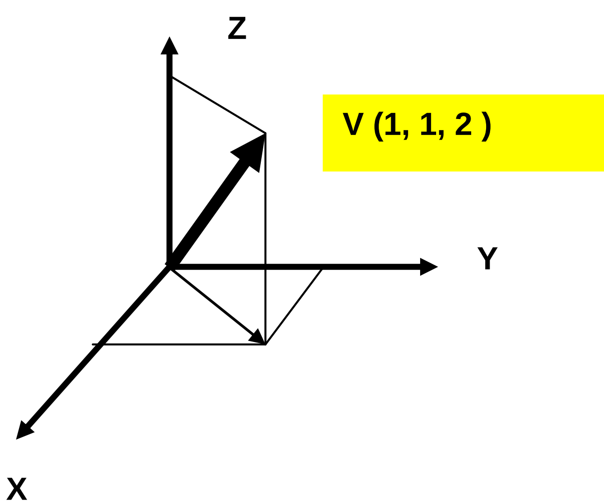


Figura 6. Vector en el plano. *Figura 7*. Vector en el espacio.

Se dice que una figura es simétrica cuando corta sobre ella una línea recta que la divide en partes iguales (magnitudes iguales); el plano cartesiano permite ubicar puntos y vectores en diferentes cuadrantes, que por su ubicación cumplen precisamente con la definición de simetría. Tal como se muestra a continuación:

El plano permite ubicar funciones específicas que pueden analizarse en todo su recorrido, tal como se muestra a continuación:

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 1. Analizar la función *F* (x) = x + 1; $-3 \leq X \leq 3$; obteniendo:

a) Los valores aceptados para *f* (x).

b) La tabulación específica.

c) El domino y el rango.

d) La gráfica correspondiente.

Solución

Como se observa en el planteamiento del problema, existe una restricción que condiciona a dicha función; según se observa *X* acepta valores desde - 3 hasta + 3 únicamente. Por lo que la gráfica viaja de izquierda a derecha respectivamente.

a) Valores aceptados para *f* (X).

f (- 3) = - 3 + 1 = - 2 *f* (1) = 1 + 1 = 2

f (- 2) = - 2 + 1 = - 1 *f* (2) = 2 + 1 = 3

f (0) = 0 + 1 = 1 *f* (3) = 3 + 1 = 4

b) Tabulación específica.

X	**- 3**	**- 2**	**- 1**	**0**	**1**	**2**	**3**
Y	**- 2**	**- 1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**

c) El dominio y el rango.

El dominio está asociado directamente con la variable independiente *X*, cuyos valores han sido perfectamente definidos al inicio del problema, observándose que los signos mayor o igual, representan un intervalo cerrado que deberá denotarse simbólicamente con corchetes y gráficamente como un círculo relleno. Dominio: [- 3, + 3]

El rango o imagen, está asociado a la variable dependiente *Y*, cuyo valor mínimo (– 2) y su valor máximo (4), se representan al igual que el dominio, con corchetes y círculo relleno respectivamente. Rango: [- 2, + 4].

d) Gráfica correspondiente.

La función representa un comportamiento lineal, por estar elevada la variable independiente a la primera potencia; se afirma entonces que la gráfica es una recta.

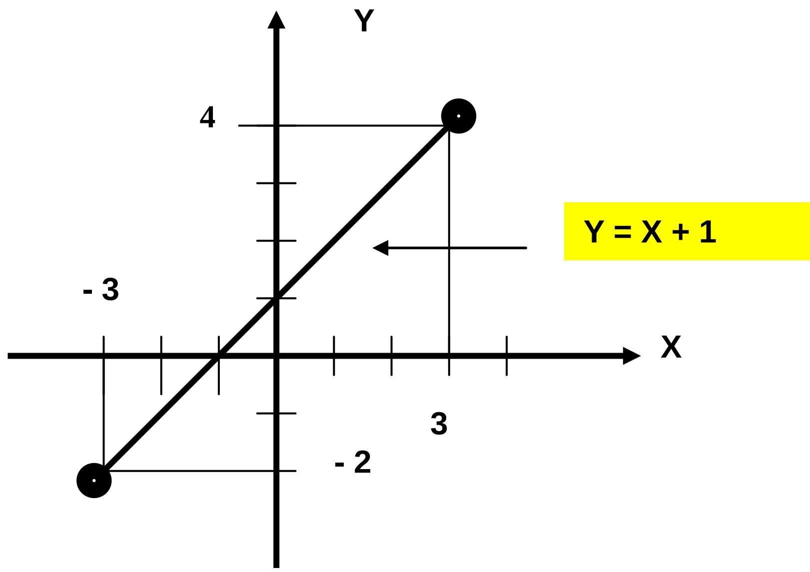


Figura 10. Representación gráfica de la función *f* (x) = x + 1

a) Los valores aceptados para f (x).

b) La tabulación específica.

c) El dominio y el rango.

d) La gráfica correspondiente.

Esta función recibe el nombre de "valor absoluto", por tanto acepta valores positivos y negativos, es decir, por la izquierda y por la derecha, proyectando en la imagen un valor numérico, que siempre resulta ser positivo. Al no existir restricción alguna, puede asignársele valores desde menos infinito, hasta más infinito respectivamente.

a).- Los valores aceptados.

F (- ∞) = + ∞ *F* (0) = 0 *F* (+ ∞) = +

F (- 4) = 4 *F* (1) = 1

F (- 3) = 3 *F* (2) = 2

F (- 2) = 2 *F* (3) = 3

F (-1) = 1 *F* (4) = 4

b). Tabulación específica.

X **- ∞**	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4	+ ∞
Y + ∞	4	3	2	1	0	1	2	3	4	+ ∞

c) El dominio y el rango.

Dominio: (-, +) y Rango: [0, +)

d) La gráfica correspondiente.

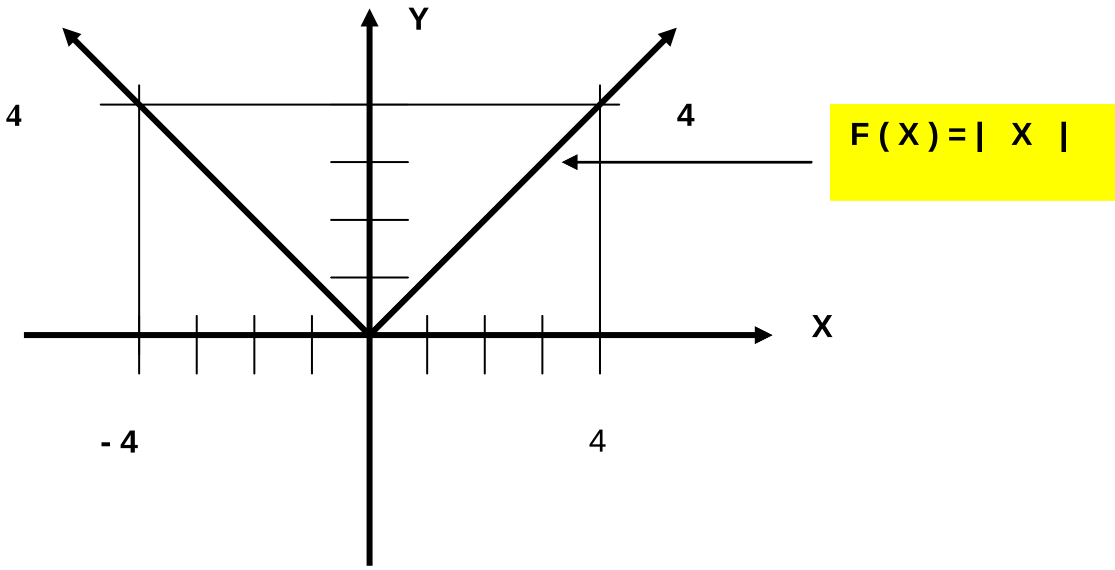


Figura 11. Representación gráfica de la función *f* (X) = | X |

1.2 Coordenadas polares, cilíndricas y esféricas

Coordenadas polares

Las coordenadas polares son una extensión de las coordenadas cartesianas; están conformadas por un eje fijo llamado eje polar, y un ángulo teta **(Θ)** que permite ubicar un punto a una distancia **r** determinada.

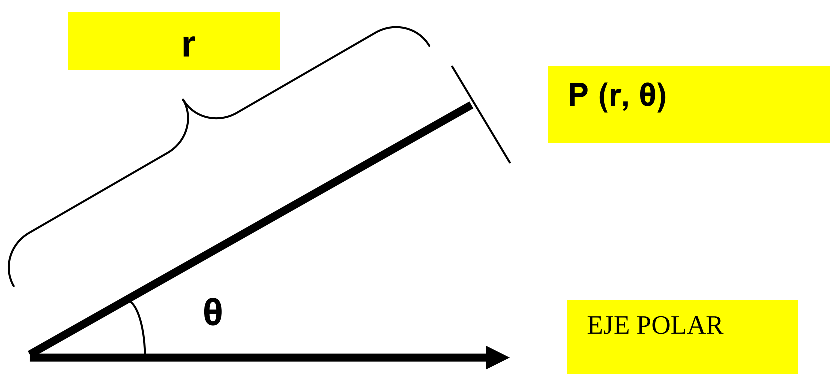


Figura 12. Representación de un punto en coordenadas polares.

El ángulo θ se expresa en radianes, por lo que es necesario recordar la conversión de grados sexagesimales a radianes y viceversa.

Conversión: 1 rad = π / 180 y 1 = 180 / π.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 3. Graficar los siguientes puntos en coordenadas polares:

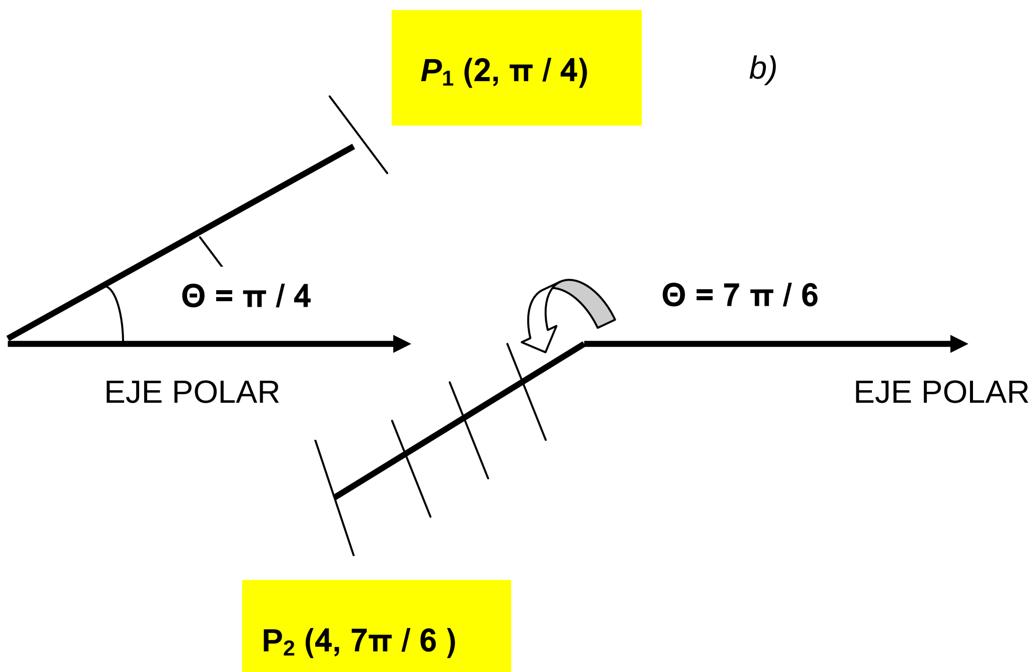
a) P_1 (2, π / 4)

π / 4 = 45 º

b) P_2 (4, 7π / 6).

7 π / 6 = 210º

a) *b)*



Coordenadas cilíndricas

Son una extensión más de las coordenadas cartesianas y están conformadas principalmente por una distancia *r*, un ángulo *θ* en radianes, y *Z* es la distancia dirigida desde el eje polar hasta *p*. que generalmente adquiere valores constantes. Dicho lo anterior, un punto en coordenadas cartesianas será representado por: *P* (*r*, θ, *z*).

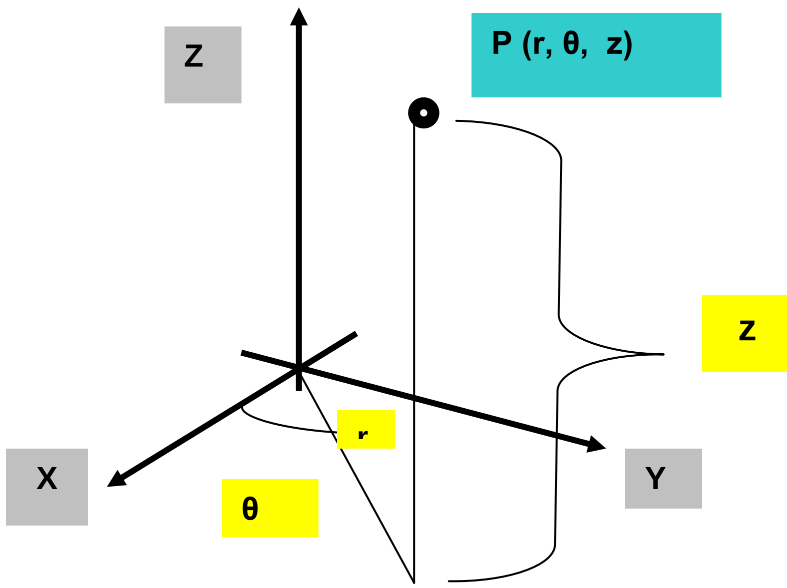


Figura 13. Representación de un punto en coordenadas cilíndricas.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE.

Ejercicio 4. Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones, expresadas en coordenadas cilíndricas, donde *c* es una constante: (*a*) $r = c$; (b) $\theta = c$.

Solución

a). $r = c$

Para un punto P (r, θ, z) la gráfica de $r = c$, θ y z pueden asumir cualquier valor, mientras que r es constante. Gráficamente representa a un cilindro circular recto, cuyo radio es *c* unidades y su eje es precisamente el eje *z*.

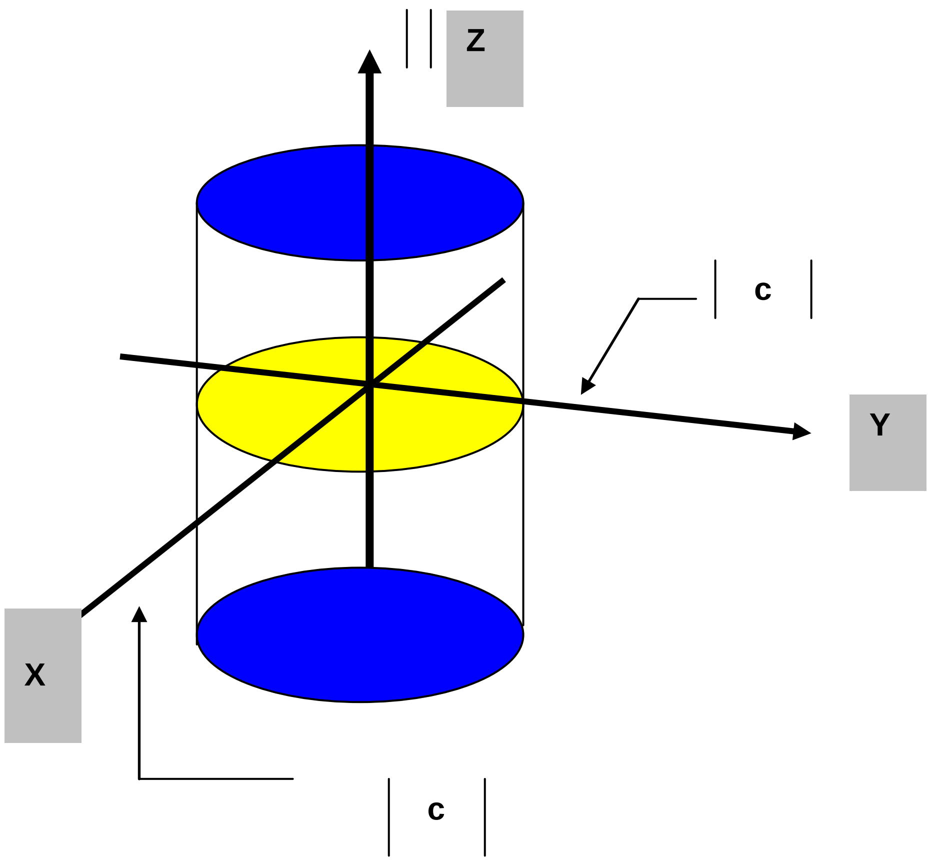


Figura 14. Representación gráfica de un cilindro circular recto.

b) θ = c

Para todos los puntos *P* (r, θ, z) de la gráfica θ = *c*, *r* y *z* pueden tomar cualquier valor, en tanto que θ permanece constante. La gráfica es un plano que pasa por el eje *z*.

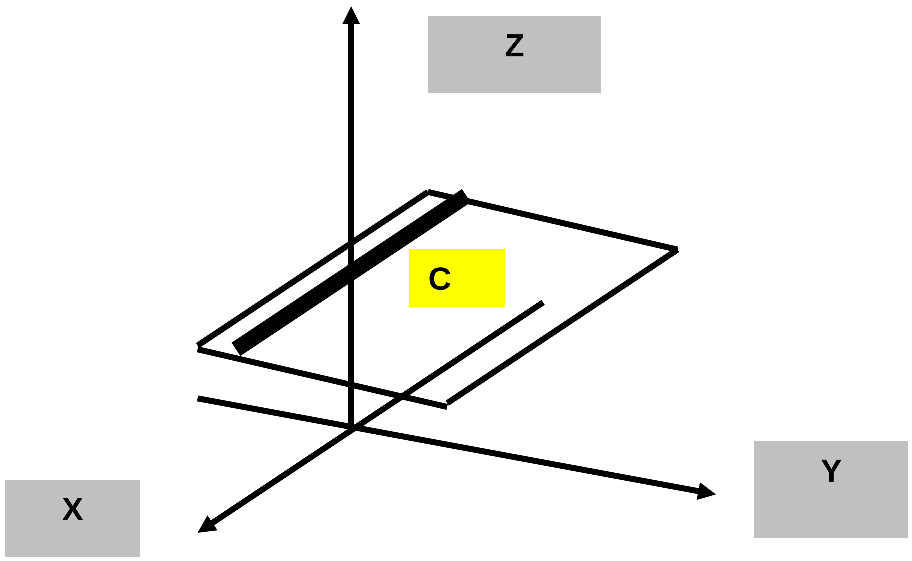


Figura 15. Plano que corta al eje z.

Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas es una extensión más de las coordenadas polares, la característica fundamental de que cada uno de los ángulos posee la propiedad de ser ortogonales entre sí. Se dice que un punto expresado en coordenadas esféricas, se representa como: *P* (*P*, Θ, Φ).

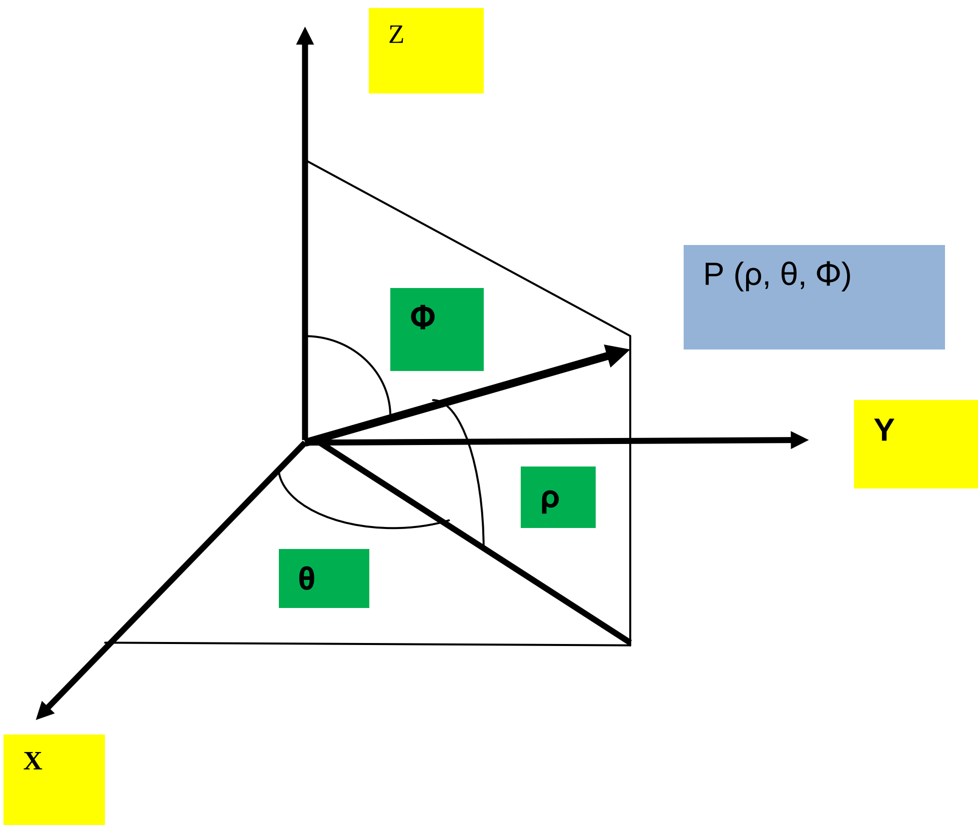


Figura 16. Representación de un punto en coordenadas esféricas.

Obteniendo las proyecciones sobre los ejes correspondientes se observa que:

$X = \rho \text{ sen } \Phi \cos \theta$ $Y = \rho \text{ sen } \Phi \text{ sen } \theta$ $Z = \rho \cos \Phi$

1.3 Fórmulas de transformación entre coordenadas

Coordenadas polares

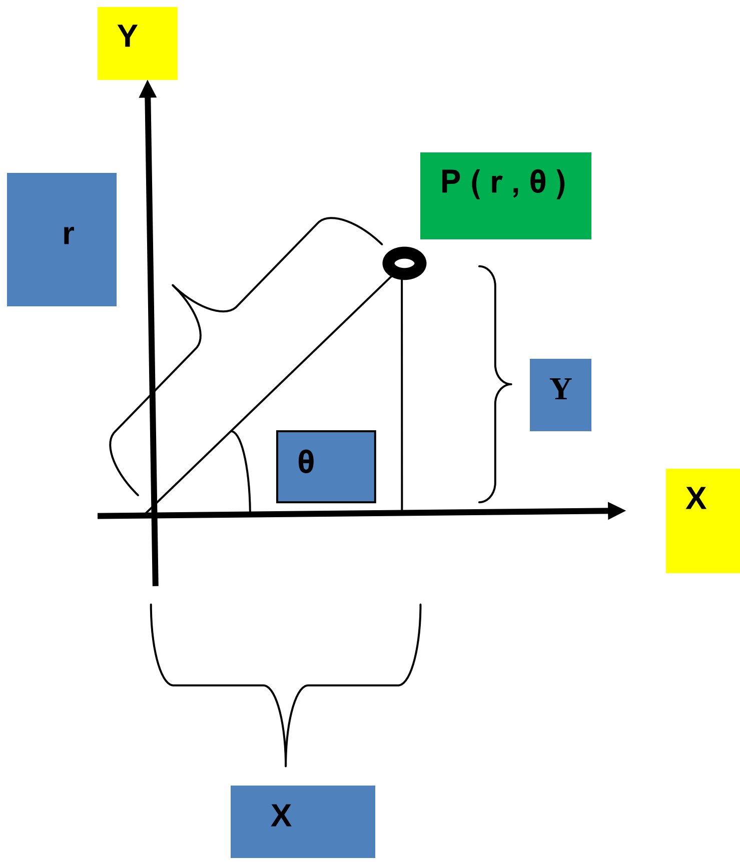


Figura 17. Representación de un punto en coordenadas polares y su equivalencia en coordenadas cartesianas.

$\text{Cos } \theta = X /$ $\rightarrow$ $X = r \text{ Cos } \theta$

$\text{Sen } \theta = Y / r$ $\rightarrow$ $Y = r \text{ Sen } \theta$

$\text{Tan } \theta = Y / X$ $\rightarrow$ $\theta = \text{Arc tan } [Y / X]$

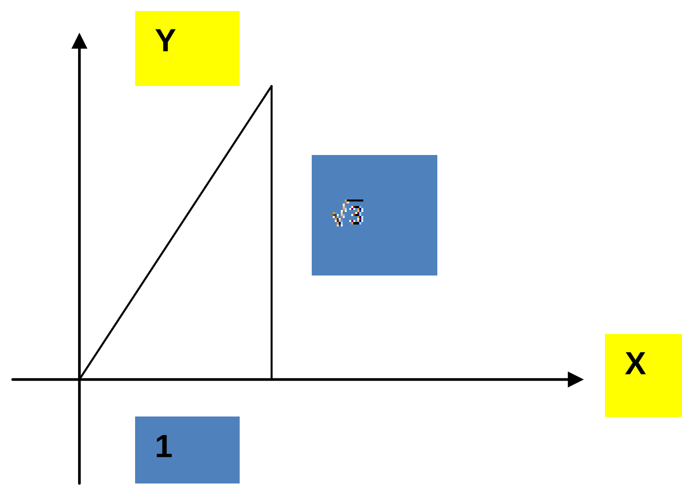
Aplicando el teorema de Pitágoras, que establece: “La suma del cuadrado de los catetos, es igual al cuadrado de la hipotenusa”, se tiene:

$X^{2\,+}\,Y^{2\,=}\,\mathrm{r}^{2}$ $\Rightarrow$ $r^{2} = X^{2} + Y^{2}$

$\Rightarrow$ $r = \sqrt{\,}(X^{2} + y^{2})$.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 5. Transformar el siguiente punto de coordenadas cartesianas a polares; P (1, √3).



Tan θ = *Y / x*

θ = Arc tan [Y / X]

θ = Arc tan [√ 3 / 1] = 60º ;

θ = π / 3

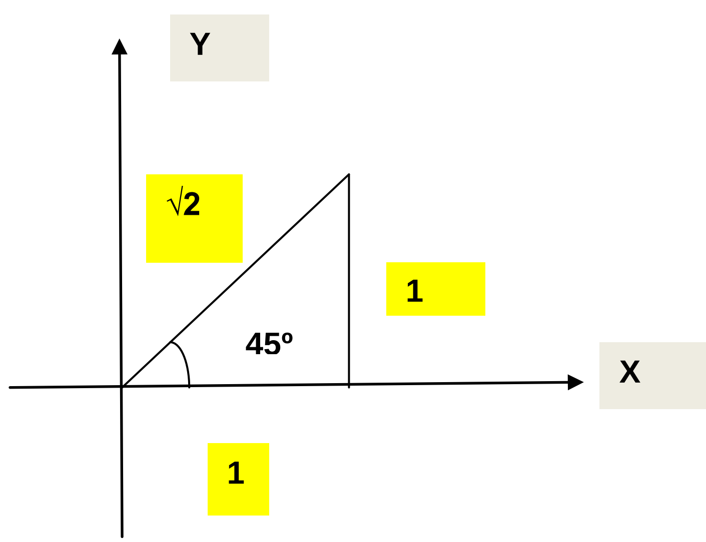
$r^2 = X^2 + Y^2$

$r^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2$

r = 2

P (2 , π / 3)

Ejercicio 6. Transformar el siguiente punto de coordenadas polares a cartesianas; P (√ 2 , π / 4).



$\pi/4 = 45^{o}$ X = 1

Tan (45º) = 1

Tan (45ª) = 1 / 1 Y = 1

P (1 , 1)

COORDENADAS CILINDRICAS.

Como se describió, las coordenadas cilíndricas, se representan en P (r , θ , z).

Ejercicio 8. Transformar de coordenadas cilíndricas a cartesianas, la siguiente ecuación.

a).- $r (3 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta) + 6 z = 0$

$3 r \cos \theta + 2 r \operatorname{sen} \theta + 6z = 0$

$$\boxed{3x + 2y + 6z = 0}$$

Es un plano.

Ejercicio 9. Transformar de coordenadas polares a cartesianas las siguientes ecuaciones.

b) $r = 6 \operatorname{sen} \theta$

$(r) (r) = 6 r \operatorname{sen} \theta$

$r^{2} = 6 r \operatorname{sen} \theta$

$X^2 + Y^2 = 6y$

$X^2 + Y^2 - 6y = 0$

Completando el trinomio cuadrado perfecto (T.C.P)

$X^2 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 0$

$X^2 + (y^2 - 6y + 9) + = 9$

$x^2 + (y - 3)^2 = 9$

$X^2 = 0$

$\sqrt{(X^2)} = \sqrt{(o)}$

$\boxed{X = 0}$

$\sqrt{(y - 3)^2} = \sqrt{(0)}$

$y - 3 = 0$

$\boxed{y = 3}$

$r = \pm \sqrt{(9)})$

$\boxed{r = \pm 3}$

C (0, 3) y r = ± 3

Es una circunferencia con centro en (0, 3) y radio = ± 3.

3

c).- $r = \dfrac{\qquad}{2 \quad + \quad \text{sen}\ \theta}$

$r\ (2 + \text{sen}\ \theta) = 3$

$2r + r\ \text{sen}\ \theta = 3$

Sustituyendo en coordenadas cartesianas:

$2\,[\sqrt{(x^2 + y^2)}\,] + y = 3$

$\left\{ 2\,[\sqrt{(x^2 + y^2)}\,] \right\}^2 = (3 - y)^2$

$4\,[(x^2 + y^2)] = (3 - y)^2$

$4\ (x^2 + y^2) = 9 - 6y + y\ 2$

$4X^2 + 4y^2 = y^2 - 6y + 9$

$4X^2 + 4y^2 - y^2 + 6y = 9$

$4x^2 + 3y^2 + 6y = 9$

$(4x^2 + 3y^2 + 6y = 9)\ (1 / 3)$

$4 / 3\ x^2 + y^2 + 2y = 3$

Completando el trinomio cuadrado perfecto (T.C.P)

$4 / 3\ x^2 + (y^2 + 2y) = 3$

$4 / 3 x^2 + (y^2 + 2 y + 1) - 1 = 3$

$4 / 3 x^2 + (y^2 + 2 y + 1) = 3 + 1$

$4 / 3 x^2 + (y^2 + 2 y + 1) =4$

$4 / 3 x^2 + (y + 1)^2 4$

Es una circunferencia.

$4 / 3 X^2 = 0$

$X^2 = 0$

$\sqrt{(X^2)} = \sqrt{(0)}$

$\boxed{X = 0}$

$(y + 1)^2 = 0$

$\sqrt{[(y + 1)^2]} = \sqrt{(0)}$

$Y + 1 = 0$

$\boxed{Y = - 1}$

$r = \pm \sqrt{(9)}$

$\boxed{r = \pm 3}$

Es una circunferencia con centro (0, - 1) y radio r = ± 3

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 10. Aplicando el concepto de coordenadas esféricas, demostrar que:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \rho^2$$

$$(\rho \operatorname{sen} \Phi \cos \theta)^2 + (\rho \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \theta)^2 + (\rho \cos \Phi)^2 = \rho^2$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \Phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \Phi \operatorname{sen}^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \Phi = \rho^2$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \Phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + \rho^2 \cos^2 \Phi = \rho^2$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \Phi (1) + \rho^2 \cos^2 \Phi = \rho^2$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \Phi + \rho^2 \cos^2 \Phi = \rho^2$$

$$\rho^2 (\operatorname{sen}^2 \Phi + \cos^2 \Phi) = \rho^2$$

$$\rho^2 (1) = \rho^2$$

$$\boxed{\rho^2 = \rho^2} \qquad \therefore \quad Q.E.D.$$

Ejercicio 11. Transformar la siguiente ecuación de coordenadas esféricas a cartesianas.

$$\rho \cos \Phi = 8$$

Z = 8	Es un plano paralelo al eje X Y, que corta al eje Z en 8 unidades.

AUTOEVALUACIÓN

1. Defina el concepto de plano cartesiano.
2. ¿Quién fue René Descartes?
3. Defina el concepto de coordenadas polares.
4. ¿Por qué se afirma que las coordenadas cilíndricas son una extensión más de las coordenadas polares?
5. Defina el concepto de coordenadas esféricas.
6. Defina el concepto de sistema de coordenadas.
7. Explique correctamente la importancia de las coordenadas cartesianas
8. ¿Con qué otro nombre se conoce al eje *X*?
9. Defina el concepto de simetría.
10. ¿Con qué otro nombre se conoce al eje Y?

Ejercicios propuestos

1. Transformar los siguientes puntos de coordenadas cartesianas a polares.

a) P (1 , 1) b).- P ($\sqrt{3}$, 1) c).- P (- 1 , - 3) d).- P ($\sqrt{3}$, - 1)

2 Transformar los siguientes puntos de coordenadas polares a cartesianas.

a) P ($\sqrt{2}$, π / 4) b).- P (2, π / 6) c).- P (2, 2 π / 3) d).- P(2 , 7 π / 6)

3 Transformar las siguientes ecuaciones de coordenadas polares a cartesianas.

a) r = sen 2 θ *b)* r = cos 2θ c) r = 6 cos θ *d)* r = $\dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

4.- Transformar las siguientes ecuaciones de coordenadas cilíndricas a cartesianas.

a).- r (cos θ + sen θ) = z b).- 2 r (cos θ + sen θ) - 10 z = 0

5.- Transformar las siguientes ecuaciones de coordenadas esféricas a cartesianas.

a).- $\rho \cos \Phi = 4$ b).- $\rho \text{ sen } \theta = 4$ c).- $2 \rho \text{ sen } \theta = 16$

6.- Graficar los siguientes puntos en coordenadas polares.

a).- $P (2 , 5 \pi / 4)$ b).- $P (3 , 4 \pi / 3)$ c).- $P (- 2 , 7 \pi / 6)$

7.- Transformar la siguiente ecuación de coordenadas cartesianas a polares, obteniendo la solución de la misma y la gráfica correspondiente.

$X^2 + Y^2 - 2aX + 2bY = 0$

UNIDAD 2

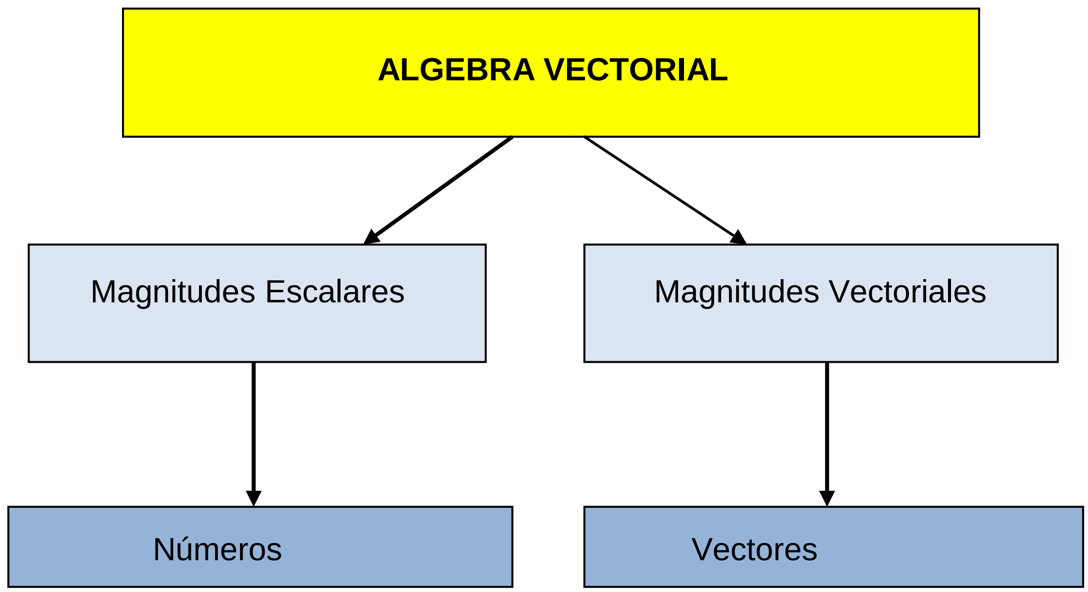
ÁLGEBRA VECTORIAL

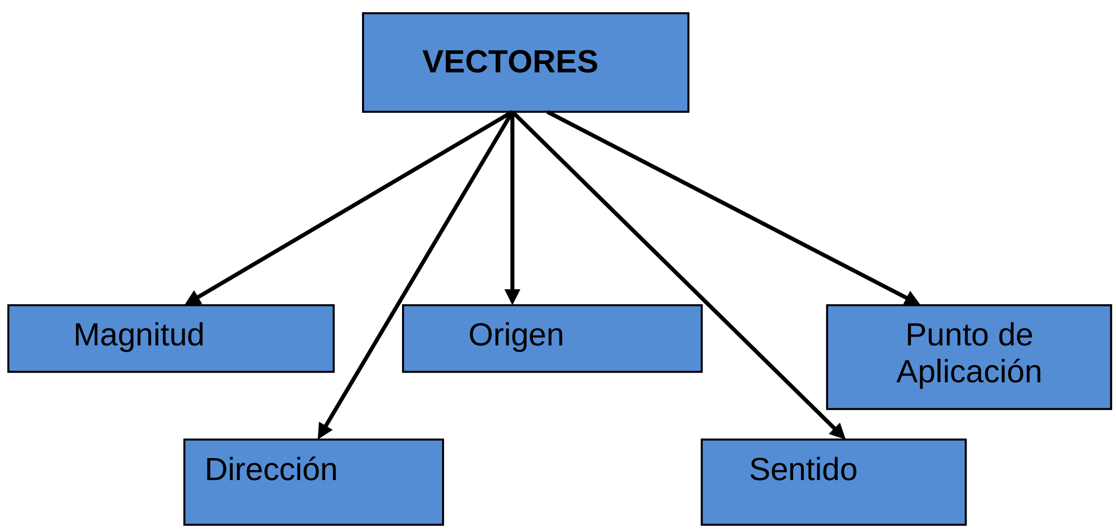
OBJETIVO

Definir e identificar las cantidades escalares y vectoriales; así como las principales operaciones realizadas con los vectores: producto escalar y producto vectorial.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL





INTRODUCCIÓN

El álgebra vectorial es una de las herramientas principales que permiten interpretar diversos fenómenos físicos; muchos de los conceptos mecánicos están explicados con base en conceptos vectoriales fundamentales, como el módulo de un vector, el vector unitario, la adición vectorial, la sustracción vectorial, la multiplicación por un escalar, el producto escalar y el producto vectorial.

Esta unidad analiza los conceptos teóricos esenciales, las operaciones básicas entre vectores, así como las propiedades inherentes que se ratifican, sin olvidar, por supuesto, las que no se verifican y requieren un grado de exactitud en su ejecución; comprendiendo plenamente que el comportamiento de diversos medios o entes reales tienen su fundamento precisamente en el álgebra vectorial.

2.1. CANTIDADES ESCALARES Y CANTIDADES VECTORIALES

a) Cantidades escalares

Una cantidad escalar es una magnitud referida simplemente a un número, careciendo de propiedades físicas como origen, dirección y sentido. Sin embargo, muchas de las operaciones vectoriales que se realizan arrojan como resultado números o coeficientes sin algún sentido físico.

b) Cantidades vectoriales

Una cantidad vectorial es una magnitud referida a un vector, es decir, un elemento físico que posee origen, dirección y sentido. Muchos de los conceptos mecánicos, que explican el comportamiento de diversos materiales en ingeniería y arquitectura están basados en el análisis vectorial.

Por tanto, es necesario definir correctamente el concepto de vector. Un vector es un segmento de recta dirigido, que posee origen, punto de aplicación, magnitud, dirección y sentido.

- Origen: Es el punto de partida de un vector.
- Punto de aplicación: Es el punto donde incide directamente la fuerza del vector
- Magnitud: Es el coeficiente de un vector.
- Dirección: Es el eje de aplicación de un vector.
- Sentido: Es el signo positivo o negativo en la dirección de un vector.

2.2.- DEFINICIÓN DE LAS OPERACIONES BÁSICAS DE UN VECTOR

A partir de este momento se designa a los vectores en el plano y el espacio, tal como se muestra a continuación.

a).- Módulo de un vector en el plano. Es una magnitud escalar, que surge del análisis trigonométrico de las coordenadas del vector.

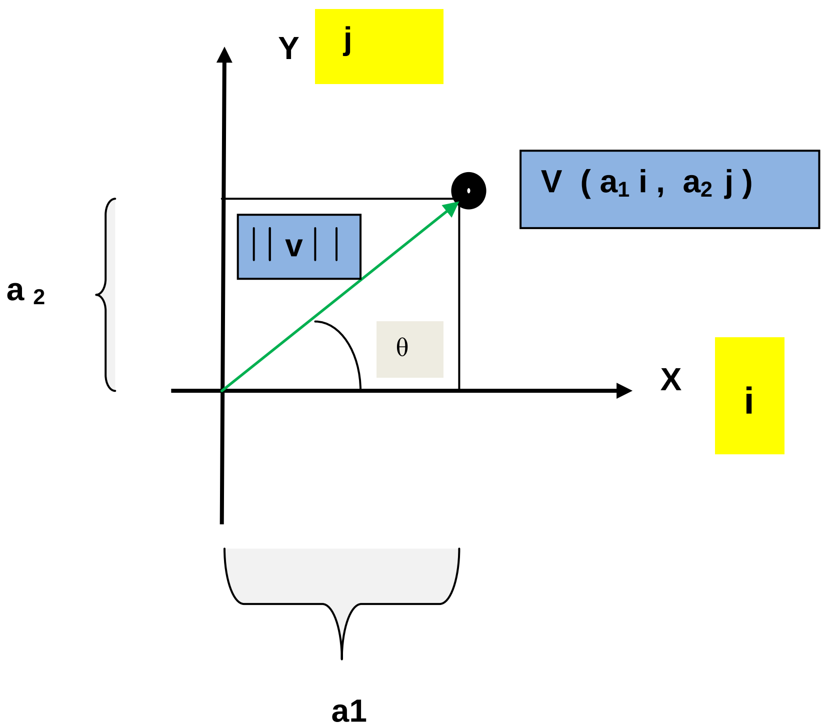


Figura 1. Módulo de un vector en el plano.

Aplicando el teorema de Pitágoras, se obtiene el *módulo* de un *vector,* como la raíz cuadrada de la suma de las coordenadas al cuadrado de un vector determinado y se designa como: $\|V\|$

$$\|V\| = \sqrt{[(a_1)^2 + (a_2)^2]}$$

b) Módulo de un vector en el espacio: Es una magnitud escalar obtenida en función de las coordenadas de dicho vector en el espacio.

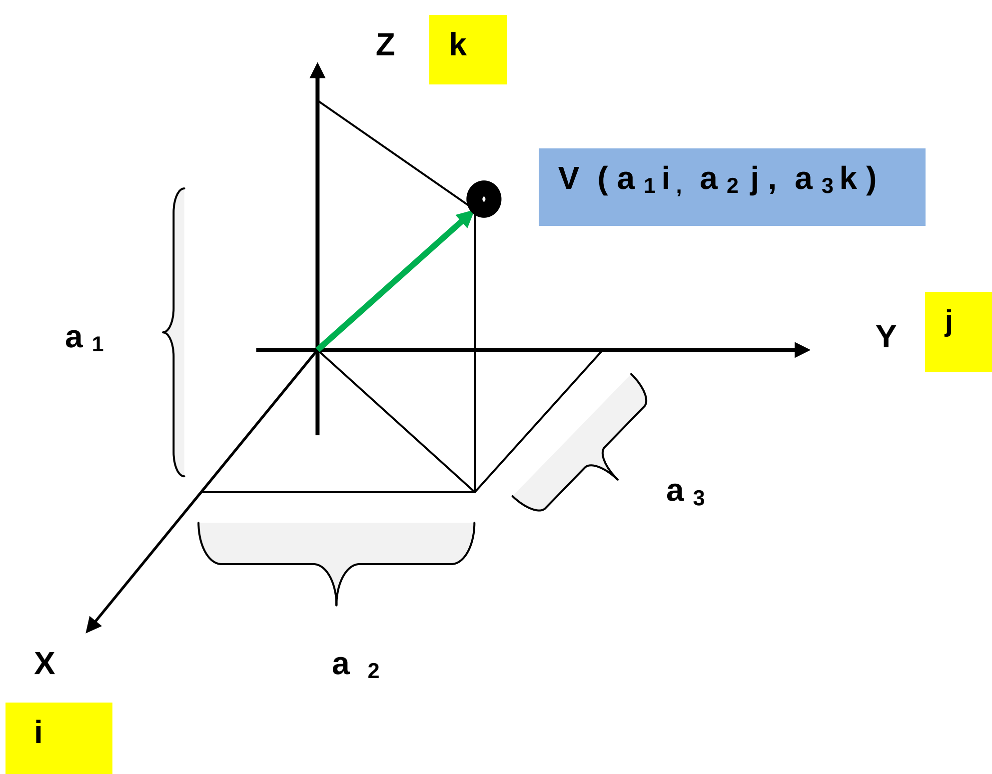


Figura 2. Módulo de un vector en el espacio.

$$V = \sqrt{[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]}$$

c) Multiplicación por un escalar: Es la multiplicación de un número por todas y cada una de las coordenadas de un vector en el plano o el espacio.

En el plano: $\alpha (a_1 i + a_2 j) = \alpha a_1 i + \alpha a_2 j$

En el espacio: $\alpha (a_1 i , a_2 j , a_3 k) = (\alpha a_1 i , \alpha a_2 j , \alpha a_3 k)$

d) Adición: Es la suma de las coordenadas de dos o más vectores en una dirección específica.

En el plano:

$$(a_1 i , a_2 j) + (b_1 i , b_2 j) = [(a_1 + b_1) i + (a_2 + b_2) j]$$

En el espacio:

$(a_1 i , a_2 j , a_3 k) + (b_1 i , b_2 j , b_3 k) = [(a_1 + b_1) i + (a_2 + b_2) j +$
$(a_3 + b_3) k]$

e) Sustracción. Es la resta de las coordenadas de dos o más vectores en una dirección específica.

En el plano:

$$(a_1 i , a_2 j) - (b_1 i , b_2 j) = [(a_1 - b_1) i + (a_2 - b_2) j]$$

En el espacio:

$(a_1 i , a_2 j , a_3 k) - (b_1 i , b_2 j , b_3 k) = [(a_1 - b_1) i + (a_2 - b_2) j +$
$(a_3 - b_3) k]$

f) Vector unitario: Es la división de todas y cada una de las coordenadas de un vector específico, entre su propio módulo.

En el plano:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{v}} = \frac{(a_1 i\ ,\ a_2 j)}{\|V\|} = \frac{(a_1 i\ ,\ a_2 j)}{\sqrt{[(a_1)^2 + (a_2)^2]}}$$

En el espacio:

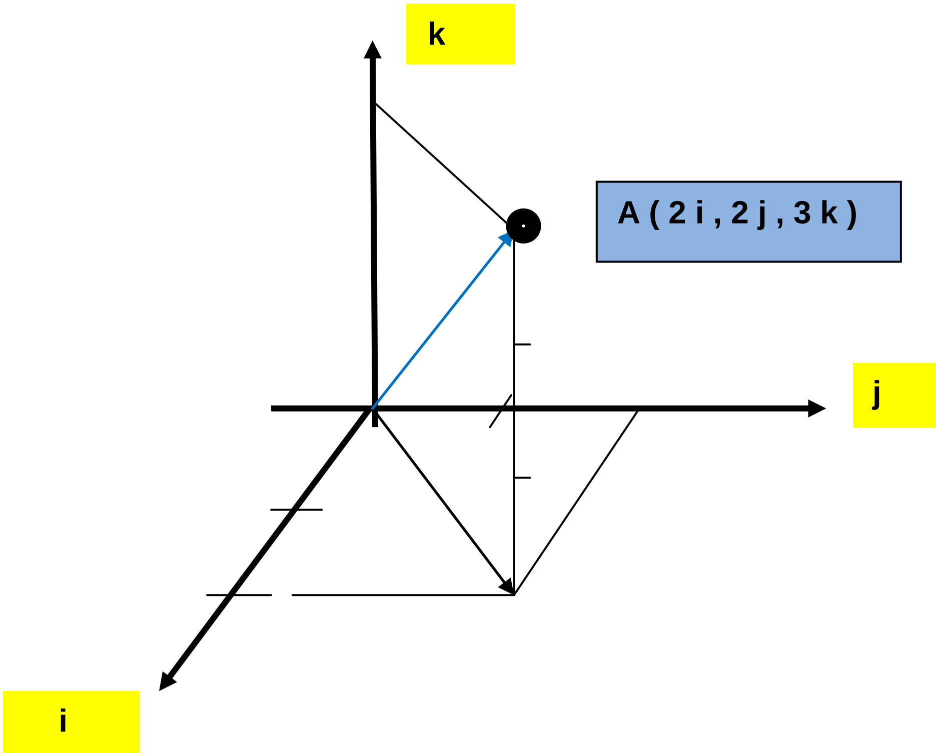
$$U_v = \frac{(a_1 i\ , a_2 j\ , a_3 k)}{\|V\|} = \frac{(a_1 i\ , a_2 j\ , a_3 k)}{\sqrt{[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]}}$$

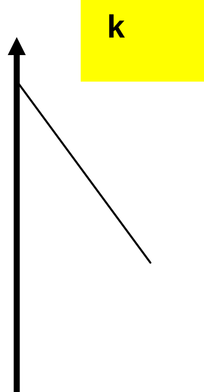
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

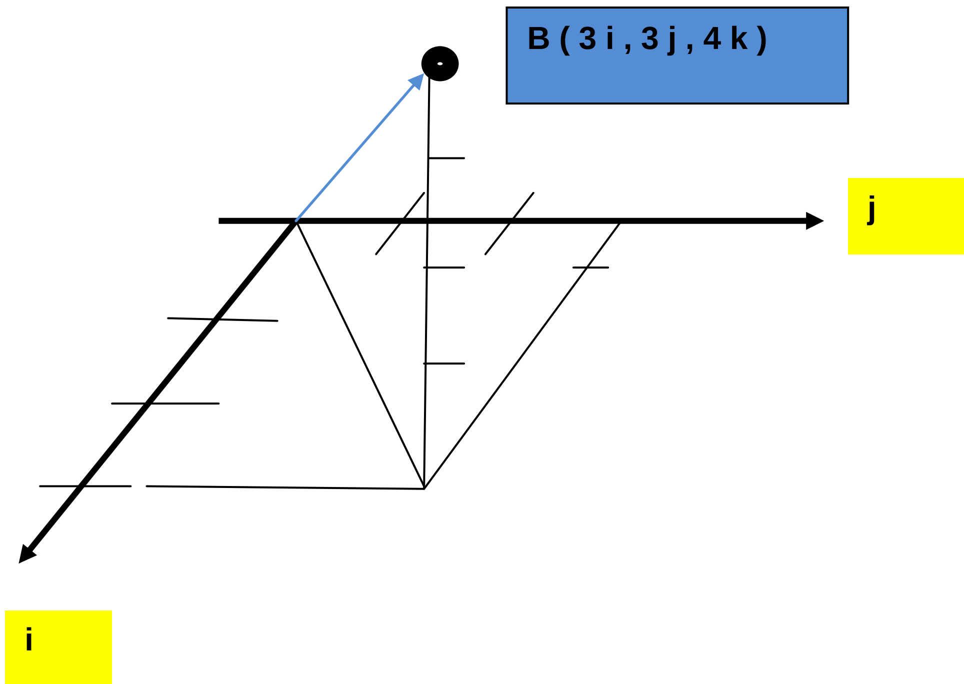
Ejercicio 1

Sean los vectores de posición: A (2 i, 2 j, 3 k); B (3 i, 3 j, 4 k) y el escalar α = 2

a) Graficar al vector A y al vector B respectivamente.







b) Calcular α (A + B) = 2 [(2 i, 2 j, 3 k) + (3 i, 3 j, 4 k)]

α (A + B) = 2 [(5 i , 5j, 7 k)] = (10 i , 10 i, 14 k)

c) Calcular α (A - B) = 2 [(2 i , 2 j, 3 k) - (3 i , 3 j , 4 k)]

α (A - B) = 2 [(- i , - j, - k)] = (- 2 i , - 2 j , - 2 k)

d) Los vectores unitarios en la dirección de A y B.

$$V_A = \frac{(2\,i,\ 2\,j,\ 3\,k)}{\sqrt{[(2)^2 + (2)^2 + (3)^2]}} = (2/\sqrt{17})\,i,\ (2/\sqrt{17})\,j,\ 2/\sqrt{17}\ k$$

$$V_B = \frac{(3\,i,\ 3\,j,\ 4\,k)}{\sqrt{[(3)^2 + (3)^2 + (4)^2]}} = (3/\sqrt{34})\,i,\ (3/\sqrt{34})\,j,\ (3/\sqrt{34})\,k$$

e) Demostrar que:

$$\alpha (A + B) = \alpha (B + A)$$

$$2 [(2 i , 2 j , 3 k) + (3 i , 3 j, 4 k)] = 2 [(3 i, 3 j , 4 k) + (2 i, 2 j, 3 k)]$$

$$2 [(5 i , 5j, 7 k)] = 2 [(5 i, 5j , 7 k)]$$

$$(10 i, 10 i, 14 k) = (10 i, 10 i, 14 k) \quad \therefore \text{ Q.E.D.}$$

$$\alpha (A - B) = - \alpha (A - B)$$

$$2 [(2 i, 2 j, 3 k) - (3 i, 3 j, 4 k)] = - 2 [(3 i , 3 j, 4 k) - (2 i, 2 j, 3 k)]$$

$$2 [(- i, - j, - k)] = - 2 [(i, j, k)]$$

$$(- 2 i, - 2 i, - 2 k) = (- 2 i, - 2 i, - 2 k) \quad \therefore \text{ Q.E.D.}$$

2.3 DEFINICIÓN DEL PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

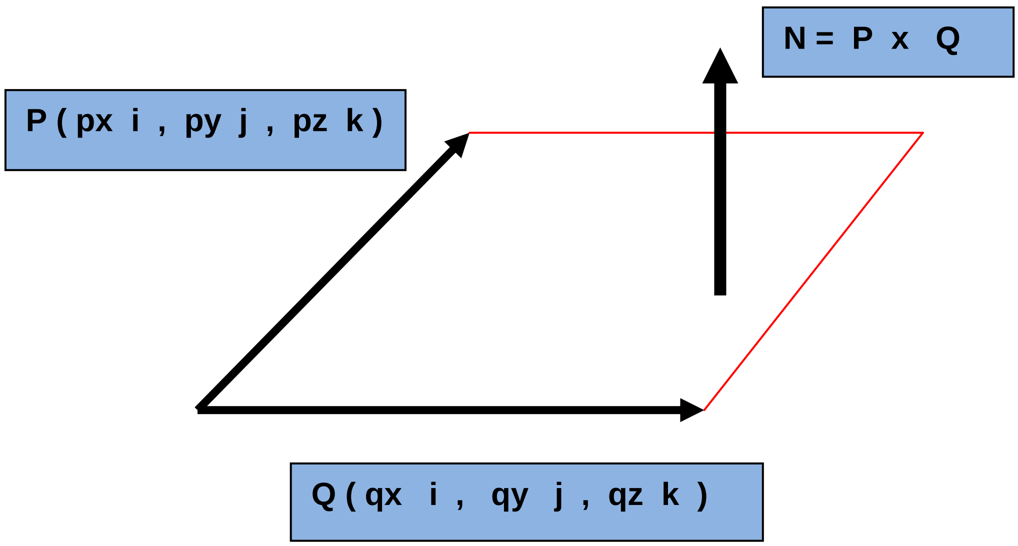
El producto escalar, producto punto o producto interno, genera un sólo valor numérico; se efectúa coordenada a coordenada, y está definido vectorialmente como:

$i \cdot i = 1 \qquad j \cdot j = 1 \qquad k \cdot k = 1$

$(a_1 i, a_2 j, a_3 k) \cdot (b_1 i, b_2 j, (a_2 \cdot b_2) b_3 k) = (a_1 \cdot b_1)(1) + (a_2 \cdot b_2)(1) + (a_3 b_3)(1) = (a_1 b_1) + (a_2 b_2) + (a_3 b_3)$

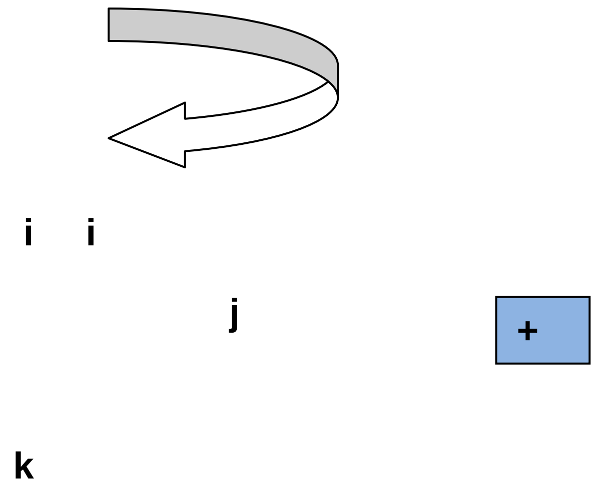
2.4 Definición de producto vectorial

Sea el plano constituido por los vectores: P (px i , py j , pz k) y Q (qx i , qy j , qz k). El producto vectorial, producto cruz o producto externo, se define como:



$$P \times Q = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

$$P \times Q = (P_y Q_z - P_z Q_y)\, i \; - \; (P_x Q_z - P_z Q_x)\, j \; + \; (P_x Q_y - P_y Q_x)\, k$$



$i \times j = k$	$j \times k = i$	$k \times i = j$
$i \times k = -j$	$j \times i = -k$	$k \times j = -i$
$i \times i = 0$	$j \times j = 0$	$k \times k = 0$

Angulo entre dos vectores

Para calcular el ángulo entre dos vectores, es necesario aplicar el concepto de *producto escalar* que genera como resultado un valor numérico.

$$\mathbf{Cos}\ \theta = \frac{\mathbf{A \cdot B}}{\|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|}$$

$$\Theta = \mathbf{Arc\ tan} \left(\frac{\mathbf{A \cdot B}}{\|\mathbf{A}\|\ \|\mathbf{B}\|} \right)$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 2. Sean los vectores C (3 i , 2 j , 3 k)   y   D (i, 2 j, 3 k); calcular:

a) El producto punto entre C y D.

b) El producto cruz entre C y D.

c) El ángulo formado entre C y D.

Solución

a) $C \cdot D = (3\,i , 2\,j , 3\,k) \cdot (i , 2\,j , 3\,k) = 3(1) + 4(1) + 9(1) = 16$

$$\boxed{C \cdot D = 16}$$

b)

$$C \times D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$C \times D = [(2)(3) – (2)(3)]\,i - [(3)(3) - (1)(3)]\,j + [(3)(2) – (1)(2)]\,k$

$C \times D = (o)\,i , (6)\,j , (4)\,k = (6\,j , 4\,k)$

$$\boxed{C \times D = (6\,j , 4\,k)}$$

c) El ángulo formado por C y D.

$$\cos\theta = \frac{C \quad D}{\left|\left|C\right|\right| \quad \left|\left|D\right|\right|}$$

$$\cos\theta = \frac{(3i, 2j, 3k) \cdot (i, 2j, 3k)}{\left[\sqrt{[(3)^2 + (2)^2 + (3)^2]}\right]\left[\sqrt{[(1)^2 + (2)^2 + (3)^2]}\right]}$$

$$\cos\theta = \frac{16}{[\sqrt{(22)}]\ [\sqrt{(14)}]} = \frac{16}{17.5496}$$

$$\Theta = \text{Arc tan}\left(\frac{16}{17.5496}\right)$$

$$\boxed{\Theta = 42.35^{o}}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Defina el concepto de cantidad escalar.
2. Defina el concepto de cantidad vectorial.
3. Establezca la diferencia entre cantidad escalar y cantidad vectorial.
4. ¿Qué es un vector?
5.¿Cuáles son los elementos de un vector?
6. Mencione las operaciones básicas y permitidas entre vectores.
7. Justifique la importancia del álgebra vectorial en ingeniería.
8. Defina el concepto de vector unitario.
9. ¿Con qué otros nombres se conoce al producto escalar?
10. ¿Con qué otros nombres se conoce al producto vectorial?

Ejercicios propuestos

1. Sean los vectores de posición A (2 i, 2 j, 3 k), B (i, j, k), C (2 i, 2 j, 3 k) y α = 4

a) Demostrar que α (A + B + C) = α (C + B + A) .

b) Demostrar que α (A – B) = - α (B – A).

c) Demostrar que α (A – C) = - α (C – A).

d) Demostrar que α (A + B + C) = α A + α B + α C.

e) Demostrar que α (A · B) = α (B · A).

f) Obtener los vectores unitarios en la dirección de A, B y C, respectivamente.

g) Obtener (A · B) · (A · C).

h) Demostrar que (A · B) · (A · C) = (B · A) · (C · A).

i) Obtener un vector normal al plano formado por A y B.

j) Obtener un vector normal al plano formado por A y C.

k) Calcular el ángulo entre A y B.

l) Calcular el ángulo entre A y C.

m) Calcular el ángulos entre C y A.

2. ¿Por qué se afirma que en álgebra vectorial el orden de los factores si altera el producto?, justifique matemáticamente su respuesta.

3. obtener (A x B) x (A x C).

4. obtener $(B \times A) \cdot (A \times C)$.

UNIDAD 3

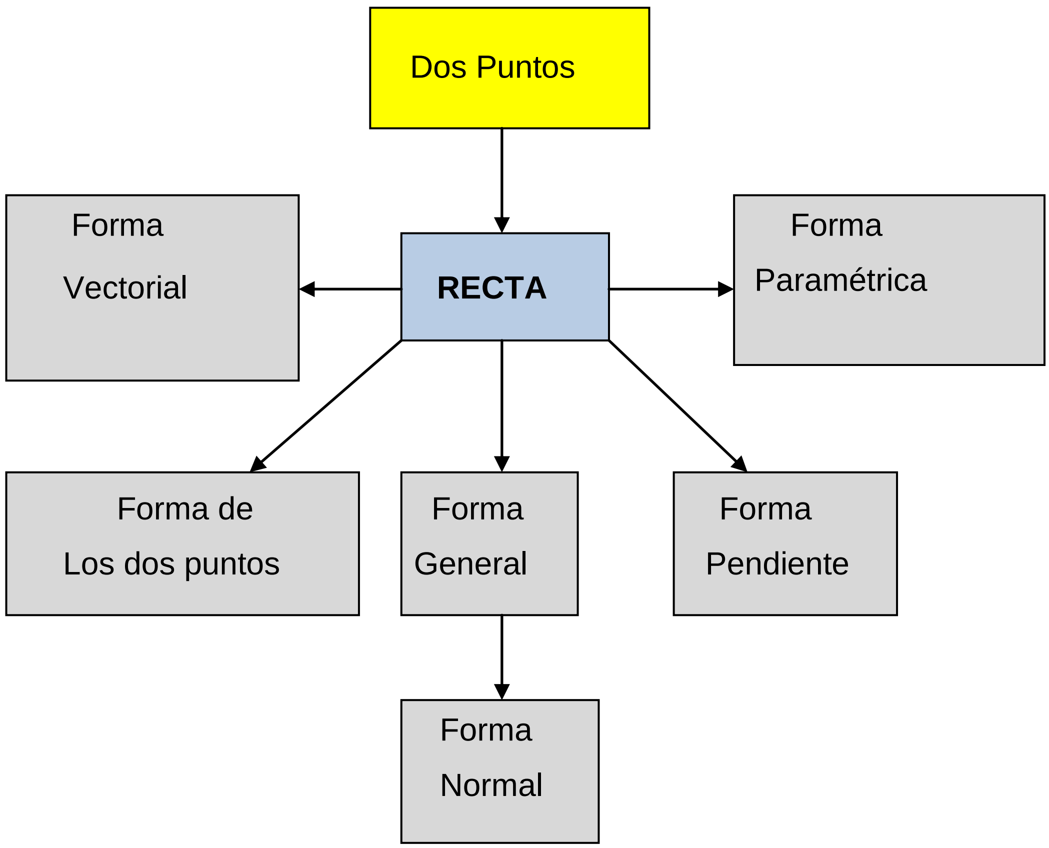
EL PUNTO Y LA RECTA ENTRE DOS DIMENSIONES

OBJETIVO

Analizar el vector de posición, la distancia entre dos puntos y la ecuación general de la recta, identificando las ecuaciones cartesianas.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En muchos de los problemas de ingeniería y arquitectura es necesario calcular distancias, y tener conocimientos fundamentales, relacionados con la recta y sus formas básicas.

Desde el punto de vista práctico, existen materias de aplicación que requieren conceptos trigonométricos y geométricos esenciales en construcción.

Esta unidad analiza la ecuación de la recta entre dos puntos y sus formas básicas y variables, referidas prácticamente a la obtención de distancias (siempre positivas), requeridas con frecuencia en el cálculo de superficies.

3.1. VECTOR DE POSICIÓN, DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

Como se ha descrito con anterioridad, el concepto de recta interviene en el momento mismo en que se establece un vector de posición, ya que el vector es un segmento de recta dirigido, que posee magnitud, dirección y sentido; entonces, a partir de dos puntos conocidos, puede obtenerse la ecuación de una recta en función de su pendiente.

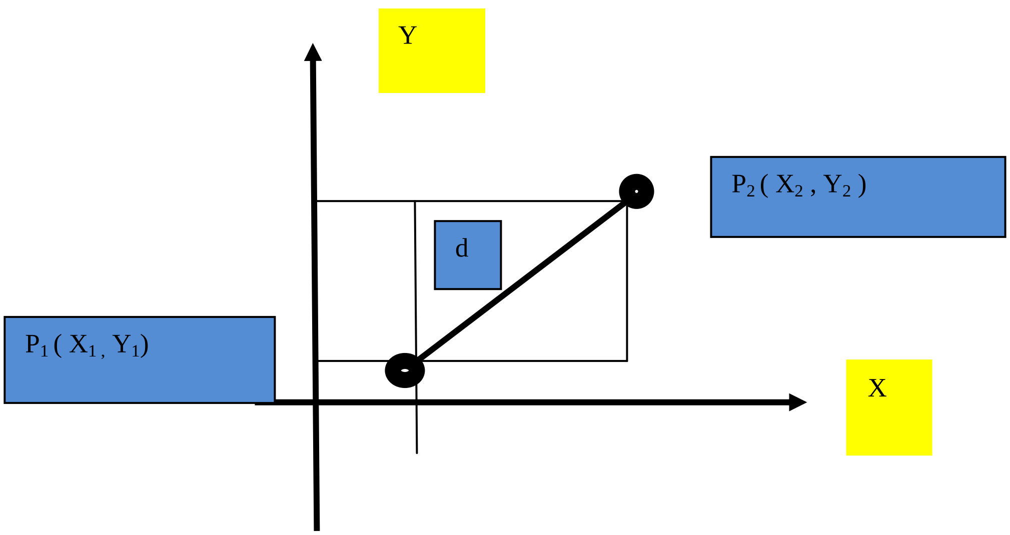


Figura 1. Representación de los dos puntos.

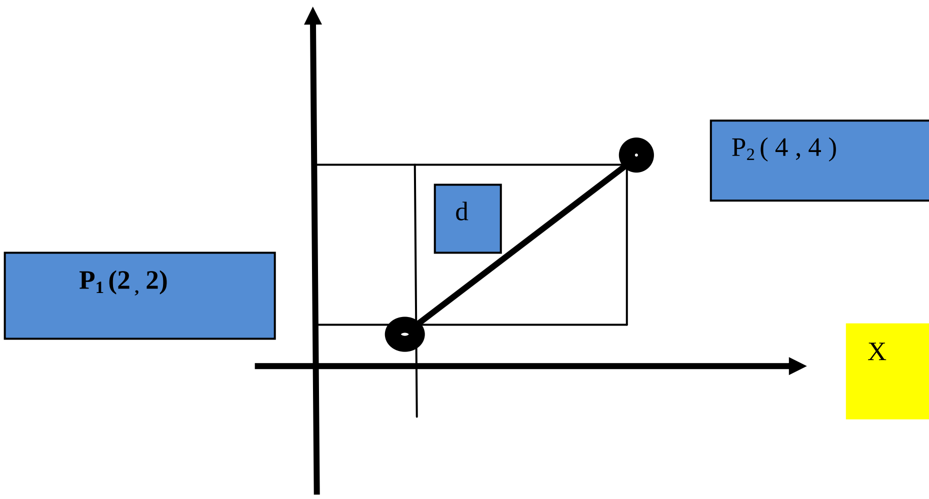
De la figura anterior y aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\left| d\,(P_1P_2) \right|^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2$$

$$d\,(P_1P_2) = [\,(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)\,]^{1/2}$$

Ejercicio 1. Calcular la distancia entre los puntos P_1 (2, 2) y P_2 (4, 4).

Graficando los puntos en el plano, se tiene:



d (P_1P_2) = **$[\,(4-2)^2 + (4-2)^2\,]^{1/2} = [\,(8)\,]^{1/2} = 2\,(2)^{1/2}$**

d (P_1P_2) = **$2\,(2)^{1/2}$**

3.2 ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA, FORMA CARTESIANA, FORMA VECTORIAL Y FORMA PARAMÉTRICA

Una recta es una línea que une dos puntos. Existen formas diversas, tal como se muestra a continuación:

Forma cartesiana

$$\boxed{AX + BY + C = 0}$$

Conocidos dos puntos se puede plantear la ecuación cartesiana de la recta.

Ecuación cartesiana de la recta en función de los dos puntos.

$$\boxed{Y - Y_1 = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\left(X - X_1 \right)}$$

Ecuación de la recta en función de la pendiente.

$$\boxed{Y = m x + b}$$

Ecuación de la recta en su forma normal.

$$\boxed{x \cos\theta + Y \operatorname{Sen}\theta - P = 0}$$

Ejercicio 2. Tomando los puntos P_1 y P_2 del ejercicio anterior, obtener la ecuación de la recta.

Solución

$$Y - 2 = \frac{4 - 2}{4 - 2}\left(X - 2 \right)$$

$$Y - 2 = \frac{2}{2}\left(X - 2 \right)$$

$$Y - 2 = 1\left(X - 2 \right)$$

$$Y - 2 = X - 2 \qquad \boxed{Y = X}$$

Forma vectorial

La forma vectorial de la recta obedece a los vectores de posición y se presenta como:

$$\boxed{A\,x\,i + B\,y\,j + C\,z\,k = 0}$$

Forma paramétrica

Implica el uso de la variable (t) representativa de la forma paramétrica lineal.

$$\boxed{X = a\,t + c} \qquad \boxed{Y = b\,t + c}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 3. Obtener la ecuación de la recta y la gráfica correspondiente del siguiente sistema en coordenadas paramétricas.

$$\begin{cases} X = 3\,t - 6 & \ldots (1) \\ Y = 4\,t + 2 & \ldots (2) \end{cases}$$

Solución

Despejando (t) de la ecuación (1), se tiene:

$3\,t = x + 6 \Longrightarrow t = (x + 6) / 3$

Sustituyen (t) en la ecuación (2), se tiene:

$$Y = 4 \left((x + 6) / 3 \right) + 2$$

Y = 4 / 3 x + 8 + 2 = 4 x + 10

$$\boxed{Y = 4 / 3\,x + 10}$$

Cuando:

$X = 0$ $y = 4(0) + 10 = 10$; $Y = 10$

$Y = 0$ $4/3x = 0 - 10$; $x = -10/4$ $X = -15/2$

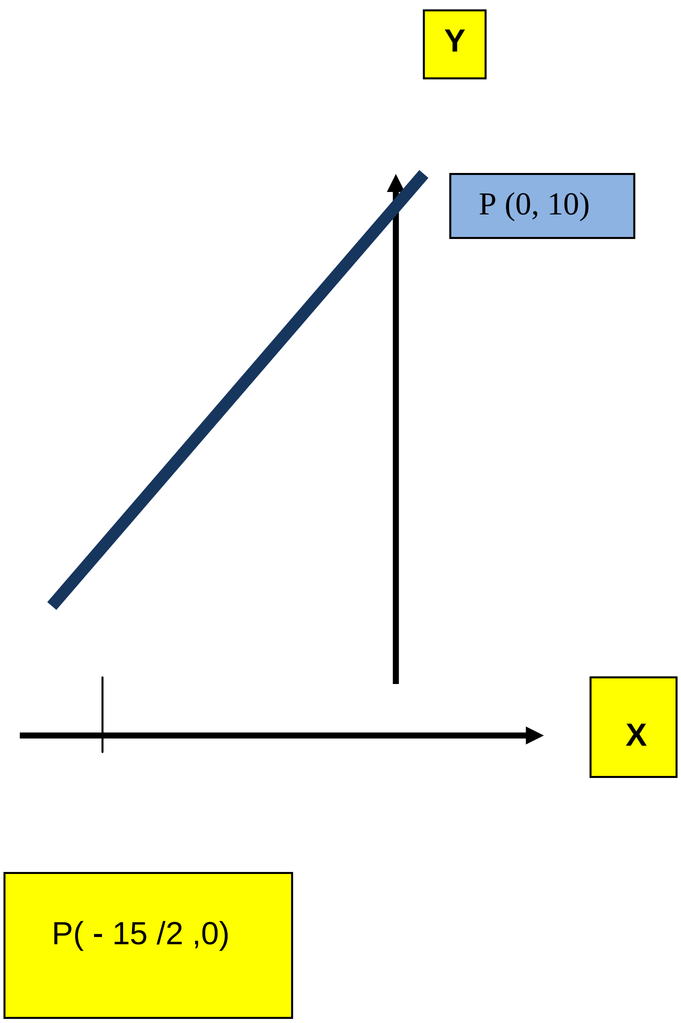


Figura 3.Gáfica de la ecuación $y = 4/3\,x + 10$

AUTOEVALUACIÓN

1 ¿Defina el concepto de distancia entre dos puntos?

2. ¿Cuál es el principio matemático que fundamenta la fórmula de la distancia entre dos puntos?
3. Escriba la ecuación de la recta en función de los dos puntos.
4. ¿Cómo son las potencias de las variables de una recta?
5. Escriba la forma general de la recta.
6. Escriba la ecuación paramétrica de la recta.
7. Escriba la ecuación vectorial de la recta.
8. Defina el concepto de recta.
9. Justifique en forma práctica la aplicación de la fórmula de los dos puntos en problemas reales de ingeniería.
10. Escriba la ecuación de la recta en función de su pendiente.

Ejercicios propuestos

1. Obtener la ecuación de la recta en función de los dos puntos.
a) P_1 (2, 2) y P_2 (3, 4).
b) P_4 (3, 4) y P_3 (6, 6).
c) P_5 (4, 6) y P_6 (7, 7).

2. Sea la ecuación general de la recta: **x + 2 y = 3**; obtener:
a) La forma pendiente.
b) La intersección con los ejes.
c) La gráfica correspondiente.
3. Sea la ecuación general de la recta: X + 3y = 4; obtener:
a) La forma normal de la recta.
b) La intersección con los ejes.
c) La gráfica correspondiente.

UNIDAD 4

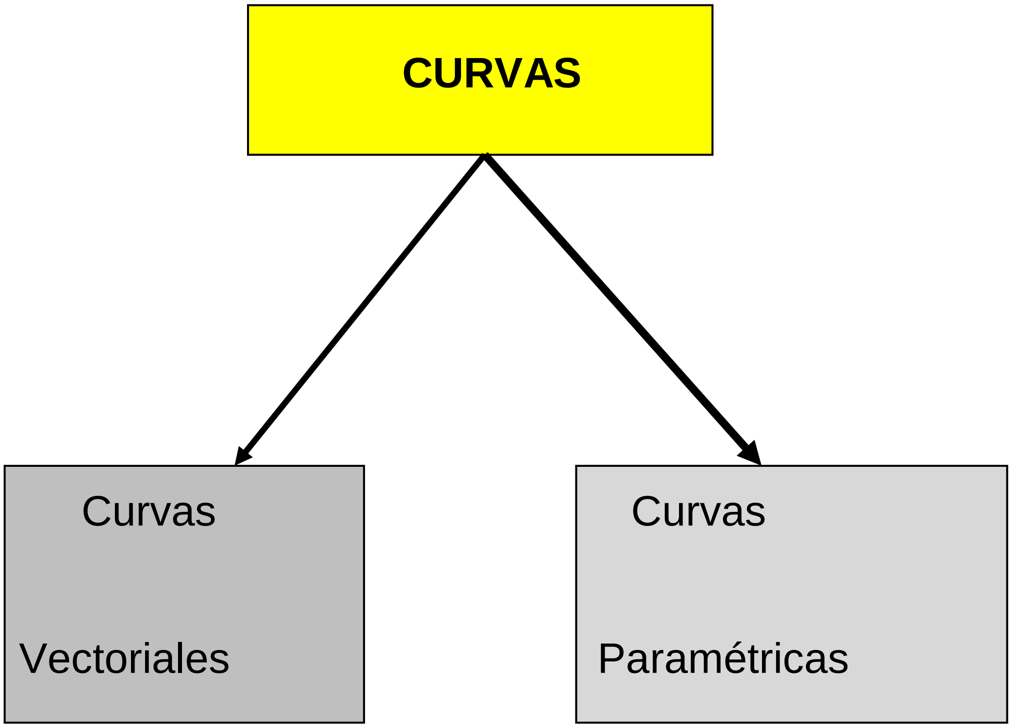
CURVAS

OBJETIVO

Definir las ecuaciones cartesianas y polares de una curva plana.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

El estudio de las curvas facilita la comprensión de diversas formas geométricas relacionadas con la arquitectura, cuyos estilos y formas conciben a la construcción como una arte estética.

Muchos de los diseños constructivos implican formas curvas que requieren fórmulas de cálculo analizadas en la presente unidad; a continuación se estudian las formas básicas de las curvas como la circunferencia, que facilitan la construcción de columnas jónicas, por ejemplo, cuyo colado está basado en la forma geométrica de un cilindro circular recto.

Existen formas propias de las curvas expresadas en coordenadas cartesianas, polares, cilíndricas y esféricas que al ser presentadas en una forma específica se comportan geométricamente como tales, pero al ser transformadas en su equivalente a cartesianas, cambian totalmente su trayectoria, transformándose casi en rectas.

4.1 ECUACIONES VECTORIALES

Las ecuaciones vectoriales están relacionadas directamente con las formas polares, a partir de las cuales, se obtienen diversas variantes en cuyo contexto existe lógicamente un comportamiento no lineal que reitera la presencia de una curva.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 1. Transformar la siguiente ecuación de una curva de coordenadas cartesianas a polares.

$(X^2 + Y^2)^2 = 4 X Y$

Recordar que:

$X = r \cos \theta$ $\qquad r^2 = X^2 + Y^2$

$Y = r \operatorname{sen} \theta$ $\qquad r = X^2 + Y^2$

$(r^2)^2 = 4 x y$

$r^2 \bullet r^2 = 4 (r \cos \theta)(r \operatorname{sen} \theta)$

$$r^2 = \frac{4 r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta}{r^2}$$

$$\boxed{r^2 = 4 \cos \theta \operatorname{sen}\theta}$$

Ejercicio 2. Transformar la siguiente ecuación representativa de una parábola de coordenadas cartesianas a polares.

$$Y = X^2$$

$$r \ \text{sen}\,\theta = (r\cos\theta)^2$$

$$r\,\text{sen}\,\theta = r^2\cos^2\theta$$

$$r\cos^2\theta = \text{sen}\,\theta$$

$$r = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta\ \cos\theta}$$

$$\boxed{r = \tan\theta\sec\theta}$$

Ejercicio 3. Transformar la ecuación de la circunferencia expresada en coordenadas polares, a su equivalente en coordenadas cartesianas.

$$r = 4\,\text{sen}\,\theta$$

Multiplicando ambos miembros por r.

$$\boxed{r^2 = 4\,r\,\text{SEN}\,\theta}$$

$$(x^2 + y^2) = 4\,y$$

$$(x^2 + y^2) - 4y = 0$$

$$X^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0$$

$$X^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4$$

$$X^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Con centro c (0 , 2) y r = ± 2

Ejercicio 4. $r = \dfrac{\mathbf{5}}{(3 + 2 \text{ sen } \theta)}$

$$r (3 + 2 \text{ sen } \theta) = 5$$

$$3r + 2r \text{ sen } \theta = 5$$

Sustituyendo en coordenadas cartesianas, se tiene:

$$3 \sqrt{(x^2 + y^2)} + 2y = 5$$

$$\left[3 \sqrt{(x^2 + y^2)} \right]^2 = (5 - 2y)^2$$

$$9 (x^2 + y^2) = 25 - 20y + 4y^2$$

$$9x^2 + 9y^2 = 25 - 20y + 4y^2$$

$$9\ x^2 + 9\ y^2 + 20\ y - 4\ y^2 = 25$$
$$9\ x^2 + 5\ y^2 + 20\ y\ = 25$$

$$\left(9\ x^2 + 5\ y^2 + \ 20\ y = \ \ 25\right)\left(1\ /\ 5\right)$$

$$9\ /\ 5\ x^2 + y\ ^2 + 4\ y = 5$$

$$9\ /\ 5\ x^2\ \ +\ \ \ \ y^2 + \left(4\ y + 4\ \ -\ \ 4 = \right)5$$

$$9\ /\ 5\ x^2\ \ + y^2 + 4\ y + 4 - 4\ \ = 5$$

$$9\ /\ 5\ x\ ^2\ \ + (y^2 + 4\ y\ \ +\ \ 4)\ = 5 + 4$$

$$9\ /\ 5\ x\ ^2\ \ +\ \ (y\ \ + 2\ y)^2\ \ = (5\ \ +4)$$

$$\boxed{9\ /\ 5\ x^2\ \ +\ \ (y + 2)^2\ \ = (9)}$$

$$\left(9\ /\ 5\ x\ ^2\ \ +\ \ \ (y + 2\ )^2\ \ =\ \ 9\right)\left(1\ /\ 9\right)$$

$$1\ /\ 5\ x\ ^2\ \ +\ \ \ \ \ (y\ \ + 2)^2\ /\ \ 9\ \ = 9\ /\ 9$$

$$\boxed{1\ /\ 5\ x\ ^2\ \ +\ \ (y + 2)^2\ /\ 9\ \ = 1}$$

Que representa la ecuación de una elipse.

4.2 CURVAS PARAMÉTRICAS

Están asociadas directamente con la funciones f (t) y g (t), respectivamente, y reciben el nombre de curvas paramétricas, representando una extensión más de las coordenadas polares.

Partiendo de las ecuaciones de transformación en coordenadas polares, se tiene que:

$$X = r \cos \theta \qquad y \qquad Y = r \text{ sen } \theta$$

$$\text{Pero: } \begin{cases} r = f(t) \\ r = g(t) \end{cases}$$

Entonces:

$$\boxed{X = f(t) \cos\theta} \qquad y \qquad \boxed{Y = f(t) \text{ sen}\theta}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 5. Transformar las siguientes curvas paramétricas a coordenadas cartesianas.

a)
$$\begin{cases} X = 3 \cos t \\ Y = 3 \text{ sen } t \end{cases}$$

$$\boxed{X^2 + Y^2 = (3 \cos t)^2 + (3 \text{ sen } t)^2}$$

$$X^2 + Y^2 = 9 (\cos^2 t + \text{sen}^2 t)$$

Aplicando la identidad trigonométrica correspondiente:

$$X^2 + Y^2 = 9 (\cos^2 t + \text{sen}^2 t)$$

$$X^2 + Y^2 = 9 (1)$$

$$\boxed{X^2 + Y^2 = 9}$$

Es una circunferencia con centro en el origen y radio 3

$$\boxed{C (0, 0) \quad y \quad r = \pm 3}$$

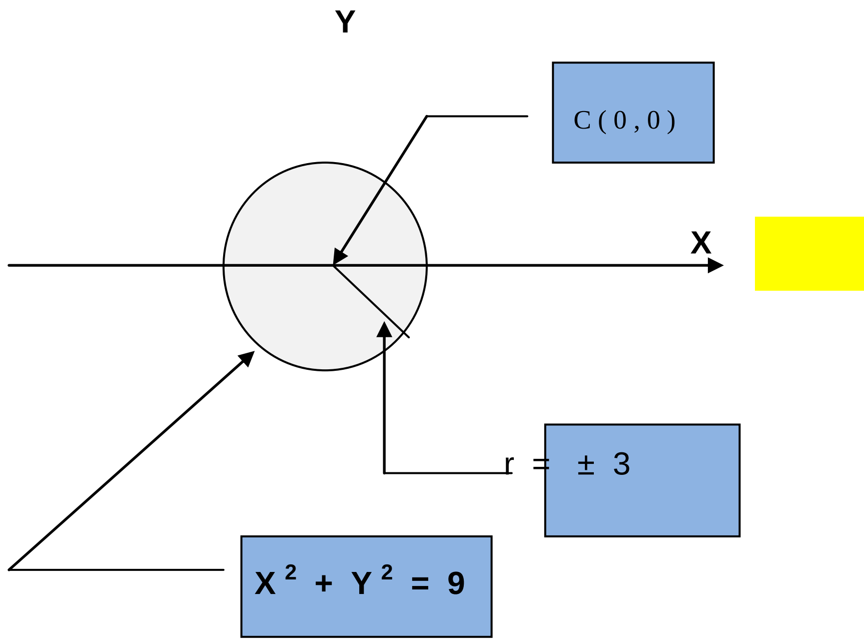


Figura 1. Gráfica de la circunferencia $X^2 + Y^2 = 9$

b) $\begin{cases} X = \cos t \\ Y = \text{sen } t \end{cases}$

$$X^2 + Y^2 = (\cos t)^2 + (\text{sen } t)^2$$

$$X^2 + Y^2 = (\cos^2 t + \text{sen}^2 t)$$

Aplicando la sustitución trigonométrica correspondiente:

$$X^2 + Y^2 = (1)$$

$$\boxed{X^2 + Y^2 = 1}$$

Es una circunferencia con centro en el origen y radio 1

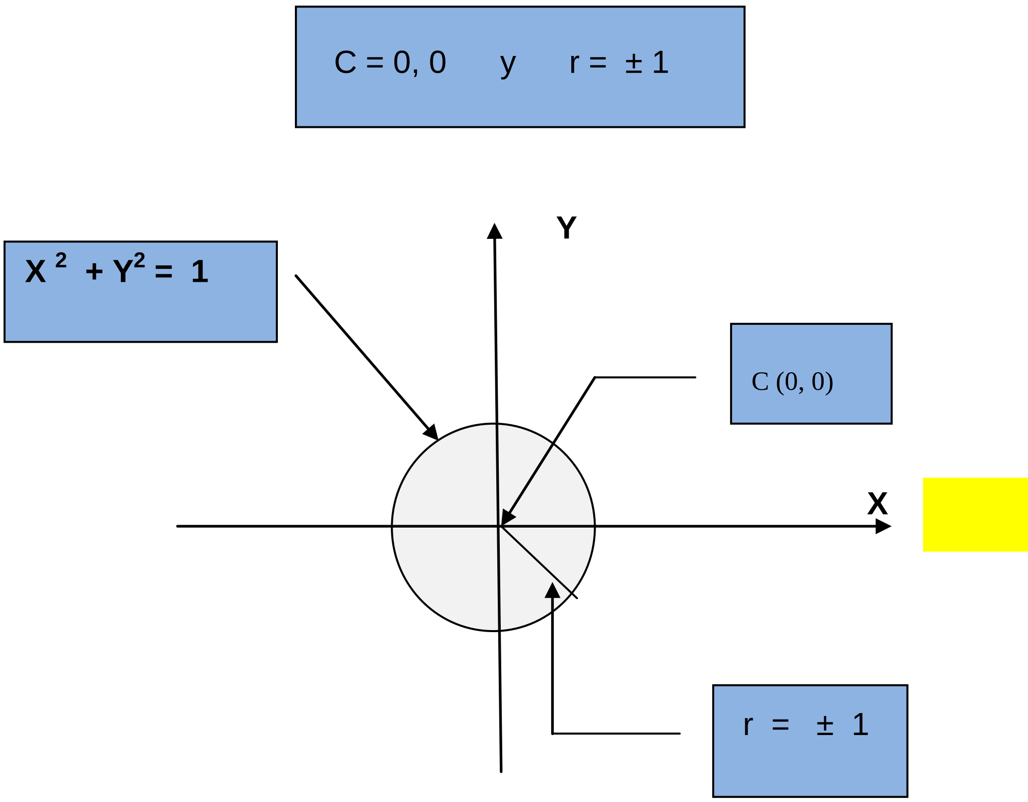


Figura 1. Gráfica de la circunferencia $X^2 + Y^2 = 1$

AUTOEVALUACIÓN

1.¿Defina el concepto de curva?

2. ¿Cómo son las potencias de las variables involucradas en la ecuación de una curva?

3. ¿Por qué se afirma que una curva no experimenta un comportamiento lineal?

4. ¿Defina el concepto de ecuaciones vectoriales de una curva?

5. ¿Defina el concepto de ecuaciones para métricas?

6. ¿Cuáles son las funciones que aparecen en las ecuaciones para métricas?

7. ¿Escriba el concepto matemático de curva para métrica?

8. ¿Cuál es la forma general que adoptan las curvas paramétricas al sufrir una transformación a coordenadas cartesianas?

9. ¿Cuáles son los elementos geométricos de una circunferencia?

10. ¿Cómo se calcula el centro de una circunferencia?

Ejercicios propuestos

1. Transformar las siguientes curvas paramétricas a coordenadas cartesianas.

a) $\begin{cases} X = 2 \cos t \\ Y = 2 \text{ sen } t \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} X = 5 \cos t \\ Y = 5 \text{ sen } t \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} \sqrt{(2)} \left(\cos t \right) \\ \sqrt{(2)} \left(\text{sen } t \right) \end{cases}$

2.Transformar la siguiente ecuación de la elipse expresada en coordenadas polares, a su equivalente en coordenadas cartesianas.

a) $\mathbf{r = \dfrac{5}{3 + 2 \text{ sen } \theta}}$; ***b)*** $\mathbf{r = \dfrac{4}{2 + \text{sen } \theta}}$

3. Transformar la ecuación de la circunferencia expresada en coordenadas polares, a su equivalente en coordenadas cartesianas.

a) $r = 4 \text{ sen } \theta$ b).- $r = 5 \text{ sen } \theta$ c).- $r = 6 \text{ sen } \theta$

UNIDAD 5

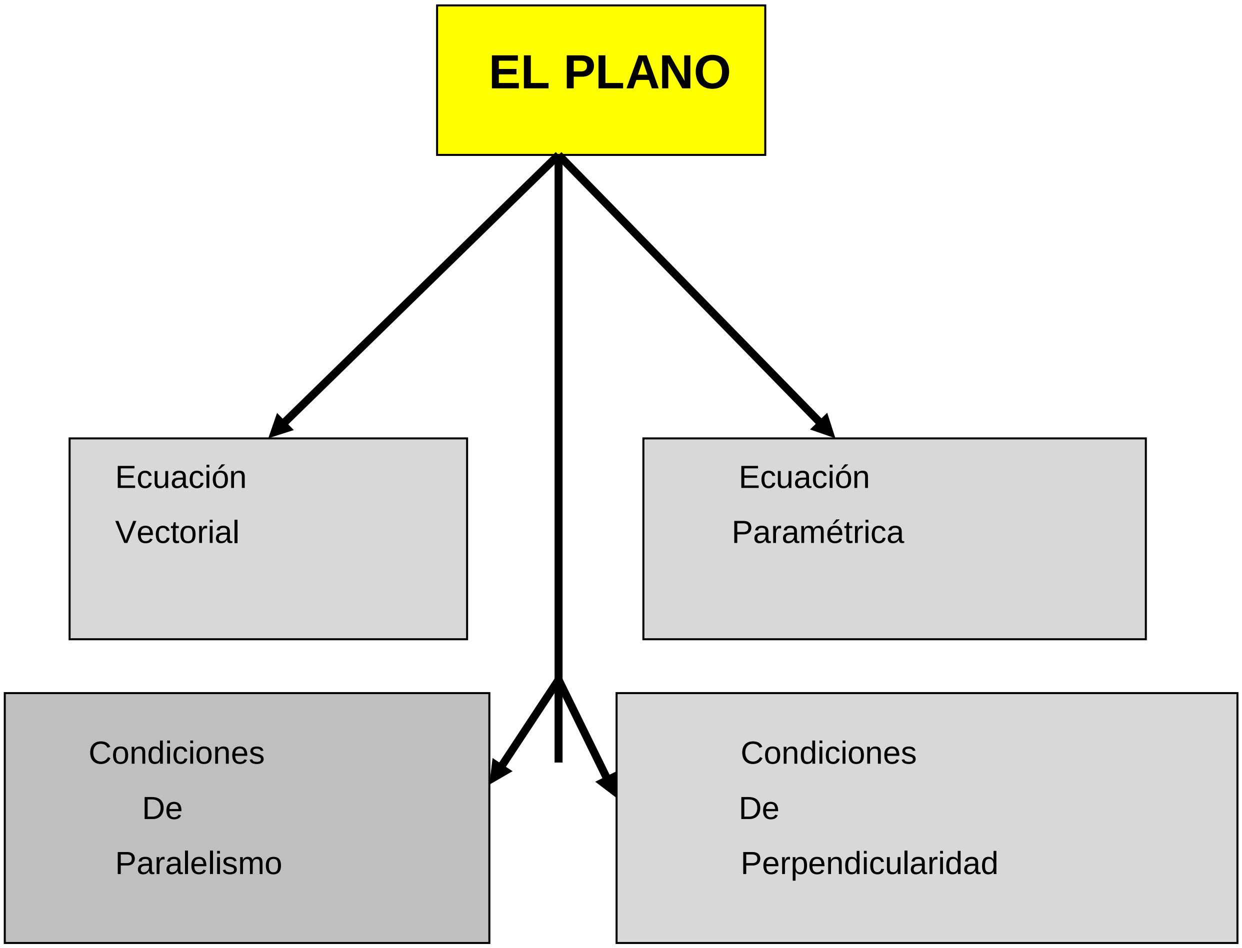
EL PLANO

OBJETIVO

Analizar la ecuación vectorial y paramétrica del plano.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Muchas de las formas y perspectivas utilizadas en arquitectura requieren el conocimiento del dibujo, sobre todo en el area de geometria descriptiva. Sin embargo, en muchos de las representaciones es necesario conocer la fórmula requerida para la interpretaciòn del plano.

El plano obedece la ecuación en forma práctica de una recta, es decir, una funciòn expresada en primera potencia, que se corta con otra, para conformar una sola superficie.

El concepto de plano es muy utilizado, en la industria de la construcciòn para la interpretaciòn fìsica de diversos fenómenos, terrenos, losas, etc. Es decir, es uno de los fundamentos tomados como base en el cálculo.

5.1 Ecuación vectorial y paramétrica del plano

El plano es una región específica limitada por dos ejes perfectamente definidos. Si N es un vector dado diferente del vector cero y P_0 es un punto dado, entonces el conjunto de todos los puntos para los cuales V ($\overrightarrow{P_0 P}$) y N son ortogonales define al plano que pasa por P_0 y tiene a N como vector normal.

En el espacio, un plano sólido quedará representado de la siguiente forma:

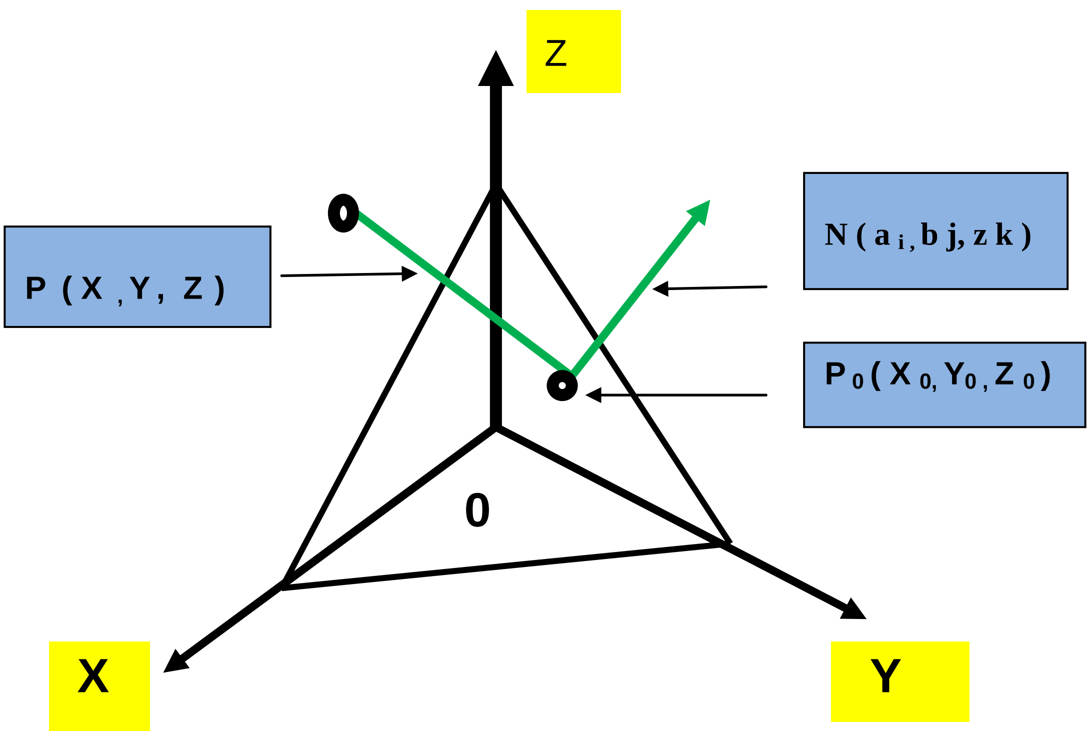


Figura 1. Representación de un plano sólido en el espacio.

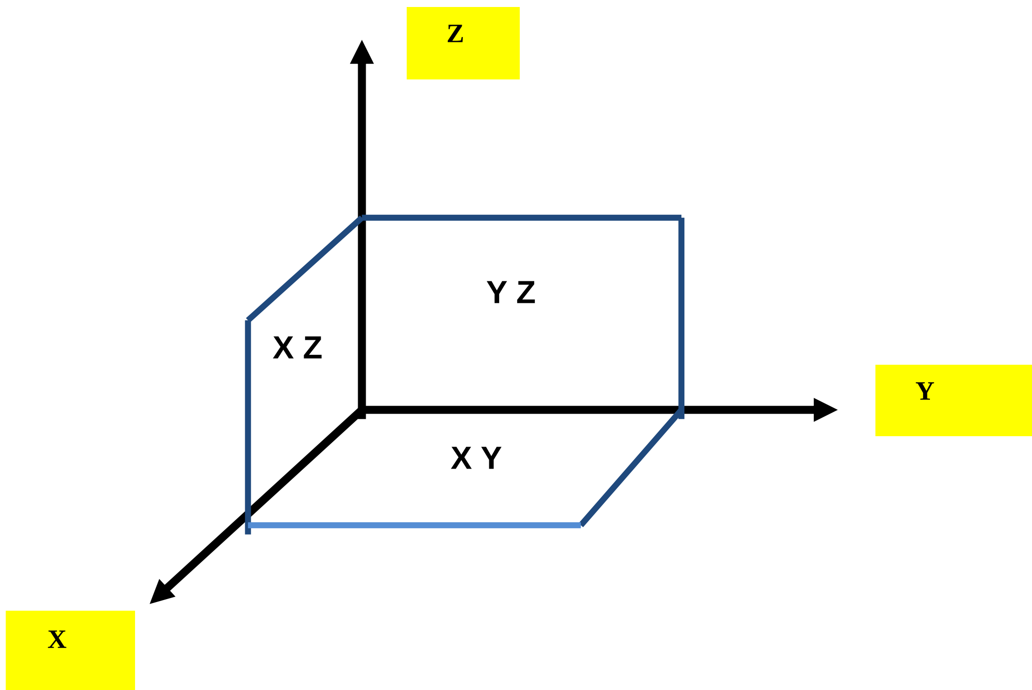


Figura 2. Representación de los planos en el espacio.

Condiciones geométricas de los planos

Un plano presenta una recta paralela a “XY”, si las coordenadas de z son iguales.

Una recta es paralela al plano “XZ”, si las coordenadas de la recta en Y son iguales.

Una recta es paralela al plano “YZ”, si las coordenadas de la recta en X son iguales.

De las figuras anteriores, es necesario considerar que la representación geométrica de un plano se obtendrá con base en el producto punto, descrito en la unidad correspondiente al álgebra vectorial.

Ecuación vectorial del plano

Si P_0 (X_0 , Y_0 , Z_0) es un punto de un plano y (a, b, c) es un vector normal al plano, entonces puede establecerse una ecuación del plano:

$$\mathbf{V}\,(\overrightarrow{\mathbf{P\,P_0}}) = (X - X_0,\ Y - Y_0,\ Z - Z_0)$$

Efectuado el producto punto entre el vector ($\vec{v}$) y el vector normal ($\vec{N}$), se tiene que:

$$V\,(\overrightarrow{P\,P_0}) \cdot (\vec{N}) = \left((x - X_0)\,i,\ (y - y_0)\,j,\ (y - Y_0)\,k \right) . \left(a\,i,\ b\,j,\ c\,k \right)$$

Desarrollando la expresión se tiene:

$$\boxed{V\,(\overrightarrow{P\,P_0}) \cdot (\vec{N}) = \left(a\,(x - X_0) + b\,(y - y_0) + c\,(y - Y_0) \right)}$$

Finalmente puede obtenerse:

Forma general del plano

$$\boxed{\mathbf{a\,(x - X_0) + b\,(y - y_0) + c\,(y - Y_0) = 0}}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 1. Dado el Punto P_0 (2, 3, 4) y el vector $\vec{N}$ (3 i, 2 j, 3 k), obtener la ecuación general del plano.

$a (x - X_0) + b (y - y_0) + c (y - Y_0) = 0$

Solución

$3 (X - 2) + 2 (y - 3) + 3 (z - 4) = 0$

$3 x - 6 + 2 y - 6 + 3 z - 12 = 0$

$$\boxed{3 x + 2 y + 3 z - 24 = 0}$$

Ejercicio 2. Dado el Punto P_0 (1, 1, 2) y el vector $\vec{N}$ (2 i, 2 j, k), obtener la ecuación general del plano.

$a (x - X_0) + b (y - y_0) + c (z - z_0) = 0$

$2 (X - 1) + 2 (y - 1) + (z - 2) = 0$

$2 \quad X - 2 + 2 Y - 2 + Z - 2 = 0$

$$\boxed{\mathbf{2 X + 2 Y + Z - 6 = 0}}$$

Ejercicio 3. Dadas las ecuaciones de los planos establecidos como:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ i + j + 2k = 0 \end{cases}$$

Calcular el ángulo formado entre ellos.

Solución:

Expresando las ecuaciones en forma de vectores unitarios, se tiene:

$$\begin{cases} 2i + 3j + 4k = 0 \\ i + j + 2k = 0 \end{cases}$$

$$\cos\theta = \frac{(2i, 3j, 4k) \cdot (i, j, 2k)}{\left(\sqrt{(29)}\right)\left(\sqrt{(6)}\right)} = \frac{13}{\left(\sqrt{(6)}\ \sqrt{(29)}\right)}$$

$$\Theta = \text{ARC COS}\left(\frac{13}{\sqrt{6}\ \sqrt{29}}\right)$$

$$\boxed{\Theta = 9^{o}\ 45'\ 34.82''}$$

Ecuación vectorial del plano

Un plano se representa en forma paramétrica de la siguiente forma:

$$\begin{cases} X = a\,t + x_0 \\ Y = b\,t + y_0 \\ Z = c\,t + z_0 \end{cases}$$

Entonces se tiene:

$$X + Y + Z = 0$$

$$\boxed{(a\,t + x_0) + (b\,t + y_0) + (c\,t + z_0) = 0}$$

Ejercicio 4. Sea el vector unitario $\overrightarrow{R}$ (i, j, 2 k) y el punto P_0 (2, 2, 3), obtener:

a) Las ecuaciones paralelas al plano.

b) La ecuación general del plano.

c) La ecuación paramétrica del plano.

Solución

a) La ecuación paralela del plano.

$$X = a\,t + x_0$$

$$Y = b\,t + y_0$$

$$Z = c\,t + z_0$$

$$\begin{cases} X = t + 2 \\ Y = t + 2 \end{cases}$$

$$Z = 2t + 3$$

b) La ecuación general del plano.

$$\boxed{X + Y + Z = 0}$$

c) La ecuación paramétrica del plano.

$$(a\,t + x_0) + (b\,t + y_0) + (c\,t + z_0) = 0$$

$$(t + 2) + (t + 2) + (2t + 3) = 0$$

$$\boxed{4t + 7 = 0}$$

Ejercicio 5. Sea el vector de posición $\vec{R}$ (2 i, 3 j, 4 k) y el punto P_0 (1, 2,1); obtener:

a) Las ecuaciones paralelas al plano.
b) La ecuación general del plano.
c) La ecuación paramétrica del plano.

a) La ecuación paralela del plano.

$$\begin{cases} X = 2t + 1 \\ Y = 3t + 2 \\ Z = 4t + 1 \end{cases}$$

b) La ecuación general del plano.

$$\boxed{X + Y + Z = 0}$$

c) La ecuación paramétrica del plano.

$$(2\,t + 1) + (3\,t + 2) + (4\,t + 1) = 0$$

$$\boxed{9\,t + 4 = 0}$$

5.2 RELACIÓN ENTRE DOS PLANOS Y UNA RECTA

A partir de dos planos y un punto determinado de coordenadas P_0 (x_0, y_0, z_0) puede obtenerse vectorialmente la ecuación del plano perpendicular a cada uno de los planos.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 6. Sean las ecuaciones del plano X + 2 Y + Z = 0 y X + Y + Z = 0; y P_0 (1, 2, 2); obtener la ecuación de la recta perpendicular a ambos planos.

Solución

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + c = -a \\ b + c = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + c = -k \\ -b - c = k \end{cases}$$

Del sistema de ecuaciones se tiene que: $\boxed{b = 0}$

$$2b + c = -k \Rightarrow c = -k - 2b \Rightarrow -k - 2(0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{C = -k}}$$

De la propuesta inicial a = k; que corresponde a un valor arbitrariamente asignado para una constante.

$$a(x - X_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$k\,(x - X_0) + 0\,(y - y_0) - k\,(z - z_0) = 0$$

$$k\,(x - X_0) - k\,(z - z_0) = 0$$

$$K \left[(x - X_0) - k\,(z - z_0) \right] = 0$$

$$K = 0$$

$$(x - X_0) - (z - z_0) = 0$$

$$(X - 1) - (Z - 2) = 0 \qquad \boxed{X - Z + 1 = 0}$$

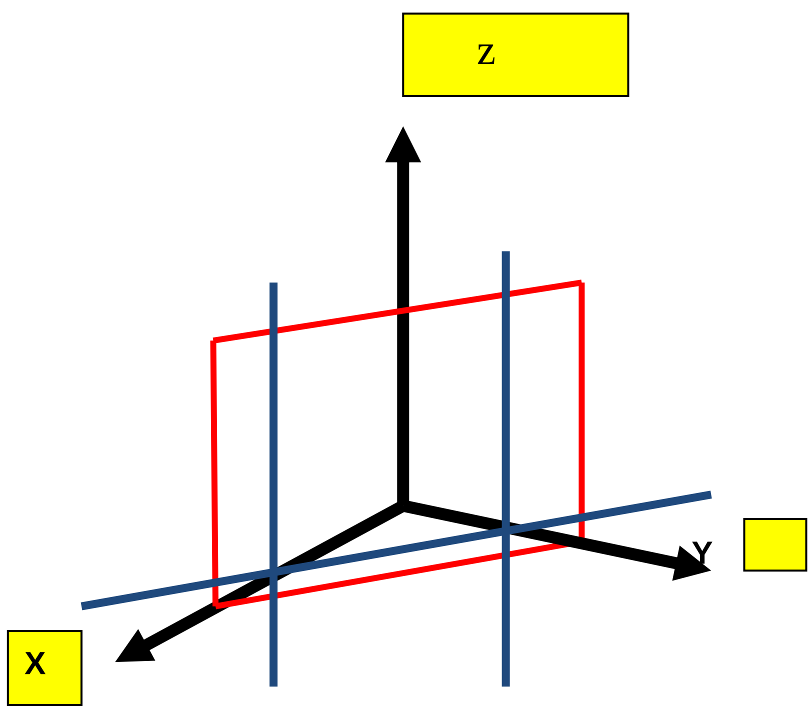


Figura 3. Plano perpendicular al plano X Z.

Ecuaciones simétricas de la recta

$$\frac{(x - X_0)}{a} = \frac{(y - y_0)}{b} = \frac{(z - z_0)}{c}$$

Equivalentes al sistema:

$b\,(X - X_0) = a\,(Y - Y_0)$

$c\,(X - X_0) = a\,(Z - Z_0)$

$c\,(y - Y_0) = b\,(Z - Z_0)$

5.3 ESTABLECER LAS CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTAS

Dos planos son paralelos si y sólo si sus vectores normales son paralelos.

Es necesario recordar que dos planos son paralelos si y sólo si uno de los vectores es un múltiplo escalar del otro. Si se tiene un plano con un vector normal N_1 y otro plano con un vector normal N_2 entonces los dos planos son paralelos si y sólo si

$$\boxed{\mathbf{N_1 = N_2}}$$

Donde K es una constante.

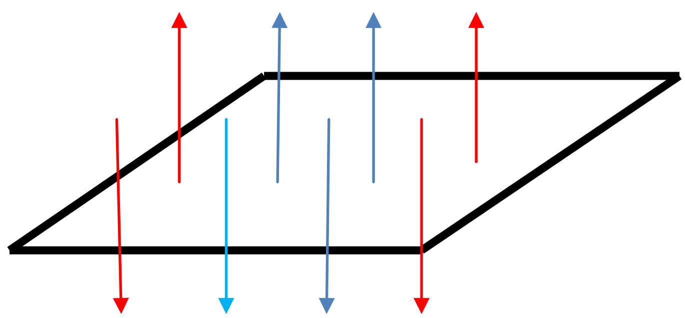


Figura 4. Planos paralelos entre sí.

Dos planos son perpendiculares si y sólo si sus vectores normales son ortogonales. De esta definición y del hecho de que dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto punto es cero, se infiere que dos planos, cuyos vectores normales son N_1 y N_2 son perpendiculares si y sólo sí

$$\boxed{\mathbf{N_1 \cdot N_1 = 0}}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Defina el concepto de plano?
2. ¿Cuándo se afirma que una recta es paralela al plano XY?
3. ¿Cuándo se afirma que una recta es paralela al plano XZ?
4. ¿Cuándo se afirma que una recta es paralela al plano YZ?
5. Establezca la ecuación general del plano.
6. Establezca la ecuación vectorial del plano.
7. Establezca la ecuación paramétrica del plano.
8. Defina el concepto de planos paralelos.
9. Explique el concepto de planos perpendiculares.
10. Escriba las ecuaciones simétricas de la recta.

Ejercicios propuestos

1. Dado el Punto P_0 (1, 2, 3) y el vector $\vec{N}$ (2 i, 3j , 2 k), obtener la ecuación general del plano.
2. Dado el Punto P_0 (1, 3, 3) y el vector $\vec{N}$ (3 i, 4 j, 3 k), obtener la ecuación general del plano.
3. Dadas las ecuaciones de los planos establecidos como:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ i + j + 2k = 0 \end{cases}$$

Calcular el ángulo formado entre ellos.

4.- Sean las ecuaciones del plano $X + 2Y + Z = 0$ *y* $X + Y + Z = 0$; *y* P_0 *(1, 2, 2);* obtener la ecuación de la recta perpendicular a ambos planos.

5. Sea el vector de posición R (2 i, 3 j, 4 k) y el punto P_0 (1, 2,1); obtener:

a) Las ecuaciones paralelas al plano.

b) La ecuación general del plano.

c) La ecuación paramétrica del plano.

6. Dadas las ecuaciones de los planos establecidos como:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = 0 \\ i + j + 2k = 0 \end{cases}$$

Calcular el ángulo formado entre ellos.

UNIDAD 6

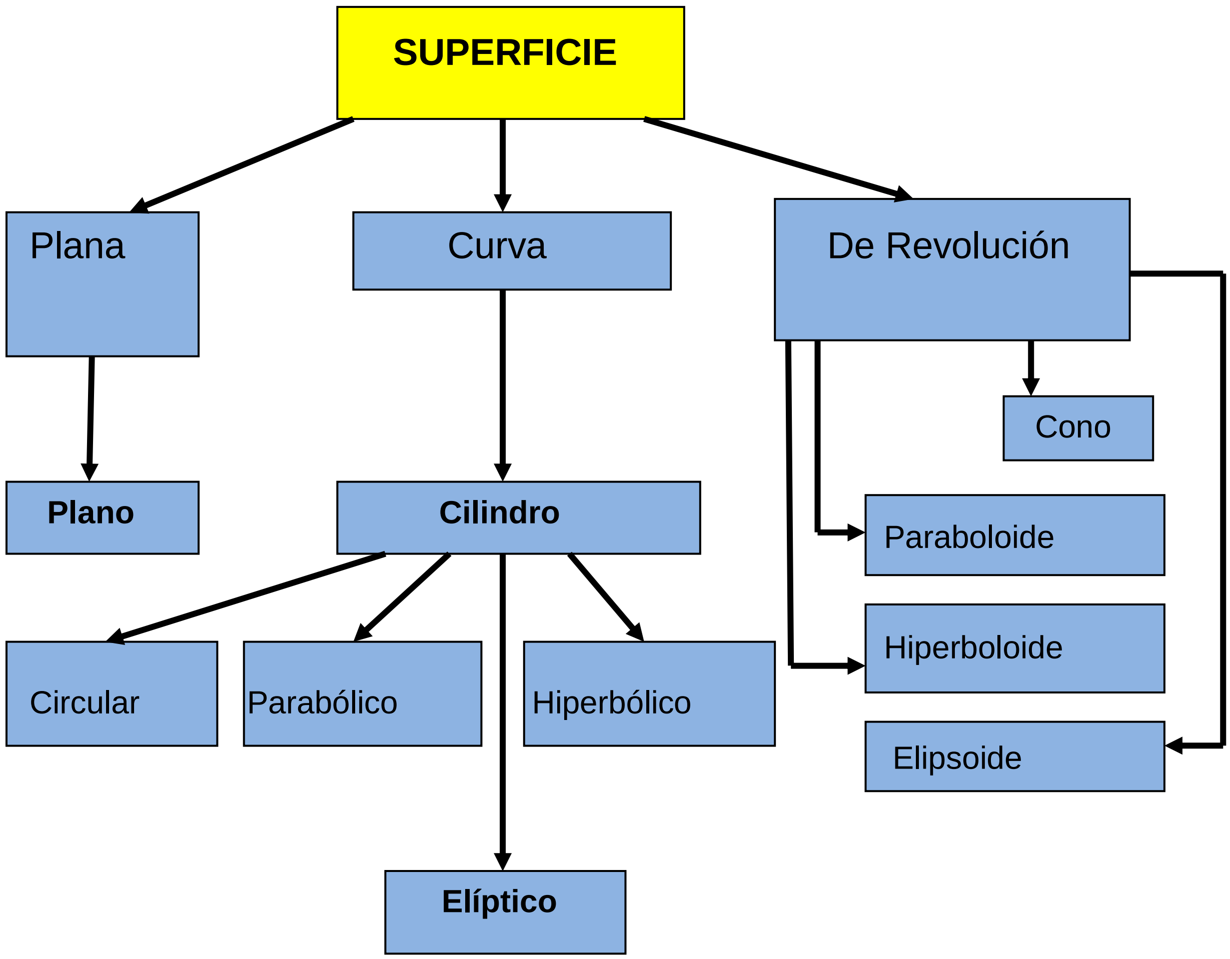
SUPERFICIES

OBJETIVO

Definir el concepto de superficie en función de sus ecuaciones (vectoriales y cartesianas).

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Como se observó en la unidad anterior, desde el momento mismo que se analiza un plano, se aplica un razonamiento lógico sobre una superficie determinada, que en el espacio se representa en coordenadas de R^3 (x, y,).

Al analizar un plano en movimiento se estudia a una superficie en movimiento, un cilindro en movimiento, una esfera en movimiento, una parábola o hipérbola en movimiento, y demás combinaciones gráficas que permiten identificar y definir perfectamente a una superficie como un sólido de revolución.

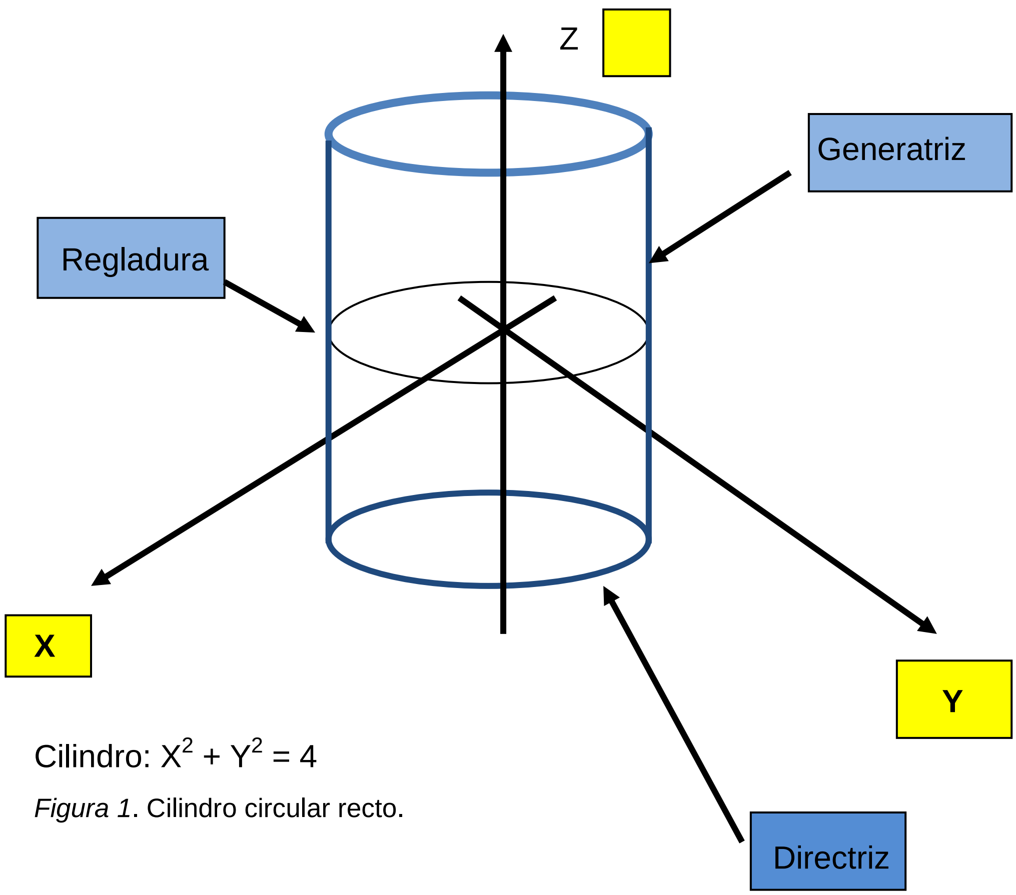
Muchos de los diseños arquitectónicos presentan formas y estructuras geométricas, cuyas superficies pueden ser planas o provocar una sensación de profundidad por medio de un comportamiento no lineal en el caso de las esferas y los cascarones, domos, cúpulas, etcétera.

Esta unidad analiza las superficies curvas más comunes, observando las rectas que las generan, así como las llamadas curvas base cuyo movimiento está restringido, precisamente, por un directriz.

6.1 Definición de superficies y su representación cartesiana

Una superficie está representada por una ecuación en tres variables, si las coordenadas de cada punto de la superficie satisfacen la ecuación, y si cada punto cuyas coordenadas verifican la ecuación pertenece a la superficie.

Un cilindro es una superficie generada por una recta que se mueva a lo largo de una curva plana, de tal forma que siempre permanece paralela a una recta fija que no está contenida en el plano de la curva dada. La recta que se mueve se llama generatriz del cilindro, y la curva plana dada se llama directriz del cilindro. Cualquier posición de una generatriz recibe el nombre de regladura del cilindro.



Cilindro: $X^2 + Y^2 = 4$

Figura 1. Cilindro circular recto.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 1. Analizar la superficie cuya ecuación de la directriz es una elipse expresada como: $9\ X^2 + 16\ Y^2 = 144$

Es un cilindro elíptico, su directriz es la ecuación de la elipse: $9\ X^2 + 16\ Y^2 = 144$; la cual está en el plano *XY*, y sus regladuras son paralelas al eje *z*.

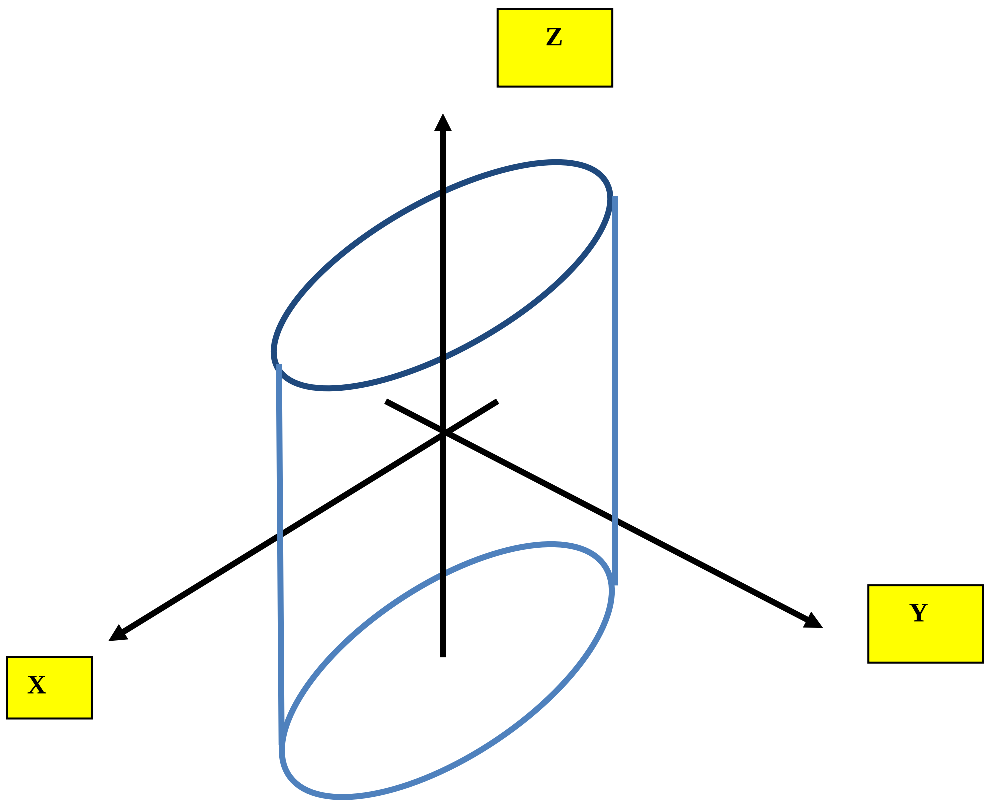


Figura 2. Cilindro elíptico.

Elipse: $9\ X^2 + 16\ Y^2 = 144$

Como se observa en la figura 1 y 2, la mayoría de las superficies curvas ofrecen un comportamiento cilíndrico cuya directriz presenta como base a ecuaciones cartesianas de segundo grado, representativa de circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas.

La gráfica de una ecuación en R^3 es el conjunto de puntos (x, y, z) cuyas coordenadas son números que satisfacen la ecuación. Una superficie es la gráfica de una ecuación en $R^{3.}$

Una esfera, el conjunto de todos los puntos del espacio tridimensional que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina centro de la esfera y la medida de la distancia constante se llama radio.

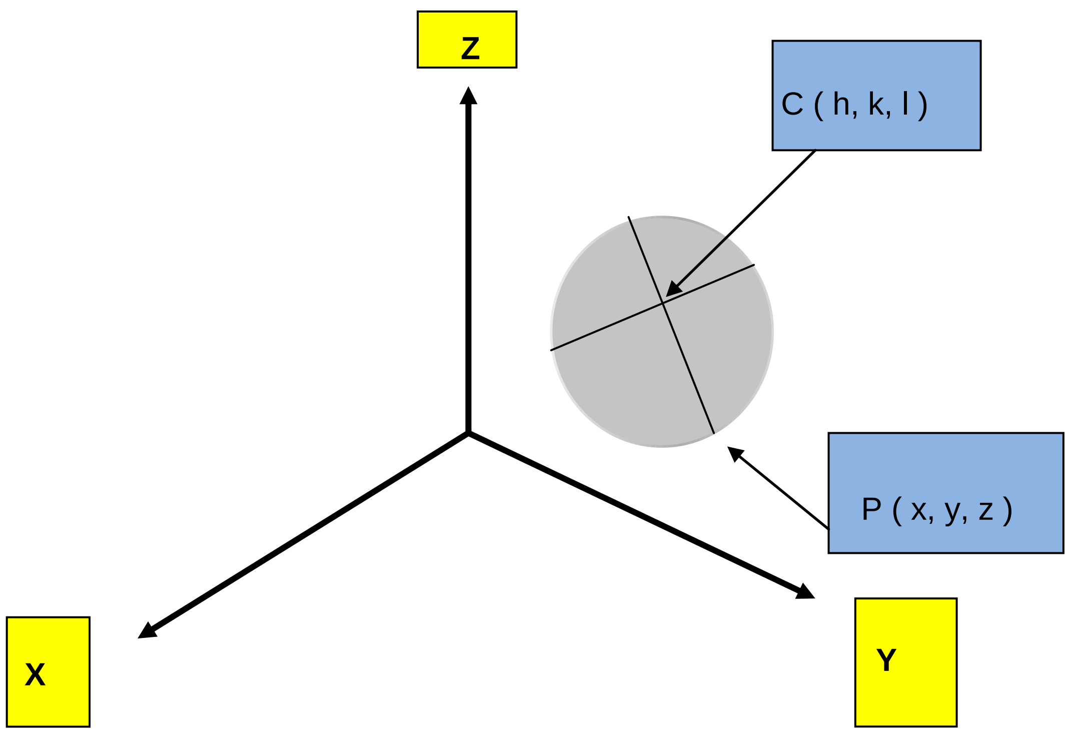


Figura 3. Esfera, cuya ecuación es: $(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l) = r^2$

6.2 DETERMINACIÓN DE LA ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE EN FUNCIÓN DE LAS GENERATRICES.

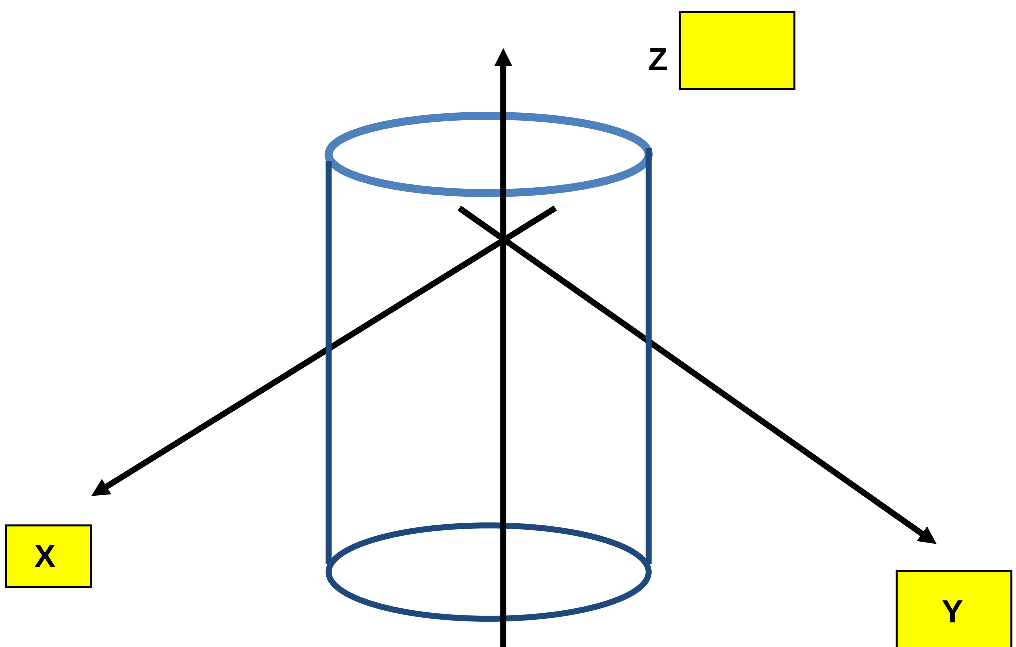
Como se discutió anteriormente, la directriz es la ecuación de segundo grado, que establece precisamente la curva base que dará origen a una superficie determinada. Analizar e identificar a una superficie determinada, depende directamente de la habilidad desarrollada para reconocer a las curvas básicas, cuya forma geométrica y fórmula, está perfectamente establecida.

6.3 IDENTIFICACIÓN DE UNA SUPERFICIE A TRAVÉS DE SUS ECUACIONES

Todas las superficies pueden identificarse a partir de la curva generatriz, para lo cual es necesario identificar el tipo de ecuación cartesiana de que se trate.

Ejercicio 2. Analizar la superficie cuya ecuación de la directriz es una circunferencia expresada como: $X^2 + Y^2 = 16$

Es un cilindro circular recto, su directriz es la ecuación de la circunferencia: la $X^2 + Y^2 = 16$ el cual está en el plano *XY*, y sus regladuras son paralelas al eje z.



Cilindro: $X^2 + Y^2 = 16$

Figura 4. Cilindro circular recto.

Si una curva plana se gira alrededor de una recta fija que está en el plano de la curva, entonces a la superficie así generada se denomina superficie de revolución. La recta fija se llama eje de la superficie de revolución y la curva plan recibe el nombre de curva generatriz (o revolvente).

Una esfera generada al girar la semicircunferencia $Y^2 + Z^2 = r^2 \geq 0$, alrededor del eje *Y*, y se muestra en la figura 5.

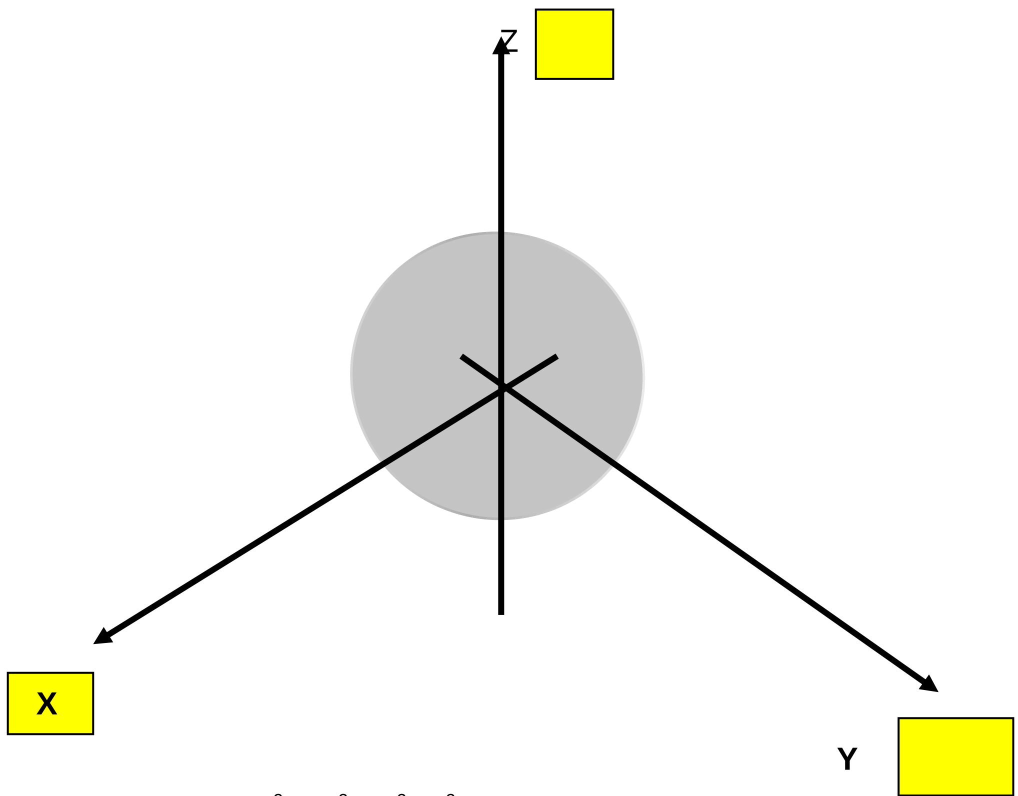


Figura 5. Esfera: $X^2 + Y^2 + Z^2 = r^2$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 3. Analizar la superficie de revolución cuya ecuación de la directriz es la recta expresada como: Z = K.

La recta Z = K, está girando, y genera un cilindro circular recto.

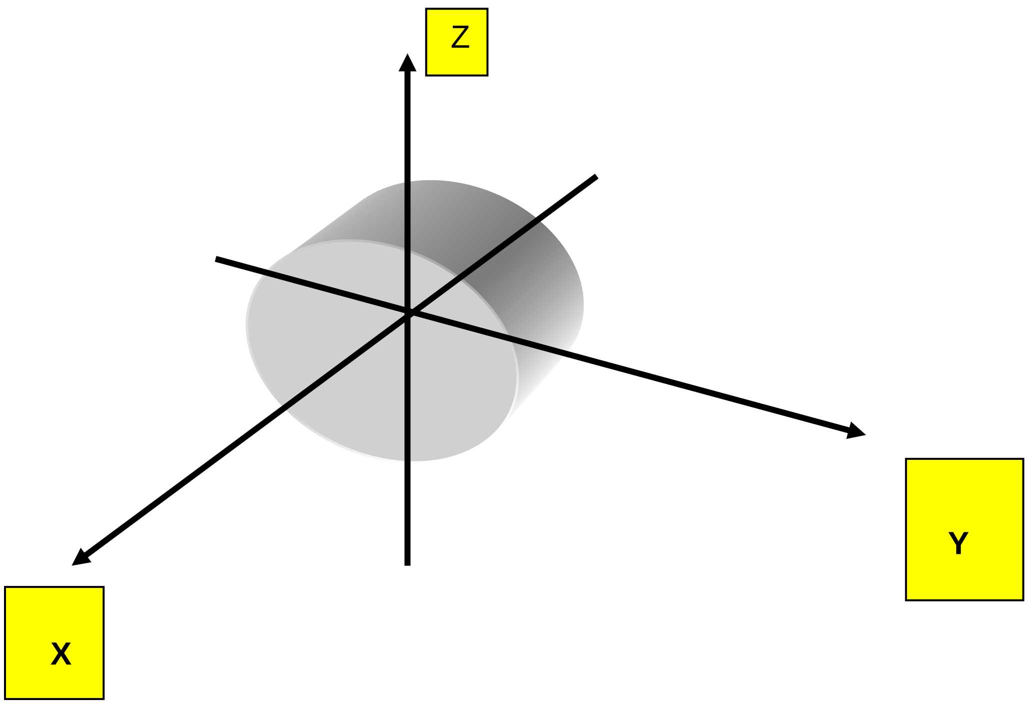


Figura 6. Cilindro circular recto.

Las formas vectoriales de una superficie, prácticamente obedecen a los ejes cartesianos en el plano y el espacio, por lo que es necesario identificar correctamente las ecuaciones representativas de las curvas, para identificar a las superficies correspondientes; si se analiza a un plano, simplemente se aplica la ecuación vectorial correspondiente, para el establecimiento de la superficie dada.

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Defina el concepto de superficie?
2. ¿Por qué se considera que los planos son superficies?
3. Explique la importancia de las generatrices.
4. Justifique la importancia del estudio de las superficies.
5. ¿Defina el concepto de curva directriz?
6. Establezca las formas geométricas de las curvas directrices.
7. ¿Defina el concepto de superficie de revolución?
8. Según el mapa conceptual de la unidad, establezca las formas geométricas principales de las superficies de revolución.
9. ¿Con que otro nombre se conoce a una curva generatriz?
10. Explique la importancia de la identificación de superficies en el área de arquitectura.

Ejercicios propuestos

1. Dibuje la gráfica de la ecuación $X^2 + Y^2 = 9$ e identifique la superficie.
2. Dibuje la gráfica de la ecuación $X^2 + Y^2 = 25$ e identifique la superficie.
3. Dibuje la gráfica de la ecuación $3 y^2 + 12 z^2 = 16 x$ e identifique la superficie.

UNIDAD 7

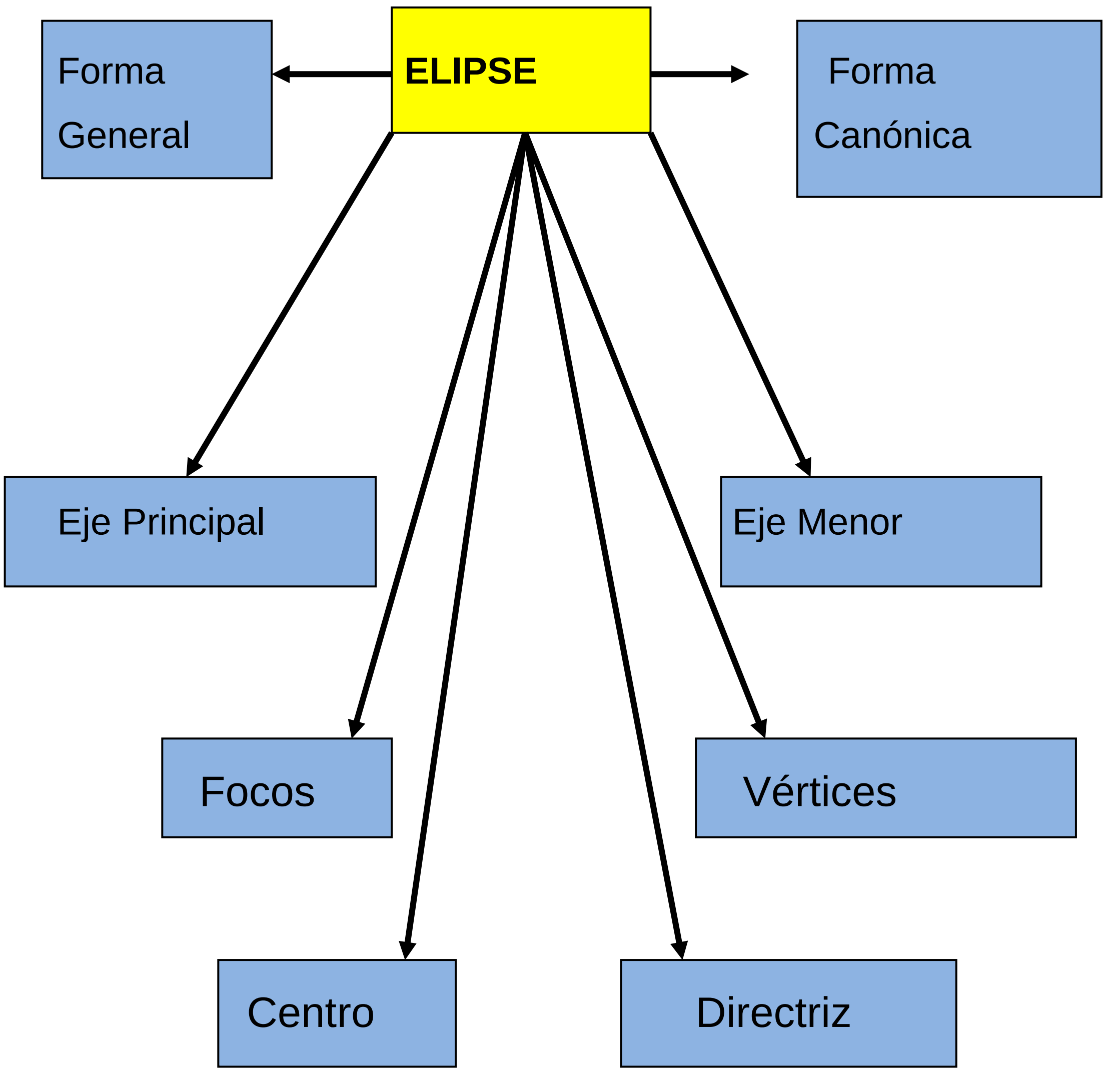
ELIPSES

OBJETIVO

Analizar la ecuación de una elipse

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Muchos de los diseños arquitectónicos presentan formas geométricas perfectamente definidas, algunos diseños son circulares y otros elípticos; dichos diseños requieren el conocimiento pleno y manejo fundamental de las ecuaciones cartesianas representativas de segundo grado.

La identificación correcta de las fórmulas generales, facilita el trazo y su estudio, detectando cada uno de los elementos geométricos que la conforman a este tipo de curvas.

Esta unidad plantea el análisis de la elipse, identificándola a través de su forma general, su forma canónica y sus variantes, que permiten distinguir plenamente a sus vértices, sus focos, el eje principal, el eje menor o transverso, su centro, etc.

A continuación se establece la definición básica de este tipo de curva, su forma particular y las fórmulas para calcular todos y cada uno de los elementos constitutivos que la integran.

7.1 DEFINICIÓN Y GENERALIDADES

Una elipse es el conjunto de puntos de un plano tales que la suma de sus distancias desde dos puntos fijos es constante. Cada punto fijo se denomina foco**.**

7. 2. Ecuaciones de la elipse

Forma general

$$A x \; + \; C y \; + \; D x \; + \; E y \; + \; F = 0 \qquad AC > 0$$

Forma canónica o estándar

Centro en el origen

Eje principal “X”

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Coordenadas del centro: C (0, 0)

Coordenadas de los vértices: V (a, 0) y V’ (- a, 0)

Coordenadas de los focos: F (c, 0) y F (- c, 0)

Ecuaciones de las directrices: X = ± a / e

$e = c / a = (a^2 – b^2)^{1/2} / a$

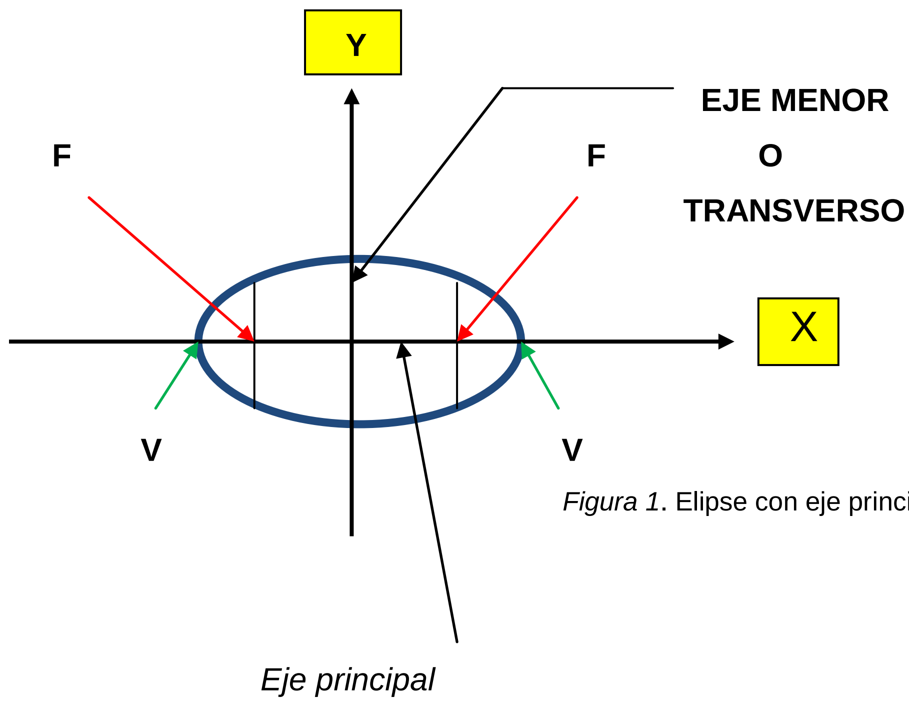


Figura 1. Elipse con eje principal en "x"

Centro fuera del origen

$$\frac{(X-h)^2}{a^2} + \frac{(Y-k)^2}{b^2} = 1$$

Coordenadas del centro: C (h, k)

Coordenadas de los vértices: v (h + a, k) y V' (h – a , + k)

Coordenadas de los focos: F (h + c, k) y F ' (h – c, k)

Ecuaciones de las directrices: $X = h \pm a / e$

$e = c / a = (a^2 - b^2)^{1/2} / a$

Centro en el origen

Eje principal "y"

$$\frac{Y^2}{a^2} + \frac{X^2}{b^2} = 1$$

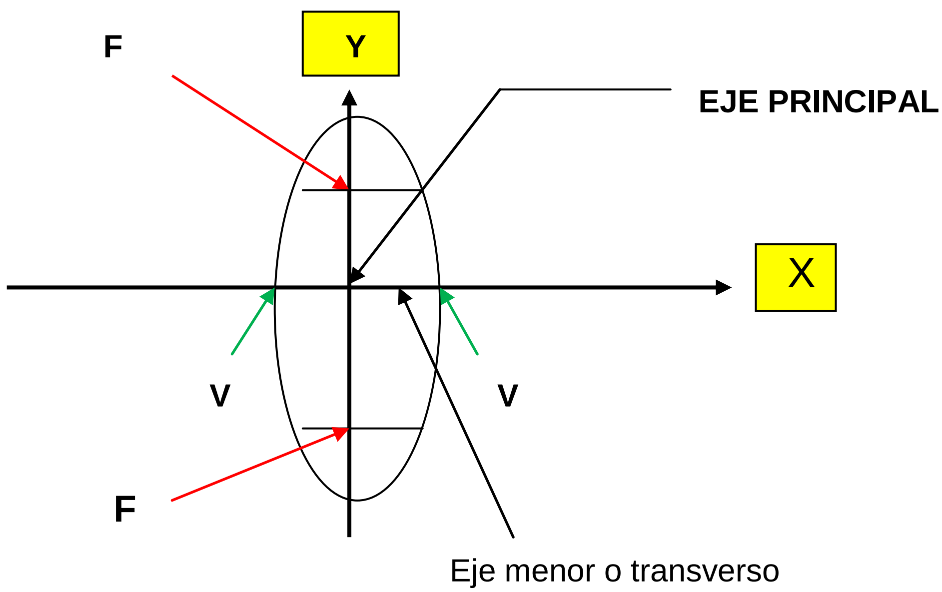


Figura 2. Elipse con eje principal en "y"

Coordenadas del centro: C (0, 0).

Coordenadas de los vértices: V (0, a) y V' (0, - a).

Coordenadas de los focos: F (0, c) y F' (0, - c).

Ecuaciones de las directrices: Y = ± a / e.

$e = c / a = (a^2 – b^2)^{1/2} / a$.

Centro fuera del origen

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(X-h)^2}{b^2} = 1$$

Coordenadas del centro: C (h, k + a).

Coordenadas de los vértices: v(h, k + a) y V ’ (h, k - a).

Coordenadas de los focos: F (h , k + c) y F ’ (h , k - c).

Ecuaciones de las directrices: Y =k ± a / e.

$e = c / a = (a^2 - b^2)^{1/2} / a.$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 1. Analizar la siguiente elipse: $X^2 / 25 + Y^2 / 16 = 1$

Solución

$a^2 = 25$ $b^2 = 16$

$a = \pm 5$ $b = \pm 4$

$C = (25 - 16)^{1/2} = (9)^{1/2} = 3.$

$X^2 / 25 = 0$ $X = 0;$ $Y^2 / 16 = 0$ $Y = 0.$

Coordenadas del centro: X = 0 y Y = 0 c (0, 0).

Coordenadas de los vértices: (5, 0) y (- 5, 0)

Coordenadas de los focos: (3, 0) y (-3, 0)

Ecuación de la directriz = $a^2 / c = 25 / 3$

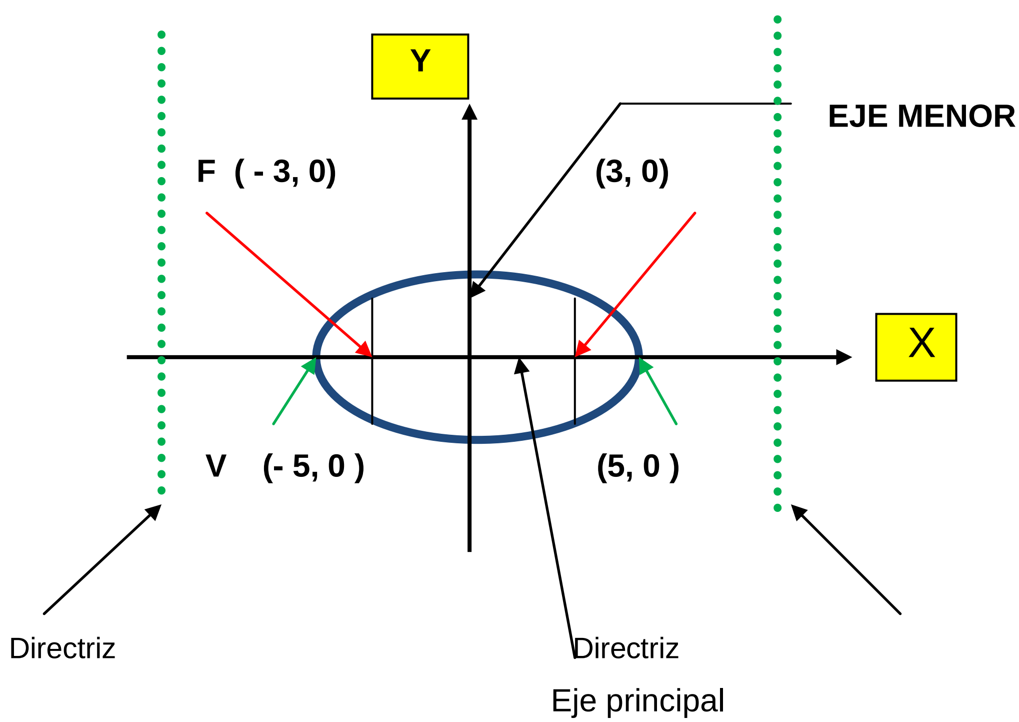


Figura 3. Gráfica de la Elipse: $X^2 / 25 + Y^2 / 16 = 1$

AUTOEVALUACIÓN

1. Defina el concepto de elipse.
2. La elipse pertenece a las ecuaciones de ___________ grado.
3. ¿Cuales son los elementos que conforman a una elipse?
4. Establezca la ecuación general de la elipse.
5. Establezca la ecuación canónica de la elipse con eje principal en “X”
6. Establezca la ecuación canónica de la elipse con eje principal en “Y”
7. La ecuación canónica de la elipse esta enlazada con signo: ______.
8. El eje menor de la elipse, también se conoce como eje: _________.
9. Las directrices son: _______ _______ en una elipse.
10. Justifique la importancia del estudio de las elipses en arquitectura.

Ejercicios propuestos

1. Analice la siguiente ecuación de la elipse: $16\, X^2 + 25\, y^2 = 400$.
2. Analice la siguiente ecuación de la elipse: $(y – 4)^2 / 25 + (X – 2)^2 / 16 = 1$.
3. Analice la siguiente ecuación de la elipse: $25\, X^2 + 16\, y^2 = 400$.

UNIDAD 8

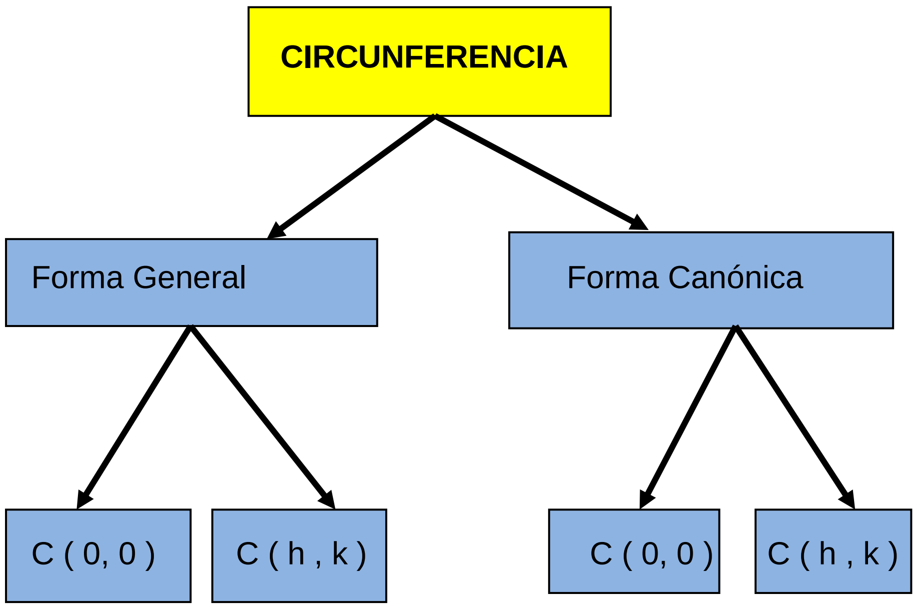
CIRCUNFERENCIA

OBJETIVO

Analizar la ecuación de la circunferencia.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Una de las principales formas de las ecuaciones de segundo grado es, precisamente, la circunferencia, cuyos elementos principales son el radio y el centro. Muchos de los diseños arquitectónicos presentan formas circulares, por lo que es necesario conocer geométricamente su forma.

El radio se define como una distancia equidistante a partir de un punto fijo; el centro, por su parte, es aquel punto establecido a partir del cual ha de trazarse la circunferencia mencionada.

La circunferencia representa una de las curvas más utilizadas y requeridas por la geometría, por lo que es necesario su estudio de manera analítica y precisa, para identificarla debidamente y facilitar su interpretación en problemas reales de aplicación.

A continuación se presenta el análisis de la circunferencia, distinguiendo cada una de sus partes esenciales, por medio de fórmulas sencillas, de fácil comprensión y aplicación para el alumno.

8.1 DEFINICIONES Y GENERALIDADES

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo. El punto fijo se denomina centro de la circunferencia, y a la distancia constante se le llama radio de la circunferencia.

8.2 ECUACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA

Forma general

$$X^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Forma canónica o estándar

Centro en el origen: C (0, 0).

$$X^2 + Y^2 = r^2$$

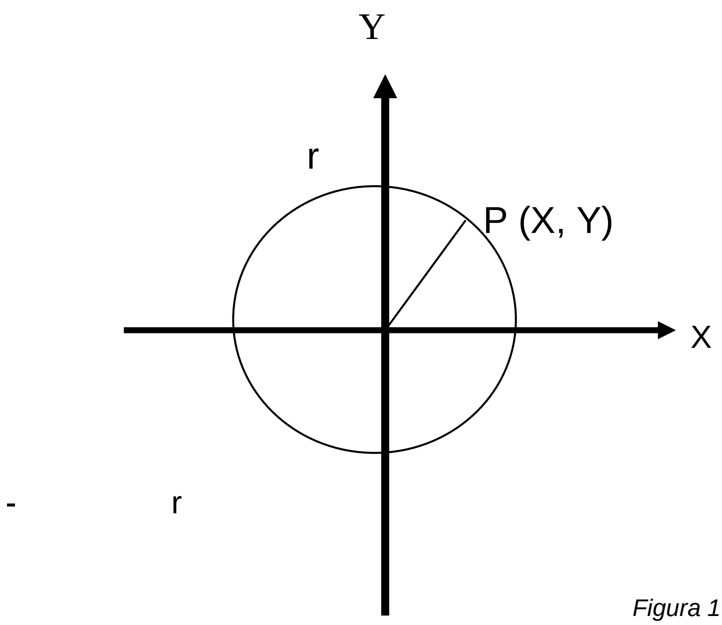


Figura 1. Circunferencia con centro en el origen.

Centro fuera del origen: C (h, K).

$$(X - h)^2 + (Y - k)^2 = 0$$

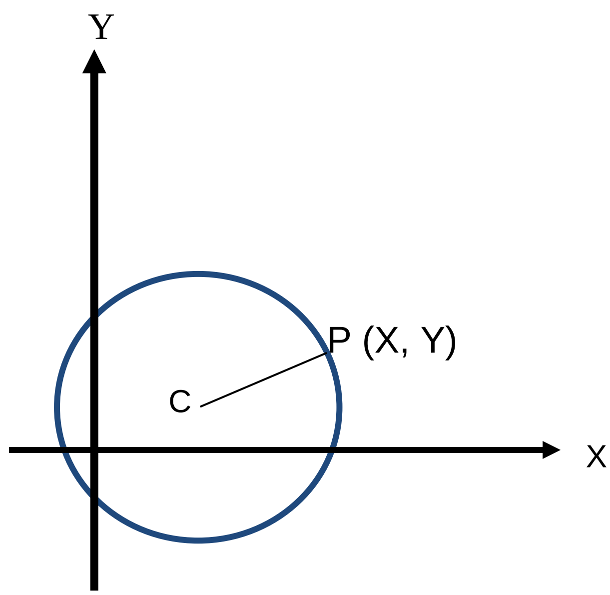


Figura 2. Circunferencia con centro fuera del origen.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 1. Analizar la siguiente ecuación $X^{2.} + Y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$

$X^{2.} + Y^2 + 6x - 4y = 23$

$(X^2 + 6x) + (Y^2 - 4y) = 23$

Completando el trinomio cuadrado perfecto:

$(X^2 + 6x + 9) + (Y^2 - 4y + 4) - 9 - 4 = 23$

Factorizando:

$(X + 3)^2 + (y - 2)^2 = 23 + 13$

$(X + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$

Obteniendo el centro:

$(X + 3)^2 = 0$ $(y - 2)^2 = 0$

$X = -3$

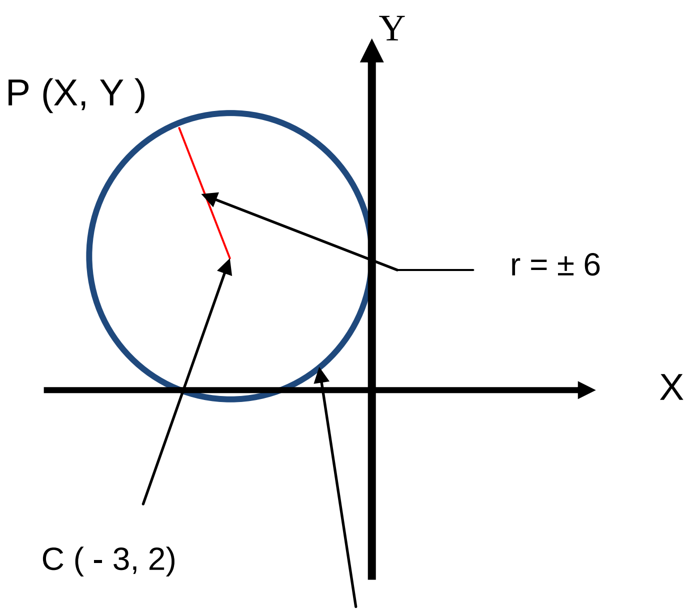
$Y = 2$

$C(-3, 2)$

Calculando el radio:

$r^2 = 36$

$r = \pm 6$



$X^{2.} \quad + \quad Y^2 + 6\,x - 4\,y = 23$

Figura 3. Gráfica de la circunferencia: $X^{2.} + Y^2 + \; 6\,x - 4\,y = 23$

AUTOEVALUACIÓN

1. ¿Defina el concepto de circunferencia?
2. ¿Cuántas formas existen de la circunferencia?
3. Establezca la ecuación general de la circunferencia.
4. Establezca la forma canónica de la circunferencia.
5. Establezca la forma canónica de la circunferencia con centro en el origen.
6. Establezca la forma canónica de la circunferencia con centro fuera del origen.
7. Cuando una circunferencia presenta centro en el origen, las coordenadas del centro son: _______________.
8. Cuando una circunferencia presenta centro fuera del origen, las coordenadas del centro son: _______________.
9. La circunferencia es una ecuación cartesiana de _________ ________.
10. Justifique la importancia del estudio de la circunferencia.

Ejercicios propuestos

1. Analizar la ecuación de la circunferencia expresada como:
$X^{2.}+ Y^2 + 6x - 27 = 0$
2. Analizar la ecuación de la circunferencia expresada como: $X^2 + Y^2 = 4$
3. Analizar la ecuación de la circunferencia expresada como: $X^2 + Y^2 = 16$.

UNIDAD 9

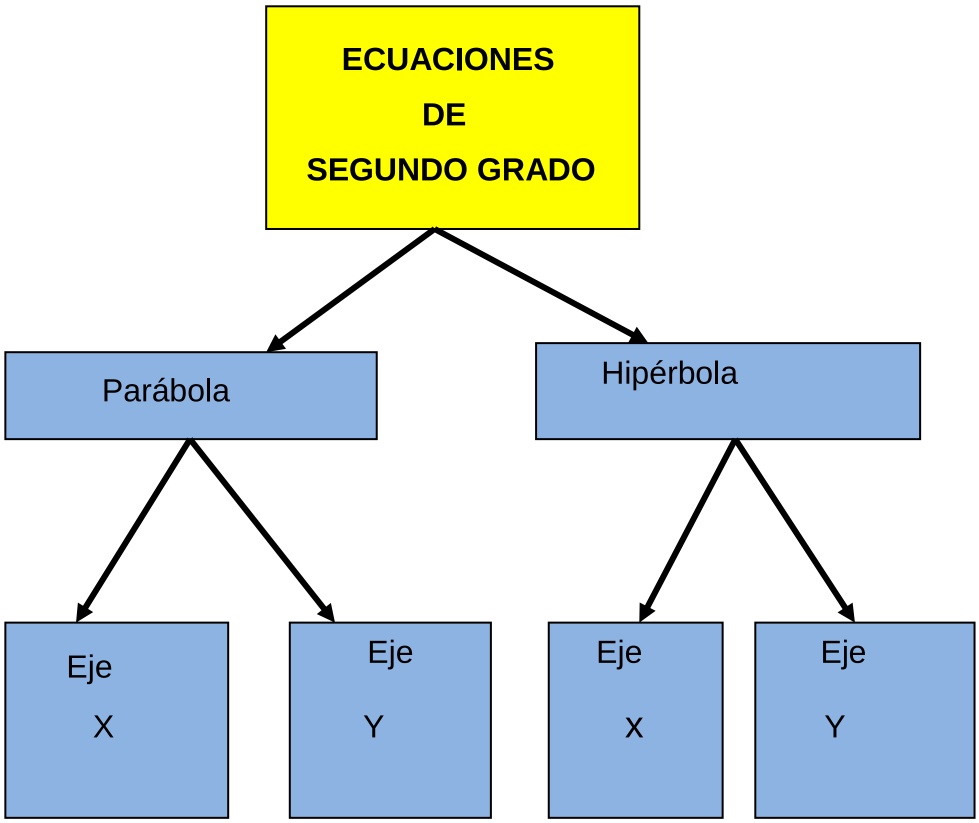
PARÁBOLA E HIPÉRBOLA

OBJETIVO

Identificar la ecuación de la parábola e hipérbola.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Muchos de los diseños arquitectónicos consideran diseños geométricos que requieren de figuras y formas determinadas, perfectamente definidas y cuyo estudio le compete precisamente al análisis geométrico.

Las parábolas e hipérbolas en su forma presentan figuras geométricamente similares, pero con variantes lo suficientemente identificables, que las distinguen unas de otras; las hipérbolas por ejemplo, se expresan en pares o ramales simétricas, cortando ya sea al eje “X” o bien, al eje “Y”.

Las parábolas por su parte, poseen un sólo foco, una directriz, un vértice, a partir del cual abre la gráfica según su forma, y la condición geométrica fundamental del eje principal ya sea, X o Y.

A continuación se analizan los aspectos básicos relacionados con el estudio de la parábola e hipérbola, identificando sus partes fundamentales y características.

9.1. DEFINICIONES Y GENERALIDADES DE LA PARÁBOLA E HIPÉRBOLA

Parábola: es el conjunto de todos los puntos que conforma un plano, tales que dichos puntos son equidistantes respecto a un punto fijo y una recta; el punto fijo se llama foco y la recta directriz.

9.2 Ecuaciones de una parábola e hipérbola

Forma general de la parábola

Eje principal "x"

La directriz Y = - P

Foco (0, P)

$$X^2 = 4\,p\,Y$$

Cuando P > 0 Cuando P < 0

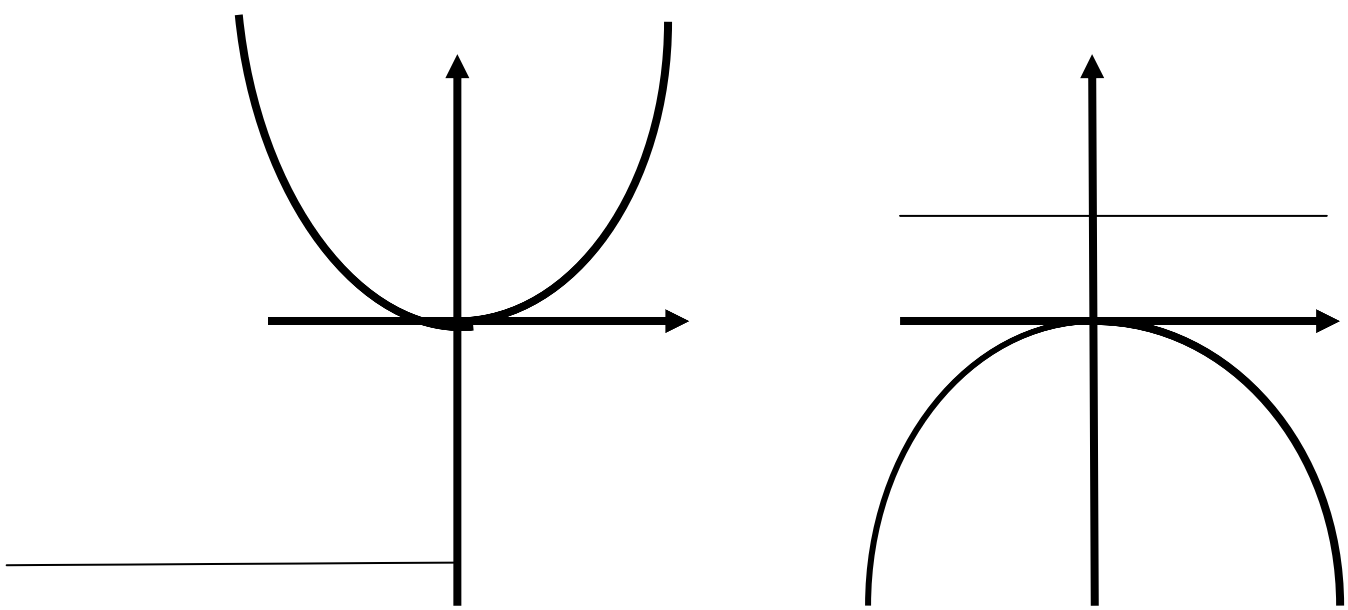


Figura 1. Gráfica de la parábola con eje principal "X".

Eje Principal "Y"

La directriz x = - P

Foco (P, 0)

$$Y^2 = 4pX$$

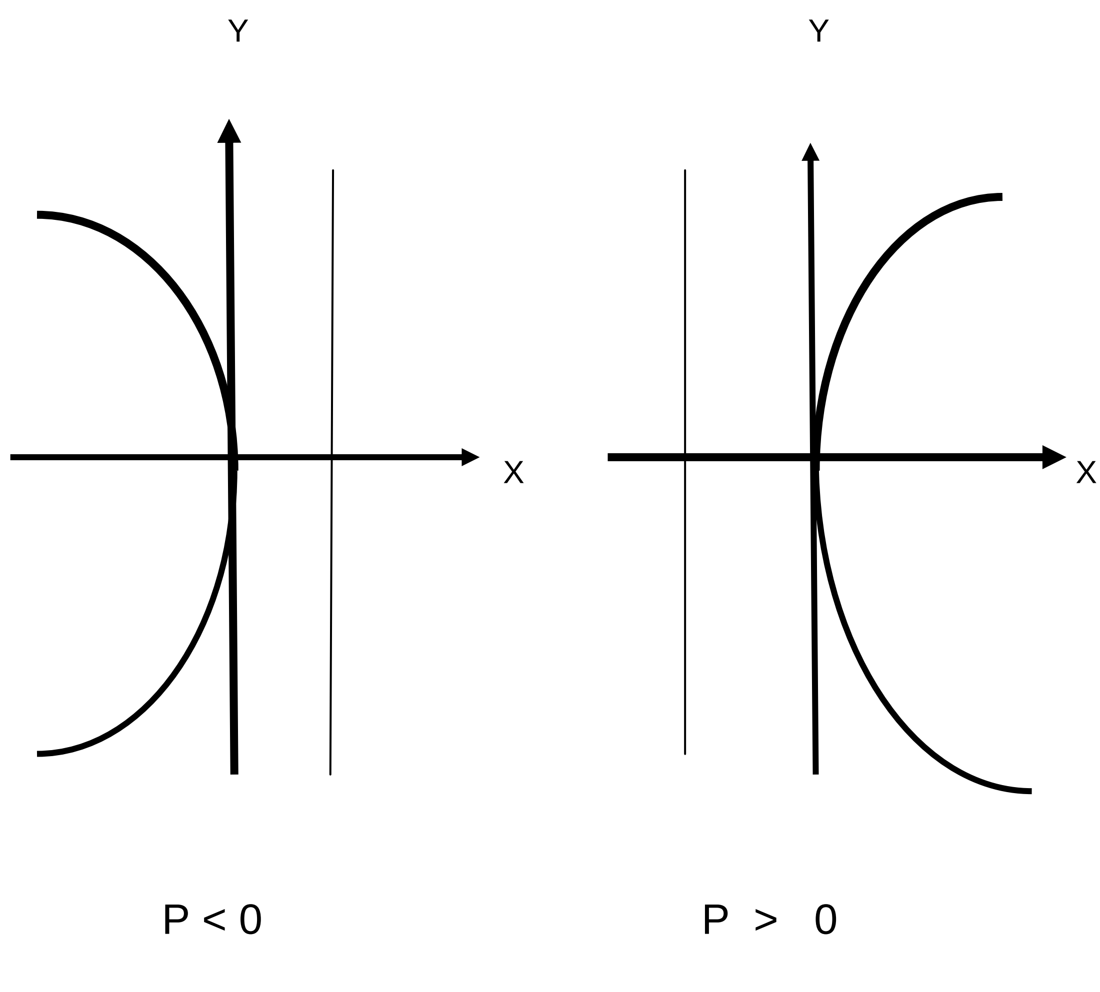


Figura 2. Gráfica de la parábola con eje principal "Y".

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Ejercicio 1. Analizar la ecuación de la parábola $X^2 = 10\ Y$

Entonces:

$\boxed{4\ p = 10}$

$\boxed{P = 10 / 4 = 5 / 2}$

$5 / 2 > 0$

Calculando el foco.

F (0, 5 / 2)

Calculando la directriz.

$Y = -\ P$

$\boxed{Y = -\ 5 / 2}$

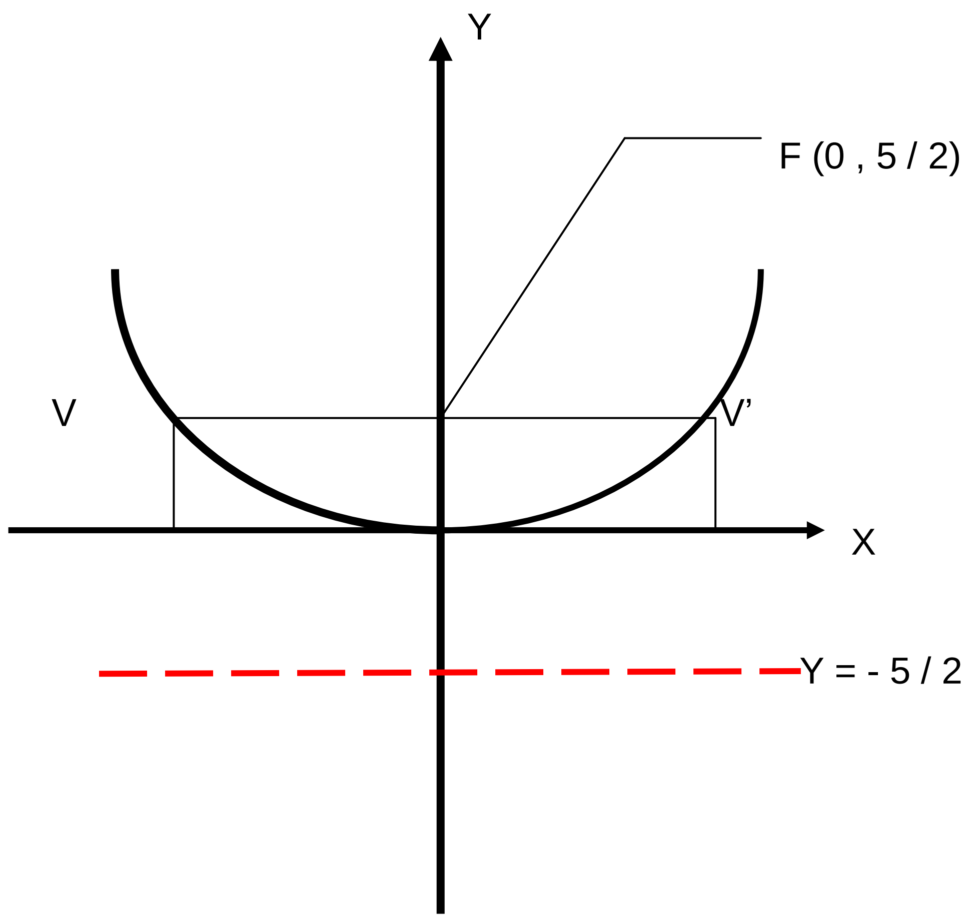
Los vértices

$X = 2\ p$ y $P = 5 / 2$

$X = 2\ (5 / 2\ ) = 5$ $\boxed{X = 5}$

V (- 5, 5 / 2)

V ‘ (5, 5 / 2)

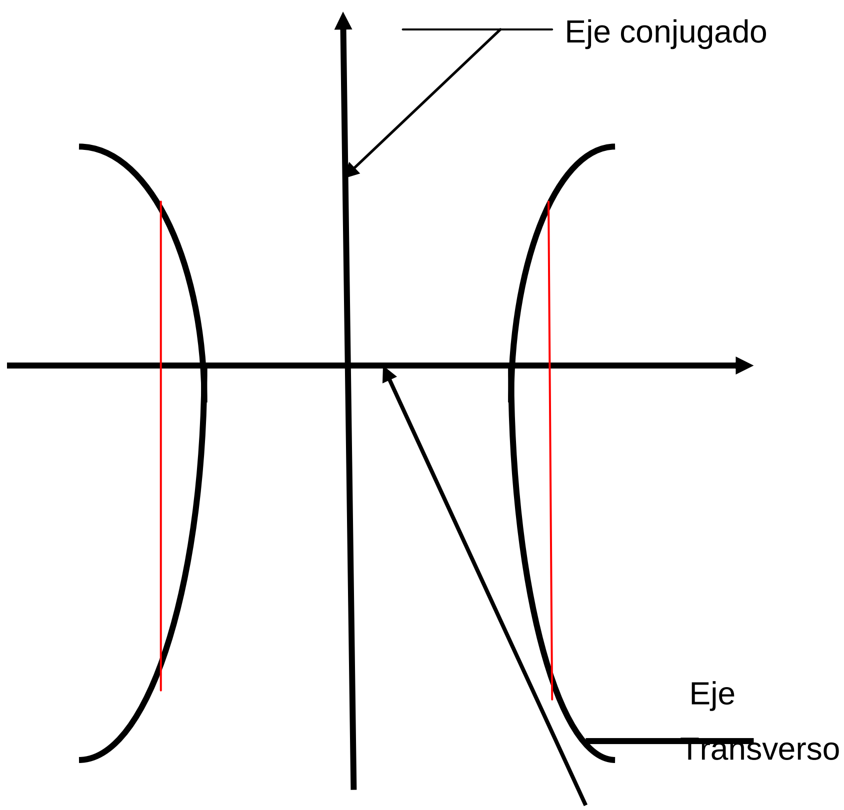


Hipérbola: la hipérbola es el conjunto de todos los puntos que conforman un plano, de tal manera que el valor de la diferencia y su distancia a partir en dos puntos fijos considerados constantes. A esos puntos fijos se les denomina focos. Al analizar una hipérbola, es necesario considerar lo siguiente:

a) El eje principal.
b) El eje transverso.
c) El eje conjugado.

La posición y cada uno de estos lugares geométricos, permitirán graficar correctamente la hipérbola estudiada.

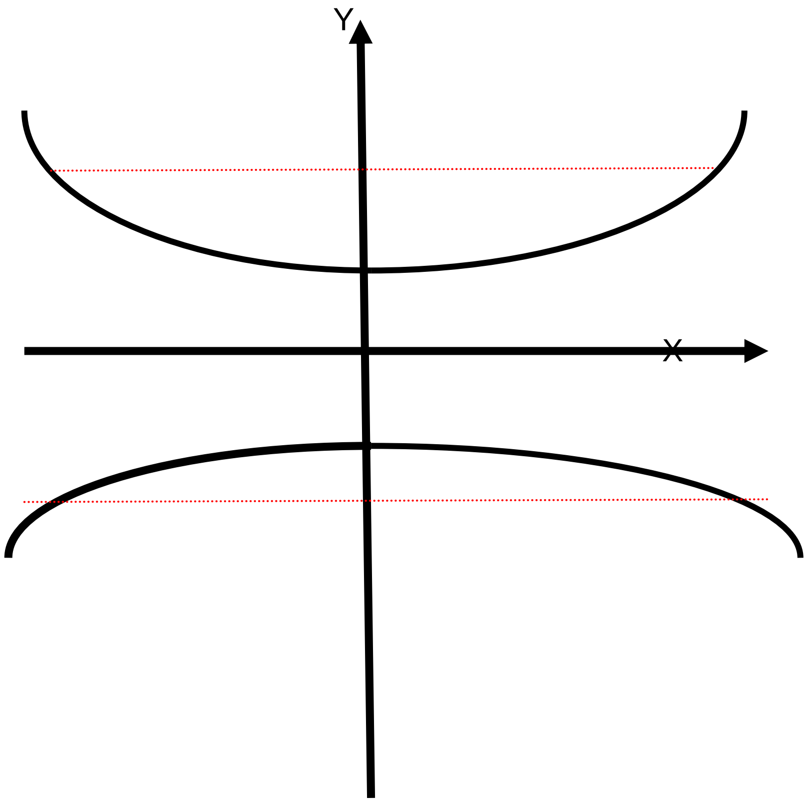
a). Cuando el eje principal es horizontal “X”.



Ecuación representativa:

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

b) Cuando el eje principal es vertical “Y”.



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ejercicio 2. Analizar y graficar la siguiente hipérbola:

$$\frac{\mathbf{X^2}}{\quad\quad} - \frac{\mathbf{Y^2}}{\quad\quad} = \mathbf{1}$$

9 **16**

Identificando:

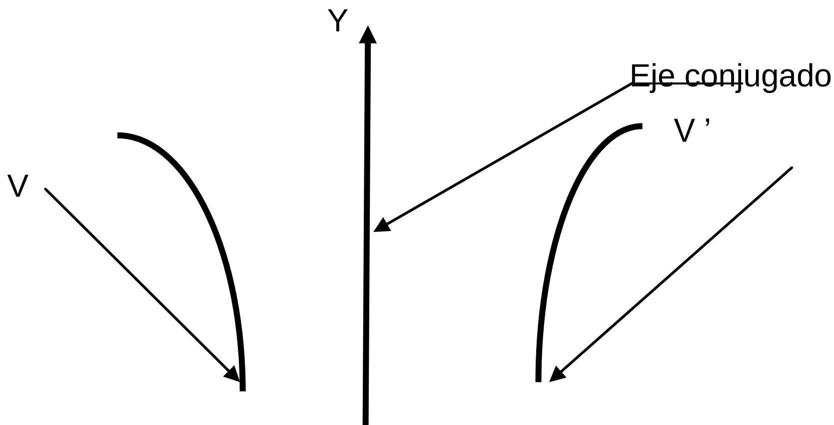
El eje principal es horizontal (X)

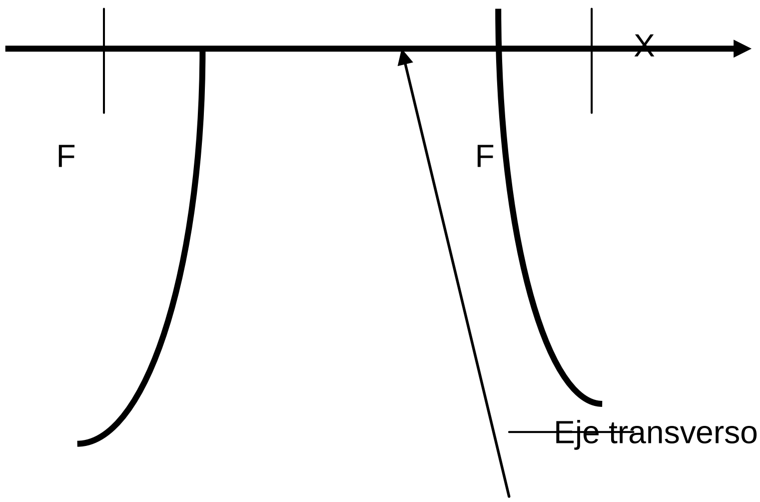
$a^2 = 9$ $b^2 = 16$

$a = 3$ $b = 4$

Entonces:

Vértices	Ejes conjugados
V (- 3, 0)	B (4, 0)
V ' (3, 0)	B' (- 4 , 0)





Pero:

$$b^2 = C^2 - a^2$$

$$C^2 = b^2 + a^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\boxed{C = \sqrt{(25)} = \pm 5}$$

Los focos: F (- 5, 0) y F’ (5, 0)

AUTOEVALUACIÓN

1. Defina el concepto de parábola.
2. Defina el concepto la hipérbola.
3. Establezca la forma general de la parábola.
4. Establezca la forma general de la hipérbola.
5. Mencione los elementos de una parábola.
6. Mencione los elementos de una hipérbola.
7. La ecuación de una parábola corresponde a una ecuación de _______ _____________.
8. La ecuación de una hipérbola corresponde a una ecuación de _______ _____________.
9. La hipérbola presenta dos ramas diametralmente ____________.
10. Justifique la importancia del estudio de las parábolas e hipérbolas.

Ejercicios propuestos

1. Analizar la ecuación de la parábola cuya ecuación es $X^2 = 16$ y.
2. Analizar la ecuación de la parábola cuya ecuación es $Y^2 = 16$ x.
3. Analizar la ecuación de la siguiente hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{Y^2}{9} - \frac{X^2}{16} = 1$$

3.- Analizar la ecuación de la siguiente hipérbola cuya ecuación es:

$25 \; Y^2 - 16 \, X^2 = 400$

BIBLIOGRAFÍA

Barnet, Rich, *Geometría analítica,* México, McGraw-Hill, 2004.

Fuller y Tarmater. *Geometría analítica*, México, Addison Wesley Iberoamericana, 2000.

Fuller, *Geometría Analítica,* México, Cecsa, 1999.

Lehmann, Charles, *Geometría plana y del espacio*, México, Alfaomega, 2004.

Leithold, Louis, *El calculo,* USA, Oxford University, 2004.

Solís, Rodolfo; Nolasco, *Victoria. Geometría analítica*, México, Noriega Limusa, 1999.

GLOSARIO

Abscisa. Eje horizontal, eje referido al eje X.

Algebra. Rama de las matemáticas que relaciona los números con literales, expresando una ecuación matemática.

Análisis. Estudio minucioso y detallado de una ecuación matemática, analizando cada una de sus partes, es decir, cada uno de los elementos que la constituyen.

Axioma. Sugerencia matemática, aceptada como una verdad implícita.

Cilindro. Figura geométrica cuya base es un círculo y se proyecta a una altura determinada.

Circular. Término relativo a una circunferencia.

Circunferencia. Curva cartesiana de segundo grado.

Cóncavo. Curva abierta hacia arriba.

Convexo. Curva abierta hacia abajo.

Coordenada. Posición numérica sobre un eje específico.

Curva. Relativo a una forma específica o comportamiento no lineal en una gráfica.

Dirección. Relativo a un eje de aplicación.

Discriminante. Termino matemático relacionado con las curvas de segundo grado.

Ecuación. Es una igualdad en la que entran a formar parte una o varias cuantificables desconocidas, denominadas incógnitas.

Eje. Sistema de referencia que permite ubicar un punto en el plano o el espacio.

Elipse. Curva cartesiana de segundo grado, conformada por eje principal y un eje menor.

Elipsoide. Curva en movimiento cuya generatriz es una elipse.

*Escalar***.** Valor numérico que carece de sentido vectorial.

*Espacio***.** Referido en matemáticas a R3, es decir a un sistema de coordenadas (x, y, z).

Geometría. Ciencia que estudia las formas de las figuras, identificando cada una de sus partes.

Geometría analítica. Llamada así en oposición a la geometría sintética; es la que aborda los problemas geométricos mediante el uso de coordenadas. Con ello se consigue que se transformen en problemas algebraicos.

Generatriz. Curva generadora de una superficie de revolución.

Hipérbola. Curva de segundo grado, conformada por dos ramas, simétricas entre sí, consta de un eje conjugado y eje transverso.

Hiperboloide. Relativo a una curva cuya generatriz a una hipérbola.

Horizontal. Relativo a una recta plana.

Identidad. Es toda igualdad establecida entre cantidades numéricas, o bien entre letras, siempre que en éstas se verifiquen para todos los valores que se asignen a dichas letras.

Igualdad. Es aquella expresión que se obtiene de igualar dos cantidades que tienen el mismo valor.

Inercial. Referido a un concepto estático, que indica ausencia de movimiento.

Intrínseca. Verdad inherente.

Magnitud. Cantidad o medida.

Marco. Sistema de referencia dirigido a un medio físico, interpretando su sentido real.

Modulo. Expresión numérica, referida a la elevación de un vector al cuadrado.

Multiplicación. Multiplicar un número dado, denominado multiplicando, por otro cualquiera llamado multiplicador, es sumar el primero tantas veces como indique el segundo. De esta forma se obtiene un resultado que recibe el nombre de producto.

Normal. Referido a planos o rectas que son perpendiculares entre sí.

Ordenada. Eje vertical, eje referido al eje Y.

Origen. Punto de inicio o partida.

Paraboloide. Curva en movimiento, cuya generatriz es una parábola.

Paralela. Recta que observa la misma posición con respecto a otra.

Paramétrica. Referida a una expresión matemática cuya variable principal es t.

Par ordenado. Se entiende por par ordenado y se representa por (a, b) a la disposición de dos elementos en un cierto orden, de modo que uno de ellos, a, sea el primer elemento y el otro, b, el segundo. En consecuencia no es lo mismo el par ordenado (a, b) que el par (b, a).

Perpendicular. Recta o plano que corta a otro a 90º.

Plano. Sistema de coordenadas X y Y.

Producto. Expresión vectorial referida a la multiplicación entre dos vectores.

Producto cruz. Producto vectorial realizado entre vectores unitarios, cuyo resultado es un vector.

Producto escalar. Producto vectorial realizado entre vectores, cuyo resultado es una cantidad numérica.

Recta. Línea que une dos o más puntos.

Rectas paralela. Dos rectas son perpendiculares si sus parámetros guardan relación inversa y con signos opuestos. Cuando dos rectas se cortan determinando 4 ángulos iguales, se dice que las dos rectas son perpendiculares entre sí.

Rectas perpendiculares. Dos rectas son perpendiculares si al cortarse entre sí forman un ángulo de 90º.

Referencia. Aplicado en matemáticas a un eje que permite ubicar un punto en el plano o en el espacio.

Revolución. En matemáticas, relativo a una curva que gira sobre un eje determinado.

Segmento. Fracción de una línea recta.

Sentido. En algebra vectorial, relativo a un signo positivo o negativo.

Sistema. Estructura lógica y metódica, que interpreta la explicación de un ente físico.

Sólido. Material compacto.

Superficie. Conjunto de puntos que constituyen a un plano.

Término. Es aquella expresión algebraica en la que no aparecen cantidades separadas por signos + o -.

Unitario. Referido al álgebra vectorial; vectores en la dirección de i, j, y k.

Vertical. Línea recta ascendente.

Vector. Segmento de recta dirigido.

Vectorial. Referido específicamente a los vectores.