Álgebra lineal

SAUL EDUARDO HERNANDEZ CANO

Red Tercer Milenio

Álgebra lineal

SAUL EDUARDO HERNANDEZ CANO

Red Tercer Milenio

AVISO LEGAL

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Datos para catalogación bibliográfica

Saúl Eduardo Hernández Cano

Álgebra lineal

ISBN 978-607-733-104-9

Primera edición: 2012

DIRECTORIO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El algebra lineal es una herramienta de las matemáticas que se usa en el manejo de arreglos matriciales; dichos arreglos son trabajados de muchas maneras en la vida diaria como puede ser en el desarrollo de proyectos del área de control analógico o de control digital, en buscar incógnitas para resolver ecuaciones lineales muy grandes con n incógnitas, etc. Este libro de ayuda teórico – practica se ha dividido en cuatro diferentes unidades, las cuales se explican a continuación.

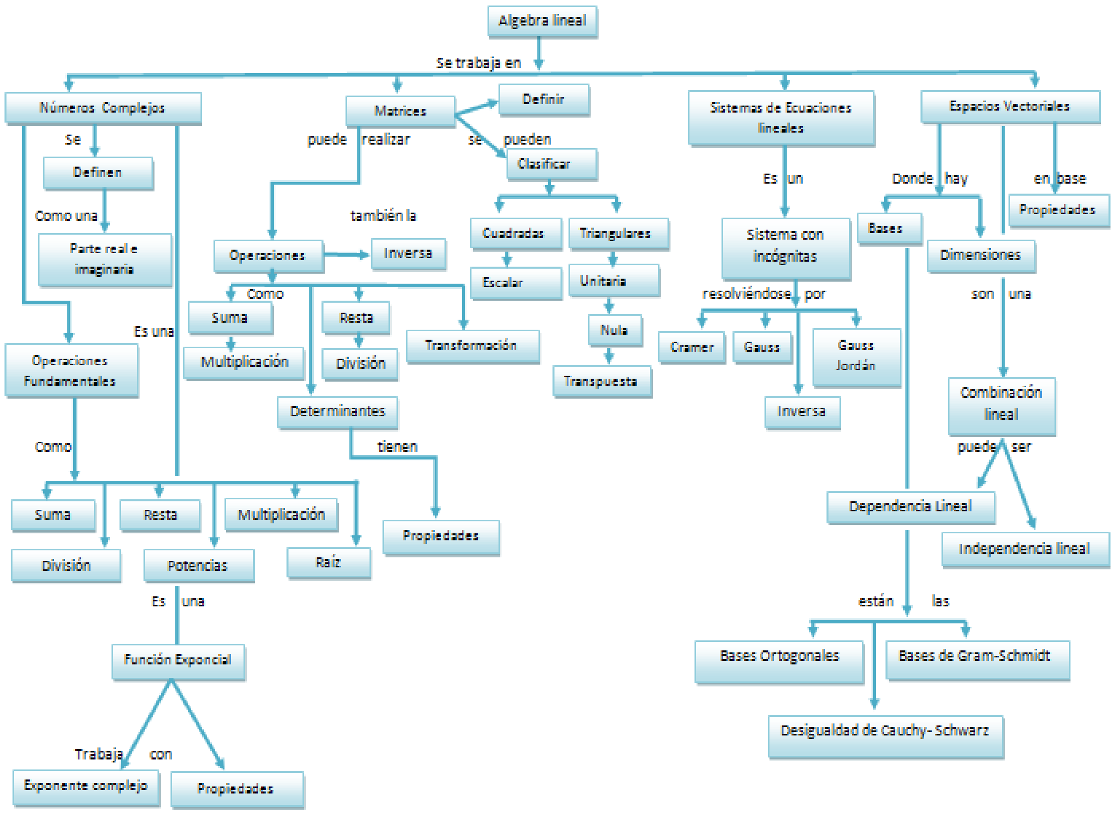
La unidad 1 se enfoca al trabajo con números complejos, en esta unidad se verán las propiedades con que cuentan los números complejos, asimismo se analizaran todas las operaciones matemáticas que se pueden hacer con ellos y la característica que los diferencia de los números reales.

La unidad 2 que lleva por titulo matrices tiene que ver con la forma en que se pueden trabajar los arreglos matriciales, los diferentes tipos de matrices que existen y las diferentes operaciones matemáticas que se pueden realizar con ellas, el uso y trabajo con determinantes y su aplicación en la resolución de ejercicios y problemas, esta es la unidad mas extensa del temario y su correcta interpretación y aplicación ayudara mucho en el manejo de la siguiente unidad, puesto que ambas van de la mano.

La unidad 3 tiene que ver con los sistemas de ecuaciones lineales, se trabajan con métodos algebraicos para poder encontrar las incógnitas correspondientes que mediante los diferentes procesos que hay para trabajar con matrices se pueden llegar a su solución, así mismo se trabaja con pivoteo algebraicos para poder reducir resultados.

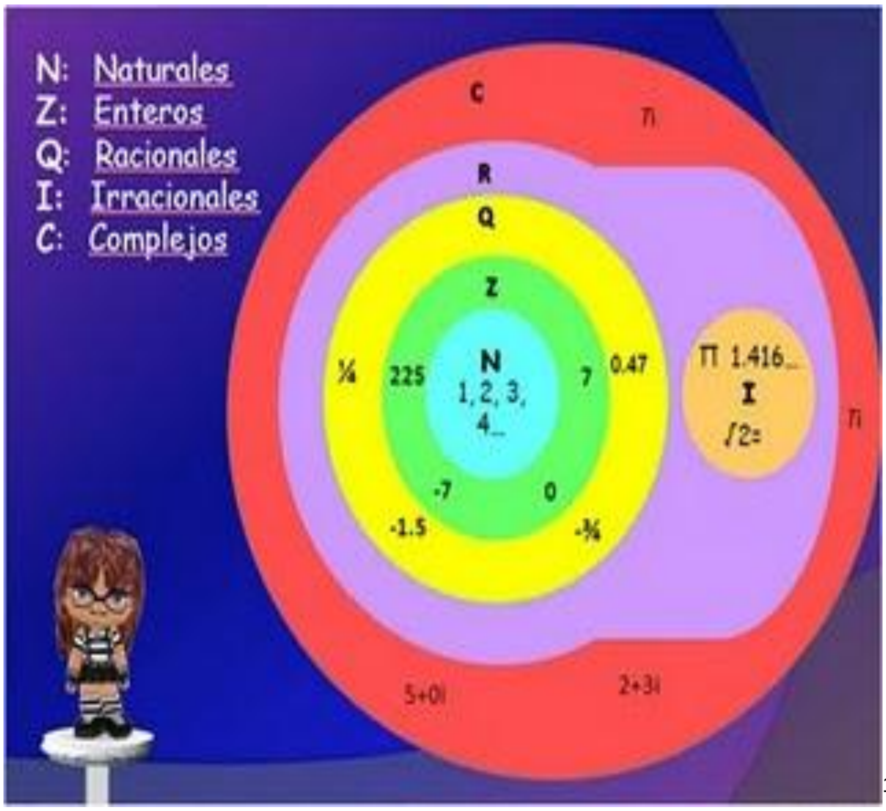
La unidad 4 es referente a los espacios vectoriales, es el manejo de las matemáticas vectoriales en la resolución de problemas en la cual las tres dimensiones están presentes.

MAPA CONCEPTUAL DE LA ASIGNATURA



UNIDAD 1

NÚMEROS COMPLEJOS



[1]

OBJETIVO:

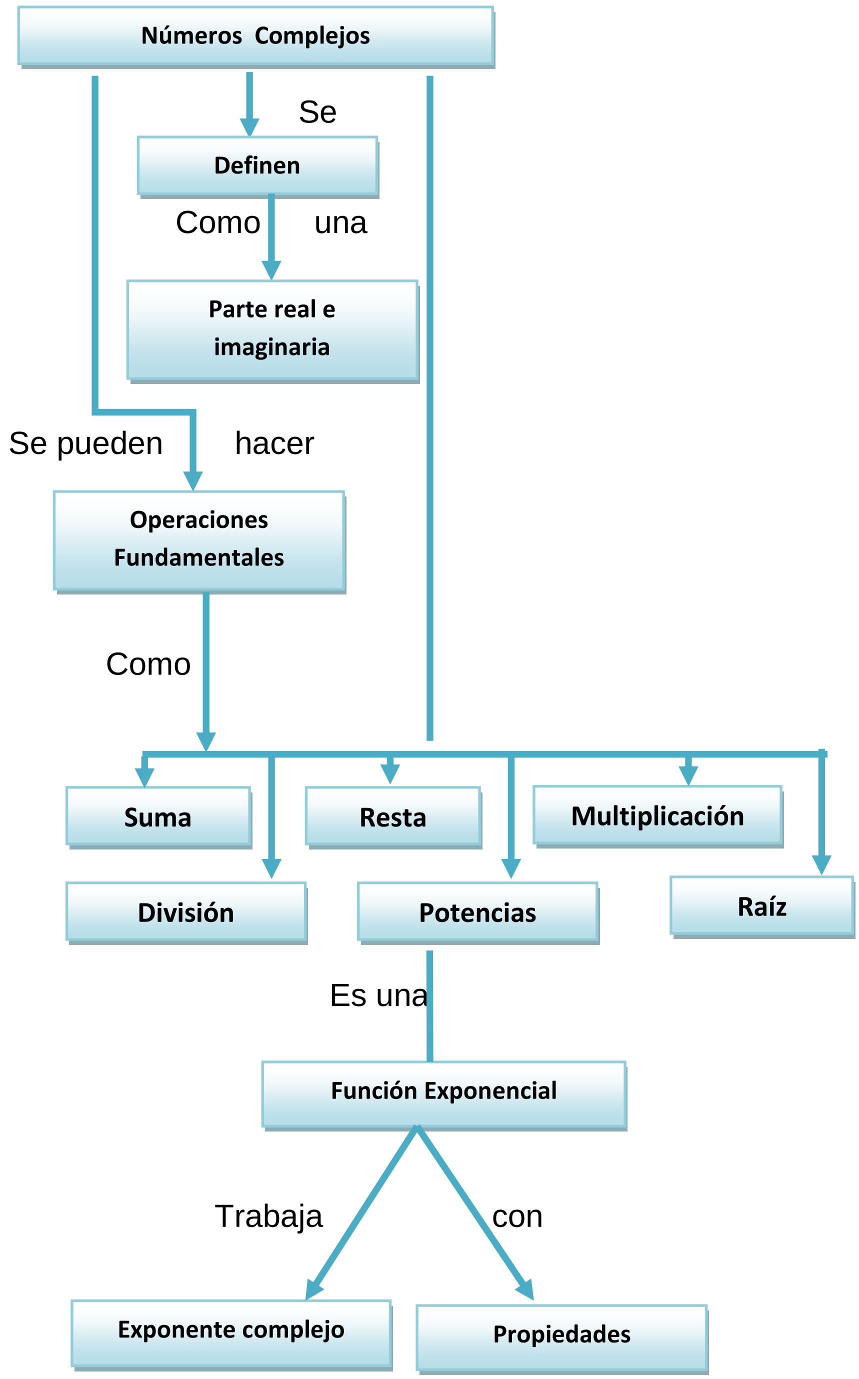
El estudiante definirá el concepto de número complejo y la importancia que tiene el estudio de ellos en la ingeniería, así como la aplicación y practica de problemas con números complejos; así como la ilustración de las características de la función exponencial.

[1] http://perso.wanadoo.es/arnadelo/imagenes/complejos.jpg

TEMARIO

1.1 Definición
1.2 Operaciones fundamentales con números complejos
1.3 Elevación de potencias y extracción de la raíz del número complejo.
1.4 Función exponencial con exponente complejo y sus propiedades.

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta primera unidad se abordarán los temas referentes a la definición de número complejos, sus características y las propiedades con las que cuenta. Se tocará el tema de las operaciones básicas, fundamentales y complejas que se pueden realizar con ellos; asimismo se verá el tema de radicación y potencia de un número complejo y el exponencial elevado a una potencia compleja con su respectiva sustitución.

1.1.- DEFINICIÓN.

Se puede decir que un número imaginario no es más que la indicación de la raíz de índice par de un número negativo; o también podemos decir que es el producto de un número positivo o negativo cualquiera por la unidad imaginaria i.[12]

$$i = \sqrt{-1}.$$

Un número complejo es la suma algebraica de un número real con un número imaginario.

U = a + bi.

El número imaginario puro es el complejo cuya parte real es cero. Llamaremos $i = \sqrt{-1}$ a la unidad imaginaria. Un número complejo se define como **u=a+bi** (forma binómica) donde **a** se llama parte real y **b** se llama parte imaginaria. En su representación gráfica el extremo del vector se llama afijo del número complejo.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Enumerar las características de los números complejos mediante la realización de un mapa conceptual de lo explicado en clase.

1.2.- OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NÚMEROS COMPLEJOS

SUMA

Para que se pueda realizar una suma de números complejos, se siguen las normas o reglas básicas de la aritmética, sumando los números reales con los números reales y los números imaginarios con los números imaginarios

[2] Anfossi Agustín, Álgebra, p. 400.

realmente transversales[23] (de forma parecida a números reales con incógnitas como X Y Z):

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

Ejemplo de la suma:

$$(4+3i)+(3+2i)=(4+3)+(3+2)i=7+5i$$

Ejemplo con números:

(3+4i) + (2+3i) – (5-2i)

(3+2-5) + (4+3+2)i

Separamos los complejos de los imaginarios de manera que se nos de siguiente resultado:

0 + 9i

RESTA

Es exactamente igual que la suma, solamente con la diferencia obvia; que en lugar de sumar se van a restar. Se restan los números reales con los números reales y los números imaginarios con los números imaginarios. Por ejemplo: (4-2i)-(2+i)= (2-3i) se puede observar en este sencillo ejemplo como la parte real del primer paréntesis se le resto la parte real del segundo paréntesis, que siguiendo la regla básica de ley de los signos, el signo menos que esta

[3] Anfossi Agustín, Álgebra, p. 404.

afuera del paréntesis altera los signos de todos los términos que están entre paréntesis, y lo mismo exactamente con la parte imaginaria.

MULTIPLICACIÓN

Para obtener el producto de dos números complejos, se multiplica cada término del primer paréntesis por todos los términos del segundo paréntesis, con lo que se obtienen todos los términos a reducir, obsérvese la regla de la multiplicación:

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Véase que el término bdi^2 pasa a ser $-bd$. Eso es porque $i^2 = -1$. [4]
Ejemplo:

$$(4+2i)(3+2i) = 4\cdot3 + 4\cdot2i + 2\cdot3i + 2\cdot2i^2 = (4\cdot3 - 2\cdot2) + (4\cdot2 + 2\cdot3)i = 8+14i$$

DIVISIÓN

La división de números complejos requiere un mayor trabajo que la multiplicación y partimos de un artificio previo, basado en que el producto de un número complejo por su conjugado da como resultado un número real:

$$(a+bi)*(a-bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2$$

Si la división de dos números complejos, la multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 - cdi + cdi + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

[4] Anfossi Agustín, Algebra, p. 406.

POTENCIAS

Para poder elevar un número complejo a un exponente entero, se aplican las reglas de los productos notables. No debe de olvidarse o tener en cuenta la igualdad $i^2 = -1$:

$$(6-3i)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3i + (3i)^2 = 36 + 36i - 9 = 27 + 36i$$

Cabe mencionar que para llevar a cabo operaciones de potencia en números complejos es conveniente hacer uso del Teorema de Moivre, cuyo uso es bastante sencillo y rápido de aprenderse, pero nos hará falta antes revisar la conversión de número complejo estándar a su forma polar, pues es en la forma polar en la cual es aplicable el teorema de Moivre.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Resolución de ejercicios con las diferentes operaciones algebraicas que se pueden hacer con los números complejos (suma, resta, multiplicación, división, potencia).

1. (23 + 14i) + (36 – 22i)
2. (45 – 35i) – (25 + 12i)
3. (45 + 38i) * (12 – 23i)
4. (45 – 12i) / (5 + 12i)
5. (20 + 98i) + (43 + 45i)
6. (56 – 23i) – (-57 – 89i)
7. (34 – 56i) – (23 -67i)
8. (57 – 67i) + (89 + 90i)
9. (12 + 23i) – (76 – 34i)
10. (12 – 14i) * (23 – 22i)
11. (18 + 25i) * (96 + 76i)

12. (24 – 45i) / (12 + 14i)
13. $(34 – 23i)^2$
14. $(23 – 12i)^3$
15. $(22 + 18i)^3$

1.3. Elevación de potencias y extracción de la raíz del número complejo

Para poder obtener la potencia de un número complejo, aplicamos el Teorema conocido como el binomio de Newton, que se muestra a continuación. Teniendo en cuenta que las potencias de la unidad imaginaria dan como resultado el siguiente desarrollo matemático:

$$(a+bi)^m = \binom{m}{0}a^m + \binom{m}{1}a^{m-1}bi - \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 - \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 i + \binom{m}{4}a^{m-4}b^4 + \ldots$$

Otro número complejo cuya parte real es

$$\binom{m}{0}a^m - \binom{m}{2}a^{m-2}b^2 + \binom{m}{4}a^{m-4}b^4 + \ldots$$

Y cuya parte imaginaria es

$$\binom{m}{1}a^{m-1}b - \binom{m}{3}a^{m-3}b^3 + \binom{m}{5}a^{m-5}b^5 + \ldots$$

Como se puede observar en el teorema, a pesar de ser una única fórmula, se separan tanto la parte real como la parte imaginaria para poder obtener un resultado más conciso. Precisamos, para llevar a cabo este cálculo de dos funciones auxiliares denominadas *combinatorio* y *potencia*, una que calcule en número combinatorio *m* sobre *n*, y otra que calcule el resultado de elevar un número real a una potencia entera.

1.4. Función exponencial con exponente complejo y sus propiedades

Sea z = x + y.i, si x e y son variables reales, z es una variable compleja. Consideremos la función exponencial de variable compleja: $f(z) = e^{z} = e^{x + y.i}$

Los valores complejos de la función f (z) se definen del modo siguiente: $e^{x + y.i} = e^{x}.(\cos \alpha + i.\text{sen}\ \alpha)$

Sean z, z_1 y z_2 números complejos y m un número entero, entonces:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} \quad (e^{z})^{m} = e^{m.z} e^{z + 2.\pi.i} = e^{z}$$

Se cumplen las reglas de derivación de la función exponencial de variable real.

Consideremos un número imaginario puro, *la* fórmula de Euler[5] expresa la relación entre la función exponencial de exponente imaginario y las funciones trigonométricas y es: $e^{y.i} = \cos \alpha + i.\text{sen}\ \alpha$ de la podemos deducir las expresiones de seno y coseno en función de ellas.

$$\left.\begin{aligned} e^{yi} &= Cos\, y + i \cdot Sen\, y \\ e^{-yi} &= Cos\, y - i \cdot Sen\, y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} Cos\, y &= \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \\ Sen\, y &= \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \end{aligned}\right.$$

Sea z un número complejo en forma trigonométrica: z = r. (cos α + i.sen α) donde r es el módulo y α un argumento. Según la fórmula de Euler: $\cos \alpha + i.\text{sen}\ \alpha = e^{\alpha.i}$ $z = r.e^{\alpha.i}$ y todo número complejo puede ser representado en forma exponencial.

[5] La fórmula de Euler como tal es solamente una aplicación matemática mediante el cual se convierte una función exponencial (e) en un manejo de funciones trigonométricas representada por senos y cosenos.

AUTOEVALUACIÓN

Contesta correctamente las siguientes preguntas

1. Se conoce, con ese nombre a la combinación en una operación algebraica, de una parte real con una parte imaginaria:

2. ¿Qué es un número imaginario?

3. ¿Qué característica tiene un número imaginario?

Resuelve correctamente los siguientes problemas:

1. (5 + 3i) + (8 + 4i)

2. (7 + 9i) + (13 – 7i)

3. (19 – 20i) – (8 – 20i)

4. (-6 – 5i) – (-9 – 2i)

5. (3 + 4i) + (2 + 3i) – (5 – 2i)

6. (27 – 20i) + (36 – 35i) – (17 – 39i)

RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

1. Número complejo.

2. Es el número complejo cuya parte real es cero.
3. Es la raíz cuadrada de -1.

1. 13 + 7i
2. 20 +2i
3. 11
4. 3 – 3i
5. 9i
6. 46 – 16i

UNIDAD 2

MATRICES

$$\begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$$

OBJETIVO:

El estudiante definirá e identificará cada una de las características de las matrices, así el como usará las matrices matemáticas en la resolución de problemas algebraicos con incógnitas y las diversas operaciones que se pueden realizar con ellas.

TEMARIO:

2.1 Definición de matrices.

2.2 Clasificación de matrices

2.2.1 Cuadradas

2.2.2 Triangulares

2.2.3 Escalar

2.2.4 Unitaria

2.2.5 Nula

2.2.6 Transpuesta

2.3 Operaciones con matrices.

2.4 Transformaciones elementales de una matriz.

2.5 Rango de una matriz.

2.6 Matriz escalonada y canónica.

2.7 Definición de determinantes n x n.

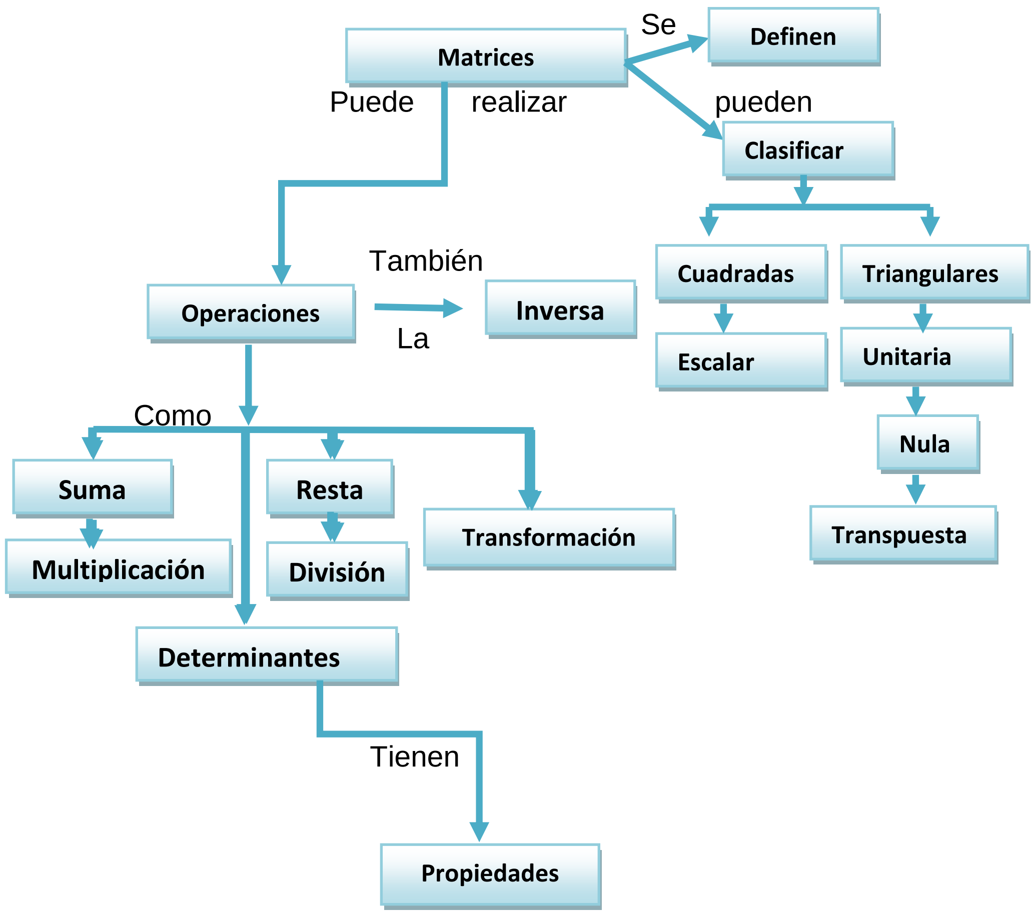
2.8 Cálculo de las determinantes n x n.

2.9 Propiedades de las determinantes.

2.10 Inversa de una matriz por el método de la adjunta.

2.11 Inversa de una matriz por el método de Gauss - Jordan.

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se trabajará con arreglos matriciales; se dará la definición clásica de matriz, sus propiedades así como también las diferentes clasificaciones de matrices. También se abordarán las diferentes operaciones que se pueden realizar con arreglos matriciales; para así poder dar paso al uso y aplicación de las determinantes en la resolución de ejercicios y problemas.

Se tocará el tema de matriz inversa y se empezará con el desarrollo de resolución de ecuaciones por el método de Gauss – Jordan. Esta unidad es de gran importancia dado que la unidad subsecuente que lleva por nombre sistemas de ecuaciones lineales va de la mano con esta unidad.

2.1.- Definición de matrices

En matemáticas, una matriz se puede definir como una tabla de números consistente en cantidades abstractas, con las cuales pueden realizarse operaciones algebraicas como la suma y la multiplicación. Las matrices se ocupan para describir sistemas de ecuaciones lineales, llevar a cabo un seguimiento de coeficientes para una aplicación lineal y para registrar una tabla de datos que dependen de varios parámetros. Las matrices son descritas en un campo denominado teoría de matrices.

Con las matrices pueden efectuarse operaciones algebraicas diferentes o descomponerse de varias maneras, lo cual las convierte en un punto clave dentro del álgebra lineal.

"Una matriz es una tabla cuadrada o rectangular de datos o también llamados elementos (llamados elementos o entradas de la matriz) ordenados en filas y columnas, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con m filas y n columnas se le denomina matriz m-por-n (escrito $m \times n$), y a m y n dimensiones de la matriz. Las dimensiones de una matriz siempre se deben dar en el siguiente orden: con el número de filas primero y el número de columnas después. Comúnmente se dice que una matriz m-por-n tiene un orden de m × n ("orden" tiene el significado de tamaño). Dos matrices son iguales si se cumple la siguiente regla: son del mismo orden y tienen los mismos elementos."[6]

"Al elemento o dato de una matriz que se encuentra en la fila i-ésima y la columna j-ésima se le llama elemento i, j o elemento (i, j)-iésimo de la matriz".[7] Adviértase que se cumple el orden descrito, colocar primero las filas y después las columnas.

"Comúnmente, se denotan a las matrices con letras mayúsculas mientras que se utilizan las correspondientes letras en minúsculas para denotar a los

[6] http://www.slideshare.net/monicacamachoc/metodos-numericos3-4800828

[7] http://www.slideshare.net/jmorenotito/presentacion-matrices-3129781

elementos o datos pertenecientes a las mismas. Por ejemplo, al elemento de una matriz *A* que se encuentra en la fila *i*-ésima y la columna *j*-ésima se le denota como $a_{i,j}$ o *a* [*i, j*]".[8]

"Notaciones alternativas son **A** [*i, j*] o $\mathbf{A}_{i,j}$. Además de utilizar letras mayúsculas para representar matrices, otra forma de poder representar a las matrices es mediante el uso de fuentes en negrita para distinguirlas de otros tipos de variables. Así **A** es una matriz, mientras que *A* es un escalar".[9]

"Normalmente se escribe $A := (a_{i,j})_{m\times n}$ para definir una matriz *A* $m \times n$ con cada elemento en la matriz *A* [*i, j*] llamada $a_{i,j}$ para todo $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Sin embargo, la convención del inicio de los índices *i* y *j* en 1 no es universal: algunos lenguajes de programación comienzan en cero, en cuál caso se tiene $0 \leq i \leq m - 1$ y $0 \leq j \leq n - 1$".[10]

"Una matriz que contenga una sola columna o que solamente tenga una sola fila se denomina a menudo vector, y se interpreta como un elemento del espacio euclídeo. Una matriz $1 \times n$ (una fila y *n* columnas) se denomina vector fila, y una matriz $m \times 1$ (una columna y *m* filas) se denomina vector columna".[11]

La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Es una matriz 4x3. El elemento *A* [2,3] o $a_{2,3}$ es 7.

La matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

[8] http://aprenderencasa.educ.ar/aprender-en-casa/matem%202.pdf
[9] *Ibidem.*
[10] http://matricescaece.blogspot.com/2009/05/matrices-una-matriz-es-una-ordenacion.html
[11] Grossman Stanley I, *Álgebra lineal*, p. 43.

Es una matriz 1×9, o un vector fila con 9 elementos.

2.2.- Clasificación de matrices

2.2.1.- Cuadrada

Una matriz de n*m elementos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si A es una matriz m por n con la siguiente característica m = n, entonces A se llama matriz cuadrada.[12] Una matriz es cuadrada si el número de elementos de la fila es igual al número de elementos de columnas.

"Podemos decir, entonces que la matriz es de orden n.

Toda matriz cuadrada la podemos descomponer en una suma de una matriz simétrica y una matriz anti simétrica"[13]

"Si la matriz *A* y *B* son matrices del mismo orden, entonces las podemos sumar entre sí. Los productos de matrices son válidos en ambos sentidos, *AB* y *BA,* recordando que orden de los factores no altera el producto. Además, surgen los conceptos de determinante".[14]

---

[12] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 45

[13] http://www.scribd.com/doc/6341041/Matriz

[14] http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:gFPpQnt_dNkJ:unefabsistemas.files.wordpress.com/2008/02/matriz.doc+Si+la+matriz+A+y+B+son+matrices+del+mismo+orden,+entonces+las+podemos+sumar+entre+sí.+Los+productos+de+matrices+son+válidos+en+ambos+sentidos,+AB+y&cd=4&hl=es&ct=clnk&gl=mx

“Una matriz cuadrada *A* de orden *n* es singular si su determinante es nulo. En tal caso se dice que dicha matriz no tiene inversa”.[15]

Ejemplo de matriz cuadrada para n = 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 8 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices cuadradas son las más utilizadas en álgebra.

2.2.2.- Triangulares

En álgebra lineal, una matriz triangular es un tipo especial y particular de matriz cuadrada cuyos elementos por encima o por debajo de su diagonal principal son cero.[16] Gracias a que los sistemas de ecuaciones lineales utilizando matrices triangulares son fáciles de resolver, las matrices triangulares son las más utilizadas en el análisis numérico para resolver sistemas de ecuaciones lineales con n incógnitas, calcular inversas de las matrices y determinantes de las mismas. El método de descomposición LU permite descomponer cualquier matriz invertible como producto de una matriz triangular inferior *L* y una superior *U*.

Una matriz cuadrada de orden *n* se afirma que es triangular superior, si posee la característica siguiente:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & . & . & . & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & . & . & . & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & . & . & . & u_{3n} \\ . & . & .. & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & u_{nn} \end{pmatrix}$$

[15] http://www.slideshare.net/marcecarrilloq/summary-of-matrixes-spanish-version
[16] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 110

Análogamente, una matriz de la forma:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & . & . & . & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & . & . & . & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Se dice que es una matriz triangular inferior.

"Se suelen emplear las letras U y L, respectivamente, ya que U es la inicial de *upper triangular matrix* y L de *lower triangular matrix*, los nombres que reciben estas matrices en inglés".[17]

Ejemplos

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es triangular superior y

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Es triangular inferior.

- Una matriz triangular superior e inferior es una matriz diagonal.
- El producto de dos matrices triangulares superiores (inferiores) es un matriz triangular superior (inferior).
- La transpuesta de una matriz triangular superior es una matriz triangular inferior y viceversa.

[17] http://www.slideshare.net/DUBANCASTROFLOREZ/matrices-pdf

- El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal.
- Una matriz triangular es invertible si y solo si todos los elementos de la diagonal son no nulos. En este caso, la inversa de una matriz triangular superior (inferior) es otra matriz superior (inferior).
- Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal.

Un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{b}$$

O

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{b}$$

Es muy fácil de resolver. El primer sistema puede escribirse como

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & b_1 \\ l_{2,1}x_1 & + & x_2 & & & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ l_{m,1}x_1 & + & l_{m,2}x_2 & +\ldots+ & x_m & = & b_m \end{array}$$

Que puede resolverse siguiendo un simple algoritmo recursivo

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & b_1 \\ x_2 & = & b_2 - l_{2,1}x_1 \\ & \vdots & \\ x_m & = & b_m - \sum_{i=1}^{m-1} l_{m,i}x_i \end{array} :$$

De forma análoga puede resolverse un sistema dado por una matriz triangular superior.

2.2.3.-Escalar

Una matriz escalar es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales, son aquellos arreglos matriciales en los cuales se deben de coincidir en el valor numérico con el mismo valor que se tiene al inicio de la matriz, como es en el caso del ejemplo que se muestra a continuación .

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2.4.- Unitaria

Una matriz unitaria podemos definirla como aquella en la que los elementos de su diagonal principal son todos iguales a uno y todos los demás elementos son iguales a cero. También se le conoce como matriz identidad porque cualquier matriz M con m filas y n columnas permanece sin cambios cuando se multiplica por una matriz unitaria N * N

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2.5.- Nula

En las ciencias matemáticas, pero en particular en álgebra lineal, una matriz cero o también llamada matriz nula es un matriz con todos sus elementos iguales a cero. Algunos ejemplos de matrices nulas son:

$$0_{1,1} = \begin{bmatrix}0\end{bmatrix},\ 0_{2,2} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ 0_{2,3} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, etc.$$

Por lo tanto, una matriz nula de orden *m*×*n* definida sobre un anillo K asume la forma:

$$0_{K_{m,n}} = \begin{bmatrix}0_K & 0_K & \cdots & 0_K\\ 0_K & 0_K & \cdots & 0_K\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0_K & 0_K & \cdots & 0_K\end{bmatrix}_{m\times n}$$

Una matriz cero es, al mismo tiempo, matriz simétrica, matriz anti simétrica, matriz ni potente y matriz singular.

2.2.6.- Transpuesta

Sea A = (a_{ij}) una matriz de m renglones * n columnas. La traspuesta de la matriz A, que se escribe A^t , es la matriz de n * m que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A.[18]

$$(A^t)_{ij} = A_{ji},\ 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

[18] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 118

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

Propiedades

Para toda matriz *A*

$$(A^t)^t = A.$$

Sean A y B matrices con elementos pertenecen a un anillo $\mathcal{A}$ y sea $c \in \mathcal{A}$

$$(A+B)^t = A^t + B^t.$$

$$(cA)^t = cA^t,$$

Si el producto de las matrices *A* y *B* está definido,

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

"Si *A* es una matriz cuadrada cuyas entradas son números reales, entonces."[19]

$$A^t A$$

Es semidefinida positiva

"Una matriz cuadrada *A* es simétrica si coincide con su transpuesta, esto es si."[20]

$$A^t = A$$

Es anti simétrica si coincide con su negativa

$$A^t = -A$$

---

[19] http://ksjyg.iespana.es/html/diary-BA3.html
[20] http://ksjyg.iespana.es/html/diary-BA3.html

Si los elementos de la matriz *A* son números complejos y su transpuesta coincide con su conjugada, se dice que la matriz es hermética

$$A^t = \bar{A}, \quad A = (\bar{A})^t = A^\dagger,$$

Y antihelmíntica si

$$A^t = -\bar{A}.$$

"Vale la pena observar que si una matriz es hermética (la matrices simétricas son un caso particular) entonces es diagonalizable y sus auto valores son reales. (El recíproco es falso)".[21]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Mediante el uso de un cuadro sinóptico describir la clasificación de las matrices.

2.3.- OPERACIONES CON MATRICES

Suma o adición

"Dadas matrices iguales en filas y columnas *m*-por-*n*, sean A y *B*, su suma *A* + *B* es la matriz *m*-por-*n* calculada sumando los elementos correspondientes a filas y columnas respectivamente. (y.i (*A* + *B*) [*i, j*] = *A* [*i, j*] + *B* [*i, j*]). Es decir, sumar cada uno de los elementos homólogos de las matrices a sumar".[22] Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

[21] http://ksjyg.iespana.es/html/diary-BA3.html

[22] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 48

“Propiedades

- Asociativa

Dadas las matrices *m* por *n A*, *B* y *C*”[23]

A + (B + C) = (A + B) + C

- “Conmutativa

Dadas las matrices *m* por *n A* y *B*

A + B = B + A

- Existencia de matriz cero o matriz nula”[24]

A + 0 = 0 + A = A

- Existencia de matriz opuesta

Con gr-A = [$-a_{i,\,j}$]

A + (-A) = 0

Producto por un escalar

Cuando se da una “matriz *A* y un escalar numérico c, su producto cA se calcula multiplicando el valor numérico escalar por cada elemento de la matriz *A* (i.e. (*cA*) [*i*, *j*] = *cA* [*i*, *j*]).”[25]

Ejemplo

$$2\begin{bmatrix}1 & 8 & -3\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times 1 & 2\times 8 & 2\times -3\\ 2\times 4 & 2\times -2 & 2\times 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 16 & -6\\ 8 & -4 & 10\end{bmatrix}$$

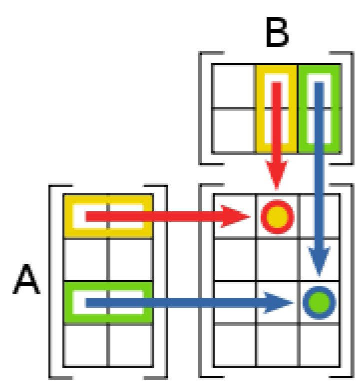
[23] *Ibidem.*
[24] *Ibidem.*
[25] http://metodosnumericosunefanc.blogspot.com/2009_04_01_archive.html

Propiedades

Sean *A* y *B* matrices y *c* y *d* escalares.

- Clausura: Si A es matriz y c es escalar, entonces cA es matriz.
- Asociatividad: (Cd)A = c(dA)
- Elemento Neutro: 1·A = A
- Distributividad:
    - De escalar: c(A+B) = cA+cB
    - De matriz: (c+d)A = cA+dA

Producto



“El producto de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha, deben de coincidir filas de una matriz con columnas de la otra matriz.”[26] “Si A es una matriz m por n y B es una matriz n por p, entonces su producto matricial AB es la matriz m por p (m filas, p columnas) dada por”:[27]

$$(AB)[i,j] = A[i,1]B[1,j] + A[i,2]B[2,j] + \ldots + A[i,n]B[n,j]$$

[26] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 60
[27] http://www.slideshare.net/RASHINX/matrices-mol-presentation

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 \times 3 + 0 \times 2 + 2 \times 1) & (1 \times 1 + 0 \times 1 + 2 \times 0) \\ (-1 \times 3 + 3 \times 2 + 1 \times 1) & (-1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Propiedades

" Si los elementos de la matriz pertenecen a un cuerpo, y puede definirse el producto, el producto de matrices tiene las siguientes propiedades":[28]

"Propiedad asociativa: (AB) C = A (BC)".[29]

"Propiedad distributiva por la derecha: (A + B) C = AC + BC".[30]

Propiedad distributiva por la izquierda: C(A + B) = CA + CB".[31]

"En general, el producto de matrices tiene divisores de cero: Si A.B = 0, No necesariamente A ó B son matrices nulas".[32]

"El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación: Si A.B = A.C, No necesariamente B=C."[33]

"El producto de dos matrices generalmente no es conmutativo, es decir, AB ≠ BA. La división entre matrices, es decir, la operación que podría producir el cociente A / B, no se encuentra definida. Sin embargo, existe el concepto de matriz inversa, sólo aplicable a las matrices cuadradas".[34]

"Las matrices pueden representar convenientemente aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales de dimensión finita. Así, si $\mathbb{R}^n$ es el espacio euclídeo *n*-dimensional cuyos vectores se pueden representar como vectores columna (matrices *n*-por-1), para cada aplicación lineal *f*: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existe una única matriz A *m* por *n* de tal forma que"[35]

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Para cada vector x de $\mathbb{R}^n$.

[28] http://www.ecured.cu/index.php/Matriz#Producto
[29] *Ibidem.*
[30] *Ibidem.*
[31] *Ibidem.*
[32] *Ibidem.*
[33] *Ibidem.*
[34] *Ibidem.*
[35] *Ibidem.*

“Se dice que la matriz A "representa" la aplicación lineal *f*, o que A es la matriz coordenada de *f*”.[36]

“El producto de matrices claramente corresponde a la composición de las aplicaciones. Si la matriz *k* por *m* **B** representa otra aplicación lineal *g*: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, entonces la composición *g* o *f* se representa por **BA”**:[37]

$$(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x})) = g(\mathbf{Ax}) = \mathbf{B}(\mathbf{Ax}) = (\mathbf{BA})\mathbf{x}.$$

“Esto se desprende de la mencionada propiedad asociativa del producto de matrices”.[38]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Ejercicios y problemas con las diferentes operaciones matriciales.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -19 & -21 \end{bmatrix}$$

1. Con las matrices de la parte de arriba; realizar las operaciones que se piden:

1. A + B
2. C + D
3. E + A
4. A – C
5. B – D
6. A – E
7. 5A
8. 7C
9. 8A – 4E
10. 3B – 5D

[36] http://www.ecured.cu/index.php/Matriz
[37] http://www.ecured.cu/index.php/Matriz
[38] *Ibidem.*

11. 6C – 8E
12. A * B
13. C * D
14. E * A
15. 4C * 5D

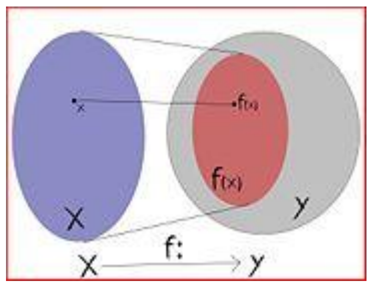
$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}5 & -1 & -6\\ -2 & 5 & 3\\ 3 & 4 & 2\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}5 & 2 & -8\\ -3 & -7 & 3\\ 4 & 0 & -1\end{bmatrix}; D=\begin{bmatrix}11 & -5 & 7\\ -12 & 3 & 8\\ -13 & 1 & 9\end{bmatrix}$$

2. Con las matrices de la parte de arriba; realizar las operaciones que se piden

1. A + B
2. C + D
3. D + A
4. A – C
5. B – D
6. A – B
7. 5A
8. 7C
9. 8A – 4B
10. 3B – 5D
11. 6C – 8A
12. A * B
13. C * D
14. D * A
15. 4C * 5D

2.4.- TRANSFORMACIONES ELEMENTALES DE UNA MATRIZ

Una aplicación lineal (también llamada función lineal, transformación lineal u operador lineal) es una aplicación entre dos espacios vectoriales que preserva las operaciones de suma de vectores y producto por un escalar. El término función lineal se usa incorrectamente en análisis matemático y en geometría para designar una recta, un plano, o en general una variedad lineal.



Son aplicaciones lineales los operadores usados en la formulación matemática de la mecánica cuántica.

Se denomina transformación lineal, función lineal o aplicación lineal a toda aplicación cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales que cumpla la siguiente definición:

> Sean *V* y *W* espacios vectoriales sobre el mismo espacio o campo *K*, y *T* una función de *V* en *W*. *T* es una transformación lineal si para todo par de vectores *u* y *v* pertenecientes a *V* y para todo escalar *k* perteneciente a *K*, se satisface que:[39]

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(ku) = kT(u)$ donde k es un escalar.

[39] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 460.

2.5.- RANGO DE UNA MATRIZ

"En álgebra lineal, el rango de una matriz es el número de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. Si se da el caso de que el rango fila y el rango columna son iguales, este número es llamado simplemente rango de *A*. Comúnmente se expresa como R(*A*)".[40]

"El número de columnas independientes de una matriz *m* por *n* es igual a la dimensión del espacio columna de *A*. También la dimensión del espacio fila determina el rango. El rango de *A* será, por tanto, mayor o igual que uno y menor o igual que el mínimo entre *m* y *n*".[41]

Ahora bien, lo que procede es definir el concepto de rango de una aplicación lineal:

$$f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

El rango es la dimensión del conjunto, imagen de la aplicación:

$$\text{rang } f = \dim(\text{Im} f) \leq m$$

Una cualidad relevante del rango tal como se ha definido y del rango de matrices, radica en que ambos son coincidentes. Es decir, partiendo de una base arbitraria, la aplicación lineal puede mostrarse por conducto de base en forma de matriz, con lo cual resulta el rango de la matriz, igual al rango de la aplicación lineal que representa.

Para establecer más claramente esta relación, deben fijarse dos bases vectoriales en cada uno de espacios $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$y $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$se puede expresar la transformación lineal por una matriz $A_{\mathcal{E},\mathcal{U}} = [a_{ij}]$ como una en una cierta base:

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \Longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Siendo:

[40] http://ksjyg.iespana.es/html/diary-BA2.html
[41] http://ksjyg.iespana.es/html/diary-BA2.html

$\mathbf{y} = y_1\mathbf{u}_1 + \cdots + y_m\mathbf{u}_m$, la imagen del vector **x**.
$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$, la anti imagen del vector **y**.

De este modo, puede demostrarse que el rango de $A_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$ coincide con la dimensión de la imagen de *f*, como ya se mencionó.

El rango puede calcularse, en relación con una aplicación lineal, al considerar una base cualquiera y al determinar el rango de la matriz que representa la aplicación en esa base, pues el número que se obtenga no estará sujeto de la base elegida.

Con el cálculo de determinantes, el rango de una matriz puede determinarse de modo sencillo. Así, la matriz $\mathbf{A}_f$ de una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$:

$$\mathbf{A}_f \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El rango queda de definido como el máximo entero *r,* de tal manera que existe un menor no nulo de orden *r*:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{cases} 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq m \end{cases}$$

Cabe mencionar que el método de Gauss-Jordan representa otra forma de obtener el rango de una matriz, la cual es idéntica al número de filas no nulas de la matriz obtenida con este método.

"Una útil aplicación de calcular el rango de una matriz es la de determinar el número de soluciones al sistema de ecuaciones lineales. El sistema tiene por lo menos una solución si el rango de la matriz de coeficientes equivale al rango de la matriz aumentada. En ese caso, ésta tiene exactamente una solución si el rango equivale al número de incógnitas; en otro caso, la solución general tiene k parámetros libres, donde k es la diferencia entre el número de incógnitas y el rango."[42]

"Una matriz es invertible (tiene inversa) si y sólo si su rango es máximo.

En teoría de control, el rango de una matriz se puede usar para determinar si un sistema lineal es controlable u observable".[43]

2.6.- Matriz escalonada y canónica

Una matriz se dirá que es escalonada si el primer elemento no cero en cada fila está más a la derecha que el de la fila anterior.

Ejemplos:

1) La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Si es escalonada.

2) La matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

No es escalonada.

Obviamente el escalonamiento de una matriz se logra "haciendo ceros" todos los elementos que están debajo de la diagonal principal.

"En álgebra Lineal, la forma canónica de Jordan es la forma de la matriz de un endomorfismo de un espacio vectorial en cierta base asociada a la

---

[42] https://www.u-cursos.cl/ingenieria/2007/2/MA33A/4/material_docente/previsualizar?id_material=149808

[43] http://ocw.ehu.es/ensenanzas-tecnicas/fundamentos-matematicos-de-la-ingenieria/contenidos/ejercicios/ejercicios-resueltos/rango-de-una-matriz

descomposición en suma directa de subespacios invariantes bajo dicho endomorfismo. Dicha forma canónica consistirá en que la matriz estará formada por "bloques de Jordan" en la diagonal y bloques de ceros fuera de ella”.[44]

“Dado un endomorfismo sobre un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$de dimensión *n* > 1, puede probarse que si su polinomio característico factoriza completamente sobre el cuerpo$\mathbb{K}$, existe una base donde la aplicación lineal viene dada por una "matriz de *m* bloques" ($m\leq n$) con la forma canónica siguiente”:[45]

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{A}_m \end{pmatrix} \in M_{n\times n}$$

“Donde cada "bloque de Jordan" o submatriz $\mathbf{A}_k$tiene la forma”:[46]

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \in M_{n_k\times n_k}$$

“Donde además se cumple que λ_k es raíz del polinomio característico y que”:[47]

$$\sum_{k=1}^{m} n_k = n$$

[44] http://www.territorioscuola.com/software/index_es.php?title=Forma_canónica_de_Jordan
[45] http://www.territorioscuola.com/software/index_es.php?title=Forma_canónica_de_Jordan
[46] *Ibidem.*
[47] *Ibidem.*

“Un caso interesante es el de los endomorfismo diagonalizables donde $m = n$ y $n_k = 1, \forall k$, siendo por tanto la forma canónica de Jordan una matriz diagonal”.[48]

“Considérese la situación de una matriz diagonalizable. Una matriz cuadrada es diagonalizable si la suma de las dimensiones de los espacios propios (*eigenspaces*) es el número de filas o columnas de la matriz. Examinemos la matriz siguiente”:[49]

$$A = \begin{pmatrix} 322 & -323 & -323 & 322 \\ 325 & -326 & -325 & 326 \\ -259 & 261 & 261 & -260 \\ -237 & 237 & 238 & -237 \end{pmatrix}$$

“Tenemos valores propios de *A* que son sólo $\lambda = 5, 5, 5, 5$. Ahora bien, la dimensión del núcleo de A-5I es 1, por lo tanto *A* no es diagonalizable. Sin embargo, podemos construir la forma de Jordan de esta matriz. Dado que la dimensión es 1, sabemos que la forma de Jordan está compuesta de solo un bloque de Jordan, es decir, la forma de Jordan de *A* es”:[50]

$$J = J_4(5) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

“Obsérvese que *J* puede escribirse como 5*I*+*N*, donde *N* es una matriz nipotente. Puesto que ahora tenemos *A* similar a dicha matriz simple, podremos realizar cálculos que involucren a *A* usando la forma de Jordan, lo que en

[48] *Ibidem.*
[49] *Ibidem.*
[50] *Ibidem.*

muchos casos puede simplificar el cálculo. Por ejemplo, calcular potencias de matrices es significativamente más sencillo usando la forma de Jordan”.[51]

2.7.- DEFINICIÓN DE DETERMINANTE N * N

“En matemáticas se define el determinante como una forma no-lineal alterna de un cuerpo E^n. Esta definición indica una serie de propiedades matemáticas y generaliza el concepto de determinante haciéndolo aplicable en numerosos campos. Sin embargo, el concepto de determinante o de volumen orientado fue introducido para estudiar el número de soluciones de los sistemas lineales de ecuaciones”.[52]

“Para el cálculo de determinantes de matrices de cualquier orden, existe una regla recursiva (teorema de Laplace) que reduce el cálculo a sumas y restas de varios determinantes de un orden inferior. Este proceso se puede repetir tantas veces como sea necesario hasta reducir el problema al cálculo de múltiples determinantes de orden tan pequeño como se quiera. Sabiendo que el determinante de un escalar es el propio escalar, es posible calcular el determinante de cualquier matriz aplicando dicho teorema”.[53]

“El caso de matrices de orden inferior (orden 2 o 3) es tan sencillo que su determinante se calcula con sencillas reglas conocidas. Dichas reglas son también deducibles del teorema de Laplace”.[54]

“Los determinantes de una matriz de orden 2 se calculan con la siguiente fórmula”:[55]

$$\det(A) = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

---

[51] *Ibidem.*

[52] http://www.conocimientosweb.net/dcmt/downloads-cat-61.html

[53] Grossman Stanley I, ÁLGEBRA lineal, p. 68. Y en http://mate3.foroactivo.com/tu-primer-foro-f1/interpretacion-geometrica-de-un-determinante-de-orden-2x2-t3.htm

[54] http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:LorVDnPw-vMJ:regulacionaut.blogspot.com/+El+caso+de+matrices+de+orden+inferior+(orden+2+o+3)+es+tan+sencillo+que+su+determinante+se+calcula+con+sencillas+reglas+conocidas.+Dichas+reglas+son+también+deducibles+del+teorema+de+Laplace.&cd=3&hl=es&ct=clnk&gl=mx

[55] *Ibidem.*

“Un determinante de orden 3 se calcula mediante la regla de Sarrus”:[56]

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{matrix} \end{array} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

“El determinante de orden n, puede desarrollarse a partir de una fila o columna, reduciendo el problema al cálculo de un determinante de orden n-1. Para ello se toma una fila o columna cualquiera, multiplicando cada elemento por su adjunto (es decir, el determinante de la matriz que se obtiene eliminando la fila y columna correspondiente a dicho elemento, multiplicado por $(-1)^{i+j}$ donde i es el número de fila y j el número de columna). La suma de todos los productos es igual al determinante”.[57]

“En caso de un determinante de orden 4, se obtienen directamente determinantes de orden 3 que podrán ser calculados por la regla de Sarrus. En cambio, en los determinantes de orden superior, como por ejemplo n = 5, al desarrollar los elementos de una línea, obtendremos determinantes de orden 4, que a su vez se deberán desarrollar en por el mismo método, para obtener determinantes de orden 3. Por ejemplo, para obtener con el método especificado un determinante de orden 4, se deben calcular 4 determinantes de orden 3. En cambio, si previamente se logran tres ceros en una fila o columna, bastara con calcular solo un determinante de orden 3 (ya que los demás determinantes estarán multiplicados por 0, lo que los anula)”.[58]

“La cantidad de operaciones aumenta muy rápidamente. En el peor de los casos (sin obtener ceros en filas y columnas), para un determinante de orden 4 se deberán desarrollar 4 determinantes de orden 3. En un determinante de

[56] Baldor Aurelio, Álgebra p. 345
[57] http://fizxoworks.foroactivo.net/trabajos-f1/matrices-part-3-t92.htm
[58] http://fizxoworks.foroactivo.net/trabajos-f1/matrices-part-3-t92.htm

orden 5, se obtienen 5 determinantes de orden 4 a desarrollar, dándonos 20 determinantes de orden 3. El número de determinantes de orden 3 que se"[59] obtienen en el desarrollo de un determinante de orden n es igual a $\frac{(n!)}{(3!)}$

"Por ejemplo, mediante este método, para un determinante de orden 10 se deberán calcular 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 = 604.800 determinantes de orden 3. También puede utilizarse el Método de eliminación Gaussiana, para convertir la matriz en una matriz triangular. Si bien el proceso puede parecer tedioso, estará muy lejos de los 14.529.715.200 de determinantes de orden 3 necesarios para calcular el determinante de una matriz de orden 14".[60]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Realizar un resumen sobre el tema de determinantes.

2.8.- CÁLCULO DE LAS DETERMINANTES N * N

"Notación matemática formada por una tabla cuadrada de números, u otros elementos, entre dos líneas verticales, dichas líneas verticales no deben de ser confundidas con las líneas de valor absoluto; el valor de la expresión se calcula mediante su desarrollo siguiendo ciertas reglas. Los determinantes fueron originalmente investigados por el matemático japonés Seki Kowa alrededor de 1683 y, por separado, por el filósofo y matemático alemán Gottfried Wilhhelm Leibniz alrededor de 1693. Esta notación se utiliza en casi todas las ramas de las matemáticas y en las ciencias naturales".[61]

La figura que se muestra en la parte de abajo es una determinante de orden n, pues es una tabla que contiene n filas y n columnas, esto nos indica que la determinante va desde un primer elemento a_{11} hasta un elemento a_{nn}. Un

---

[59] http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:gFPpQnt_dNkJ:unefabsistemas.files.wordpress.com/2008/02/matriz.doc+La+cantidad+de+operaciones+aumenta+muy+rápidamente.+En+el+peor+de+los+casos+(sin+obtener+ceros+en+filas+y+columnas),+para+un+determinante+de+orden+4&cd=4&hl=es&ct=clnk&gl=mx

[60] *Ibidem.*

[61] Grossman Satnley I, Álgebra Lineal, p. 168.

determinante de orden *n*-ésimo es una tabla cuadrada con *n* filas y *n* columnas como se muestra en la figura:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

"El *adjunto menor, Mij*, de un elemento cualquiera *aij* de la tabla es el determinante formado por los elementos restantes al eliminar la fila *i* y la columna *j* en las que aparece el elemento *aij*. El *cofactor, Aij*, de un elemento *aij* es igual a (-1) *i+jMij*".[62]

"El valor de un determinante se puede expresar usando los elementos de una fila (o columna) y sus respectivos cofactores; la suma de estos productos es el valor del determinante. Formalmente, esto se expresa como"[63]

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

Si el desarrollo se hace en función de la fila *i,* o

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

"Si se hace en función de la columna *j*. De esta manera, para calcular el valor de un determinante de tercer orden utilizando los elementos de la primera columna".[64]

62 Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 169
63 *Ibidem.*
64 *Ibidem.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

"Estos términos se evalúan a su vez utilizando la definición dada anteriormente para el determinante de segundo orden".[65]

"Para determinantes de orden superior al tercero, el proceso se repite para los determinantes formados por los adjuntos menores, hasta llegar a determinantes que puedan desarrollarse fácilmente".[66]

"Este método de cálculo del valor de un determinante puede ser bastante laborioso, por lo que se utilizan ciertas propiedades de los determinantes para reducir la cantidad de cálculos necesarios. Entre estas propiedades, tenemos las siguientes":[67]

1) "Un determinante es igual a cero si todos los elementos de una fila (o columna) son idénticos, o proporcionales, a los elementos de otra fila (o columna)".[68]

2) "Si todos los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un factor dado, el determinante queda multiplicado por dicho factor".[69]

3) "El valor de un determinante no se altera si se añade a cada elemento de una fila (o columna) el elemento correspondiente de otra fila (o columna) multiplicado por un factor constante".[70]

"Una aplicación de los determinantes en la geometría analítica se muestra en el siguiente ejemplo: Si $P1(x1, y1)$, $P2(x2, y2)$, y $P3(x3, y3)$ son tres puntos

---

[65] http://mariaguerrero-petrol006.lacoctelera.net/post/2008/04/22/asignacion-n-3-1er-corte

[66] *Ibidem.*

[67] *Ibidem.*

[68] http://fisimate.blogspot.com/2007_05_01_archive.html

[69] http://books.google.com.mx/books?id=ti7uSUv3O18C&pg=PA6&lpg=PA6&dq=Un+determinante+es+igual+a+cero+si+todos+los+elementos+de+una+fila+(o+columna)+son+idénticos,+o+proporcionales,+a+los+elementos+de+otra+fila+(o&source=bl&ots=OAjlf5StJT&sig=sxNob8JsLOKxTUF6wsw19kGJ-Zo&hl=es&ei=MnJHTLWwKoL7lwfV0uGFBQ&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=4&ved=0CCIQ6AEwAw#v=onepage&q&f=false

[70] http://fisimate.blogspot.com/2007_05_01_archive.html

distintos en un plano de coordenadas cartesianas, el área *A* del triángulo *P*1*P*2*P*3, ignorando el signo algebraico, está dada por”[71]

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

“Si los tres puntos son colineales, el valor del determinante es cero”.[72]

Asimismo, los sistemas de ecuaciones pueden resolverse por vía de los determinantes, a saber:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ . \ . \ . \ + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ . \ . \ . \ + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ . \ . \ . \ + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

“Se construye un determinante, Ä, utilizando estos coeficientes, y siendo Ä*k* el determinante que se obtiene al eliminar la columna *k* y sustituirla por la columna de las constantes *b*1, *b*2, ... *b*n. Si Ä " 0 las ecuaciones son consistentes y es posible encontrar una solución. Ésta está dada por”[73]

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},\ k = 1, 2, \ldots, n$$

[71] http://mariaguerrero-petrol006.lacoctelera.net/post/2008/04/22/asignacion-n-3-1er-corte

[72] http://webcache.googleusercontent.com/search?q=cache:oI140vmFFy4J:www.matecsc.com/guiasmedia/4diferenciado/determinantes.doc+Si+los+tres+puntos+son+colineales,+el+valor+del+determinante+es+cero.Los+determinantes+se+utilizan+también+para+resolver+sistemas+de+ecuaciones+de&cd=3&hl=es&ct=clnk&gl=mx

[73] http://bulmarovazquezv.blogspot.com/2009/10/35-definicion-de-una-determinante.html

"Si Ä = 0, es necesario investigar las razones para averiguar el número y la naturaleza de las soluciones".[74]

"Este es un ejemplo numérico. Dados: 2x1 + 3*x*2 + 4*x*3 = 6, *x*1 + *x*2 + *x*3 = 3 y *x*1 - *x*2 + *x*3 = -1, entonces tenemos que *x*1 = Ä1 / Ä = 2. Si construimos Ä 2 y Ä3 el resultado es *x*2 = 2 y *x*3 = -1."[75]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Encontrar la determinante de los siguientes ejercicios.

---

[74] *Ibidem.*
[75] *Ibidem.*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ -19 & -21 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 9 & -11 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -15 & -1 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 17 & 13 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -6 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -3 & -7 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 7 \\ -12 & 3 & 8 \\ -13 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 8 & -6 & 9 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

2.9.- Propiedades de las determinantes

- Un valor invariante algebraico se constituye en el determinante de una matriz, esto conlleva que todas las matrices que la represente, dada unas aplicaciones lineales, habrán de tener el mismo determinante. Lo cual posibilita definir el valor del determinante, tanto para matrices como para aplicaciones lineales.
- El comportamiento multiplicativo frente al producto de matrices constituye una característica o cualidad fundamental del determinante:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

"Los cual implica, en términos de aplicaciones lineales dada la relación existente entre la composición de aplicaciones lineales y el producto de matrices que las representan que, dadas dos aplicaciones lineales u y v se tiene la siguiente igualdad”:[76]

$$\det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v)$$

- “El determinante de una matriz y el de su matriz traspuesta coinciden: $\det(A^t) = \det(A)$”.[77]
- “Una aplicación lineal entre espacios vectoriales es invertible si y sólo si su determinante no es nulo. Por lo tanto, una matriz con coeficientes en un cuerpo es invertible si y sólo si su determinante es no nulo”.[78]

“Sean *A*, *B,* *C*, *D* matrices $n \times n, n \times m, m \times n, m \times m$ respectivamente. Entonces”.[79]

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

“Esto se puede ver de la fórmula de Leibniz. Empleando la siguiente identidad

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

Vemos que para una matriz general

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

“Análogamente, se puede obtener una identidad similar con de (*D*) factorizado

[76] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 183 – 186
[77] *Ibidem.*
[78] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 183 – 186
[79] *Ibidem.*

Si d_{ij} son matrices diagonales,

$$\det\begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1c} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{r1} & \dots & d_{rc} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \det(d_{11}) & \dots & \det(d_{1c}) \\ \vdots & & \vdots \\ \det(d_{r1}) & \dots & \det(d_{rc}) \end{pmatrix}.$$ 7

"Dada una matriz cuadrada o rectangular se pueden definir los llamados determinantes menores de orden *r* a partir del determinante de submatrices cuadradas de *r* x *r* de la matriz original. Dada la matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$:"[81]

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se define cualquier menor de rango *r* como:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}, \qquad \begin{cases} 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n \\ 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_r \le m \end{cases}$$

Cabe resaltar que hay, en general, un número elevado de menores de orden *r*, incluso tal número de una matriz *m*x*n* viene dado por:

$$\mathrm{Min}_r^{m\times n} = \binom{m}{r}\binom{n}{r}$$

Se debe señalar, como punto de interés, que el rango coincide con el orden del menor no nulo más grande posible. Así, para calcular el rango de una matriz o de una aplicación lineal, se suele ocupar el cálculo de menores.

---

[80] *Ibidem.*
[81] http://algebra-lineal003pet.lacoctelera.net/post/2008/05/12/actividad-3

2.10.- INVERSA DE LA MATRIZ POR EL MÉTODO DE LA ADJUNTA

“En matemáticas, y especialmente en álgebra lineal, una matriz cuadrada A de orden n se dice que es invertible, no singular, no degenerada o regular si existe otra matriz cuadrada de orden n, llamada matriz inversa de A y representada como A^{-1}, tal que”,[82]

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n,$$

“Donde I_n es la matriz identidad de orden n y el producto utilizado es el producto de matrices usual”.[83]

“Una matriz no invertible se dice que es singular o degenerada. Una matriz es singular si y solo si su determinante es cero”.[84]

“La inversión de matrices es el proceso de encontrar la matriz inversa de una matriz dada.”[85]

- “La inversa de una matriz, si existe, es única.
- La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas cambiando el orden”:[86]

$$(B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

- “Si la matriz es invertible, también lo es su transpuesta, y el inverso de su transpuesta es la transpuesta de su inversa, es decir”:[87]

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

[82] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal. P. 94 - 98
[83] http://aprenderencasa.educ.ar/aprender-en-casa/matem%203.pdf
[84] *Ibidem.*
[85] *bidem.*
[86] http://www.slideshare.net/marcecarrilloq/summary-of-matrixes-spanish-version
[87] *Ibidem.*

- Y, evidentemente:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

- "Una matriz es invertible si y sólo si el determinante de A es distinto de cero. Además la inversa satisface la igualdad":[88]

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, adj(A)^T$$

"Donde $|A|$ es el determinante de A y $adj(A)$ es la matriz de adjuntos de A".[89]

"Supongamos que *B* y *C* son inversas de *A*"[90]

$$AB = BA = I$$

$$AC = CA = I$$

Multiplicando por *C*

$$(BA)C = IC = C$$

$$(BA)C = B\,(AC) = BI = B$$

De modo que *B*=*C* y se prueba que la inversa es única.

El cálculo de la matriz inversa, en matrices de 2x2, se hace del siguiente modo:

[88] http://www.scribd.com/doc/34217932/Matriz-Inversa-o1-grupo-5
[89] *Ibidem.*
[90] http://www.mitecnologico.com/Main/CalculoInversaDeMatriz

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Los cual es posible siempre que el determinante de la matriz (ad-bc), no sea cero.

"Ahora bien, la siguiente fórmula puede ocuparse para matrices de órdenes superiores": [91]

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj(A)^T$$

"Donde $|A|$ es el determinante de A y $adj(A)$ es la matriz de adjuntos de A".[92]

2.11.- INVERSA DE UNA MATRIZ POR EL MÉTODO DE GAUSS – JORDAN

AX=Y matriz aumentada.

Solo son invertibles para sistemas cuadrados.

"Sea $A = (a_{i\,j})$ una matriz cuadrada de coeficientes orden n. Para calcular la matriz inversa de A, que denotaremos como A^{-1}, seguiremos los siguientes pasos": [93]

"Paso 1. Construir la matriz $n * 2n$ $M = (A \vdots I)$ esto es, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha".[94]

"Paso 2. Se deja tal y como está la primera fila de M, y debajo del primer término de la diagonal principal, a_{11}, que llamaremos *pivote*, ponemos ceros. Luego se opera como se indica en el siguiente ejemplo".[95]

[91] Grossman Stanley I, Álgebra Lineal, p. 204 – 207.
[92] *Ibidem.*
[93] http://decon.edu.uy/diploma/matematica/PARTE%20III.pdf
[94] *Ibidem.*
[95] *Ibidem.*

Ejemplo:

"Consideremos una matriz 3 * 3 arbitraria"[96]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Paso 1.

$$M = (A \;\vdots\; I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

"Paso 2."[97]

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{11} & 1 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejemplo:

"Supongamos que queremos encontrar la inversa de"[98]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

[96] *Ibidem.*
[97] *Ibidem.*
[98] *Ibidem.*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"La mitad izquierda de *M* está en forma triangular, por consiguiente, *A* es invertible. Si hubiera quedado toda una fila con ceros en la mitad *A* de *M*, la operación habría terminado (*A* no es invertible). A continuación, cogemos como pivote a_{33}, ponemos ceros encima de éste y seguimos operando hasta que nos quede una matriz diagonal".[99]

$$M = \begin{array}{c} -2,+L2 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{array}{c} -4,+L3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = L2+L3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[99] *Ibidem.*

$$M = \begin{array}{r} \\ \\ -1,+L2 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = -1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{array}{r} \\ \\ -2,+L1 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

“La matriz que ha quedado en la mitad derecha de *M* es precisamente la matriz inversa de *A”*.[100]

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

“Para comprobar si el resultado es correcto, se procede a multiplicar AA^{-1}, teniendo que dar como resultado la matriz identidad *I”*.[101]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

---

[100] *Ibidem.*
[101] *Ibidem.*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolver

Ejemplo 1:

“Si el sistema tiene solución única y es cuadrado pude ser invertible”.[102]

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 4\,x_2 & 2\,x_3 & 4\,x_4 \\ 0 & -x_2 & -x_3 & -2\,x_4 \\ 0 & 0 & -x_3 & -x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

“Al aplicar Gauss es observable que el sistema tendrá una infinidad de soluciones”.[103]

“Como analizaremos más tarde, el determinante debe ser diferente de cero, para este caso Det (M)=0”.[104]

[102] http://148.216.10.84/matematicas/inversa.htm
[103] *Ibidem.*

Ejemplo:

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det (M) = -4

El sistema sí es invertible, y M^{-1} es:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-5}{2} & \frac{11}{4} & -2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & \frac{-7}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

[104] *Ibidem.*

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Encontrar la matriz inversa de los siguientes ejercicios.

$$A=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & -8\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}-5 & -8\\ -19 & -21\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}7 & 9\\ 5 & -2\end{bmatrix}$$

$$G=\begin{bmatrix}9 & -11\\ -3 & 7\end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix}-15 & -1\\ 13 & 2\end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix}12 & -1\\ 13 & -9\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}10 & 3\\ 17 & 13\end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -6 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -8 \\ -3 & -7 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 7 \\ -12 & 3 & 8 \\ -13 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 10 \\ 8 & -6 & 9 \\ 7 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

AUTOEVALUACIÓN

Contesta correctamente las siguientes preguntas

1. ¿Qué es una matriz?
2. Una matriz está compuesta de:
3. Una matriz es cuadrada cuando:
4. La característica principal de las matrices triangulares, y que la distingue de las matrices cuadradas, es:
5. ¿Qué es una matriz nula?

Resuelve correctamente los siguientes problemas dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

1. A + B
2. 5A
3. B + 3C
4. -3B + 2C
5. 0C
6. 2A + 4B – 3

RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

1. una matriz es una tabla de números consistente en cantidades abstractas que pueden sumarse y multiplicarse
2. filas y columnas
3. el numero de filas es igual al número de columnas
4. que todos los elementos ya sean de arriba o de debajo de la diagonal principal son ceros
5. es una matriz con todos sus elementos iguales a cero.

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 11 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -15 \\ 5 \\ 20 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

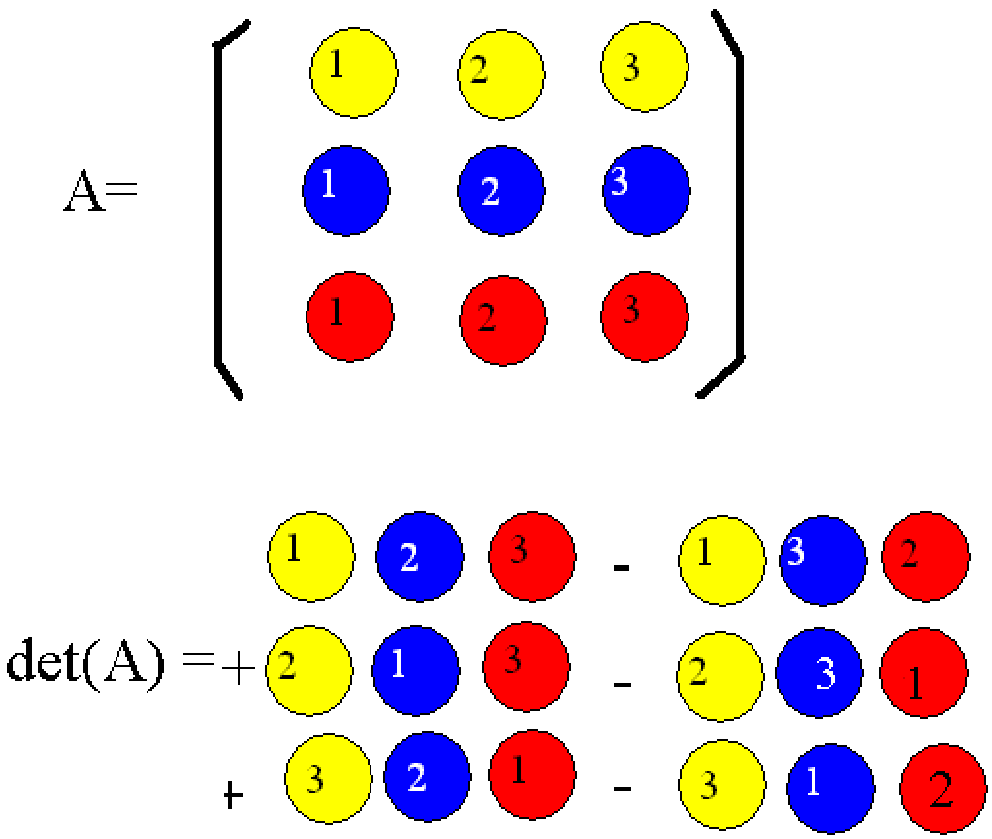
4. $\begin{bmatrix} -11 \\ 12 \\ -25 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 8 \\ -14 \\ 42 \end{bmatrix}$

UNIDAD 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



[105]

OBJETIVO:

El estudiante describirá las diferentes formas de soluciones de ecuaciones lineales por los diversos métodos

[105] http://webddelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/algebralineal/determinante20.GIF

TEMARIO

3.1. Definición de un sistema de ecuaciones lineales.

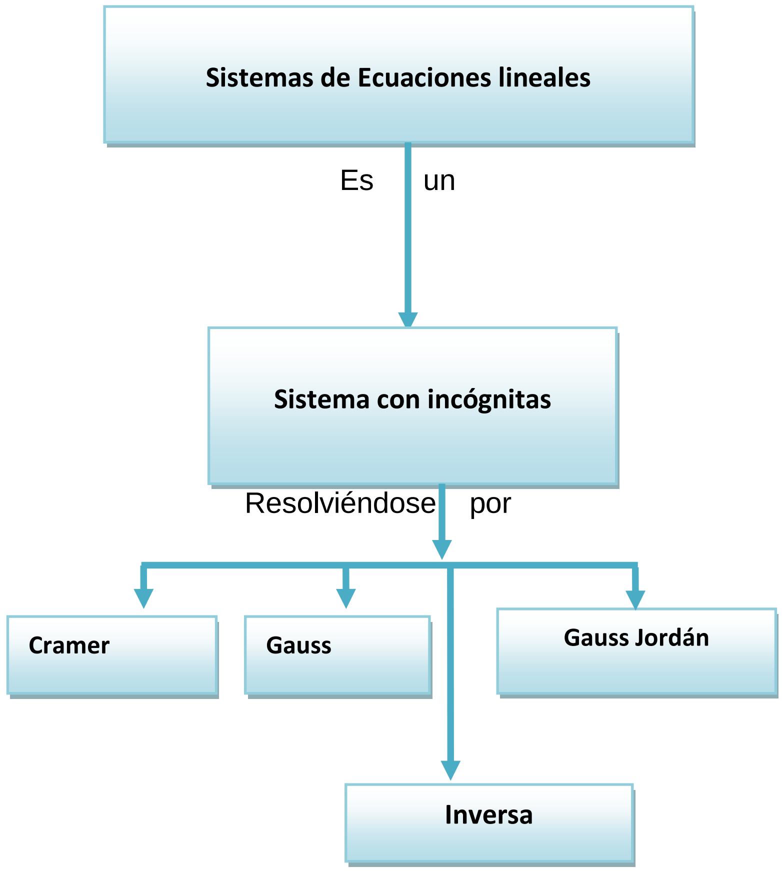
3.2. Solución de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

3.3. Solución de ecuaciones lineales por el método de Gauss - Jordan.

3.4. Solución de ecuaciones lineales por el método de la inversa.

3.5. Solución de ecuaciones lineales por el método de Cramer.

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se tratarán los temas referentes a los sistemas de ecuaciones lineales; se trabajarán con los métodos comunes matriciales para poder encontrar incógnitas en un sistema de ecuaciones lineales.

Los métodos a revisar serán: el método de Gauss simple, el método de Gauss – Jordan, el método de la matriz inversa y el método de la regla de Cramer. Todos ellos sirven para despejar incógnitas en un sistema de ecuaciones lineales.

3.1.- DEFINICIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

En las matemáticas y el álgebra lineal, un sistema de ecuaciones lineales, sistema lineal de ecuaciones o solamente sistema lineal, es un vínculo de ecuaciones lineales sobre un cuerpo o un anillo conmutativo. Un ejemplo de sistema lineal de ecuaciones sería el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 4\,x_3 & = & -2 \\ -\,x_1 & + & \frac{1}{2}\,x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

La complicación consiste en hallar los valores desconocidos de las variables x_1, x_2 y x_3 que satisfacen las tres ecuaciones.[106]

En general, un sistema con *m* ecuaciones lineales *n* incógnitas puede ser escrito en forma ordinaria como:

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & =b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & =b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & =b_m \end{array}$$

Donde $x_1,\dots,x_n$son las incógnitas y los números a_{11} hasta a_{mn},son los coeficientes del sistema sobre el cuerpo de las incógnitas. Es posible reescribir el sistema separando con coeficientes con forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos:

[106] Grossman Stanley I. Álgebra Lineal, p 1 – 5.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Donde el término A es una matriz *m* por *n*,y es representado en el ejemplo de la parte de arriba por los elementos a_{11} hasta el elemento a_{mn}, el elemento x es un vector columna de longitud *n* , y es representado en el ejemplo de la parte de arriba por los elementos x_1 hasta el elemento x_n, y el elemento b es otro vector columna de longitud *m,* que se representa por los datos b_1 hasta b_m. . La solución de los sistemas de ecuaciones lineales es muy fácil de encontrar cuando los coeficientes(valor numérico que acompaña a las incógnitas) de las ecuaciones son números reales o complejos.

Una característica muy importante que podemos encontrar en los sistemas lineales de ecuaciones es que pueden utilizar la llamada forma matricial o mas conocido como arreglo matricial. Esa forma permite representar el sistema usando tres matrices, de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1Y} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2Y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{X1} & a_{X2} & \cdots & a_{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_X \end{pmatrix}$$

La primera es la matriz de coeficientes (valores numéricos que acompañan a las incógnitas), donde los términos a_{11} al término a_{xy} representa al coeficiente que acompaña a la *j-ésima* incógnita de la ecuación *i-ésima*. La segunda es la matriz de incógnitas, donde cada término, x_1 a x_y, se corresponde con una de las incógnitas que queremos encontrar. Y la tercera matriz es la de términos independientes o resultados de las ecuaciones, donde el cada elemento, b_1 a b_x, representa al término independiente de la ecuación *i-ésima*.

Este arreglo matricial facilita el uso de algunos métodos de resolución, como el método de Gauss simple o el de Gauss Jordan, en el que, partiendo de la matriz aumentada (matriz de coeficientes con los resultados de las ecuaciones incluidos a ella), y aplicando transformaciones lineales sobre las ecuaciones, pretendemos llegar a una matriz de este tipo, donde la diagonal principal de mi matriz esta compuesta de puros unos, y todos los demás coeficientes son ceros; y a cada uno le corresponde un único valor de b que es la solución de la incógnita que representa el uno:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_X \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Mediante un resumen desarrollar un trabajo escrito referente a los sistemas lineales explicados en clase.

3.2.- SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES POR EL MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss o eliminación simple de Gauss, es una de las técnicas empleadas por matemáticos e ingenieros para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. El método comprende dos fases:

- Eliminación de las incógnitas hacia adelante
- Sustitución hacia atrás

La primera fase tiene el objetivo de reducir el sistema original a una forma triangular superior, en la cual la diagonal principal tendrá los valores de uno, y los elementos que están debajo de la diagonal principal valdrán cero . Por ejemplo, para un sistema lineal de *n* ecuaciones en *n* incógnitas que se representa con la siguiente matriz aumentada:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & | & b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & | & b_\mathrm{n} \end{pmatrix}$$

Se comienza eliminando la primera incógnita x_1 de la segunda ecuación hasta la *n*-ésima ecuación, es decir que todos los elementos que están por debajo del dato a_{11} se deben de eliminar matemáticamente. De esta forma se obtienen los resultados del arreglo matricial que se encuentra en la parte de abajo.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n & | & b_1 \\ & a'_{22}\,x_2 & \cdots & a'_{2n}\,x_n & | & b'_2 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ & a'_{n2}\,x_2 & \cdots & a'_{1n}\,x_n & | & b'_\mathrm{n} \end{pmatrix}$$

En esta primera parte de las operaciones realizadas para las ecuaciones se dice que la primera ecuación del sistema con la cual trabajamos es la *ecuación pivote* y al coeficiente a_{11} del sistema, se le conoce como *coeficient*e o *elemento pivote*. Es común referirse al proceso de eliminar incógnitas hacia delante con el nombre de *normalización* de un sistema de ecuaciones, el cual consiste en que todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal se convierten algebraicamente en ceros.[107]

Cuando se ha eliminado del sistema de ecuaciones la primera incógnita x_1 de la segunda ecuación hasta la *n*-ésima ecuación, se procede a eliminar la segunda incógnita x_2, de la tercera ecuación del sistema hasta la *n*-ésima, este paso se repite hasta que se llega al siguiente arreglo matricial:

---

[107] Grossman Stanley I. Álgebra Lineal, p. 7 – 15

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 & \cdots & a_{1n}x_n & | & b_1 \\ & a'_{22}\,x_2 & a_{23}x_3 & \cdots & a'_{2n}\,x_n & | & b'_2 \\ & & a''_{33}\,x_3 & \cdots & a''_{3n}\,x_n & | & b''_3 \\ & & & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)}x_n & | & b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Que como se puede ver , es una matriz *triangular* superior(en la cual todos los elementos debajo de la diagonal principal valen ceros), en donde los apóstrofos de prima ('), bi-prima ("),…, *n*-1 prima ($^{n-1}$), indican el número de operaciones de normalización que se realizaron a cada una de las ecuaciones del sistema.

La segunda fase de la eliminación de Gauss simple, consiste en que, una vez que se obtuvo la matriz triangular superior a través de operaciones de normalización, realizar la sustitución hacia atrás. Este proceso comienza despejando el valor de x_n de la última ecuación del arreglo matricial.

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

De esta forma se obtiene el valor de x_n a su vez, este resultado se sustituye hacia atrás en la ecuación que se encuentra arriba de la ecuación de x_n . Este mecanismo se repite para las todas las incógnitas x restantes, lo que se representa mediante la fórmula general:

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

El método de eliminación de Gauss, puede enfrentar las siguientes dificultades:

- *Error de redondeo*. Principalmente porque pueden haber variaciones de acuerdo al redondeo de cálculos que se hagan. División entre cero. El ejemplo de abajo muestra una división entre ceros, cuando no existe el elemento a_{11}. a

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= -3 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

- *Sistemas mal condicionados*. Esto sucede cuando pequeñas variaciones en los coeficientes pueden generar grandes alteraciones en los resultados finales.. Ejemplo de un sistema mal condicionado:

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 &= 10 \\ 1.05x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

  Solucionándolo, se tiene que x_1 = 8 y x_2 = 1. Modificando ligeramente el valor de la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} x_1 + \ 2x_2 &= 10 \\ 1.1x_1 + 2x_2 &= 10.4 \end{aligned}$$

  Obtenemos que x_1 = 4 y x_2 = 3. Como se puede observar, un *ligero* cambio en uno de los coeficientes del sistema, origina una *fuerte* variación en la solución del mismo.

- Usar un mayor número de cifras significativas, de preferencia todos los dígitos del cálculo.

- *Pivoteo*. Hay que saber pivotear bien, en caso de ser necesario se pueden mover las ecuaciones para poder obtener un pivoteo mas fácil, si se hace esto se deben de acomodar en el lugar que le corresponde a cada coeficiente, se puede hacer este paso respetando el lugar de los coeficientes en la ecuación, en caso contrario se afectará el resultado final.. Al procedimiento en el que tanto enlas columnas como las filas se busca el elemento de mayor valor absoluto y posteriormente se cambian de posición se denomina *pivoteo total*.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Encontrar el valor de las incógnitas x, y, z. usando el método de Gauss.

$$1\begin{bmatrix} x+4y-z=6 \\ 2x+5y-7z=-9 \\ 3x-2y+z=2 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ x-y-3z=-10 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} x+y+z=12 \\ 2x-y+z=7 \\ x+2y-z=6 \end{bmatrix}$$

$$4\begin{bmatrix} x-y+z=2 \\ x+y+z=4 \\ 2x+2y-z=-4 \end{bmatrix}$$

$$5\begin{bmatrix} 2x+y-3z=-1 \\ x-3y-2z=-12 \\ 3x-2y-z=-5 \end{bmatrix}$$

$$6\begin{bmatrix} 2x+3y+z=1 \\ 6x-2y-z=-14 \\ 3x+y-z=1 \end{bmatrix}$$

$$7\begin{bmatrix} 5x-2y+z=24 \\ 2x+5y-2z=-14 \\ x-4y+3z=26 \end{bmatrix}$$

$$8\begin{bmatrix} 4x+2y+3z=8 \\ 3x+4y+2z=-1 \\ 2x-y+5z=3 \end{bmatrix}$$

$$9\begin{bmatrix} 6x+3y+2z=12 \\ 9x-y+4z=37 \\ 10x+5y+3z=21 \end{bmatrix}$$

$$10\begin{bmatrix} 2x+4y+3z=3 \\ 10x-8y-9z=0 \\ 4x+4y-3z=2 \end{bmatrix}$$

3.3.- SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES POR EL MÉTODO DE GAUSS –JORDAN

La eliminación de Gauss-Jordan, denominada de este modo en honor a Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan, tiene que ver con movimientos matemáticos relacionados con el álgebra lineal con el fin de determinar el valor de las incógnitas dentro de un sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss Jordan de forma parecida a como se resuelven los sistemas de ecuaciones utilizando el método de Gauss simple. Se trabaja de la misma forma en que se trabaja en el método de Gauss, con la variación de que la diagonal principal vale uno y todos los demás elementos por arriba y por debajo de la diagonal principal valen cero. La matriz obtenida, al trabajar con tal método, se denomina *forma escalonada*.

Algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan

1. Ir a la columna no cero que se encuentra en el extremo izquierdo.
2. Si el primer valor de la incógnita en la ecuación uno es cero hay que intercambiar con la ecuación dos, de modo que el primer valor siempre sea diferente de cero.
3. Después, conseguir ceros en todos los elementos debajo del dato que quedo arriba, realizando las operaciones algebraicas necesarias para conseguirlo. .
4. Repetir el proceso 3 con la matriz restante. Y repetir con todos los renglones sobrantes (aquí la matriz está escalonada).

Una variante de la eliminación de Gauss simple, es la -*eliminación Gauss-Jordan*, que consiste en ir obteniendo los valores de uno delanteros durante los pasos uno al cuatro (forma directa), de este modo, la terminar éstos, se obtiene la matriz en modalidad escalonada reducida.

Ejemplo:

Suponga que se requiere encontrar los valores de las incógnitas *x*, *y*, *z*, los cuales satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x & +y & -z & = & 8 \\ -3x & -y & +2z & = & -11 \\ -2x & +y & +2z & = & -3 \end{cases}$$

“El objetivo es reducir el sistema a uno equivalente, que tenga el valor de las soluciones. Las operaciones elementales son estas”:[108]

- “Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo”.[109]
- “Intercambiar de posición dos ecuaciones”.[110]
- “Sumar a una ecuación un múltiplo de otra”.[111]

“Estas operaciones se representan con matrices elementales que se utilizan en otros procedimientos como la factorización LU o la diagonalización de una matriz simétrica”.[112]

“En el ejemplo, se elimina *X* de la ecuación dos sumando 2/3 veces la ecuación uno a la dos y después sumamos la ecuación uno a la tres . El resultado es”:[113]

$$\begin{cases} 2x & +y & -z & = & 8 \\ & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & 1 \\ & 2y & +z & = & 5 \end{cases}$$

“Una vez que se elimina X, eliminamos *Y* de la ecuación uno sumando -2 veces la ecuación dos a la ecuación uno, y sumamos -4 veces la ecuación dos a la ecuación tres para eliminar *Y*”.[114]

[108] http://uinformatica.blogspot.es/
[109] *Ibidem.*
[110] *Ibidem.*
[111] *Ibidem.*
[112] *Ibidem.*
[113] *Ibidem.*
[114] Grossman Stanley I. Álgebra Lineal, p, 7 – 17. Y en http://uinformatica.blogspot.es/

$$\begin{cases} 2x & & -2z & = & 6 \\ & -\frac{1}{2}y & +\frac{1}{2}z & = & 1 \\ & & -z & = & 1 \end{cases}$$

"Por último eliminamos *z* de la ecuación uno sumando -2 veces la t ecuación tres a la ecuación uno, y sumando 1/2 veces la ecuación tres a la ecuación dos para eliminar *z*".[115]

$$\begin{cases} 2x & & & = & 4 \\ & \frac{1}{2}y & & = & \frac{3}{2} \\ & & -z & = & 1 \end{cases}$$

"Despejando, podemos ver las soluciones":[116]

$$\begin{cases} x & & & = & 2 \\ & y & & = & 3 \\ & & z & = & -1 \end{cases}$$

"Para depurar los pasos, trabajamos con la matriz aumentada. Se pueden ver los 3 pasos en su arreglo matricial":[117]

Primero:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Después,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

[115] *Ibidem.*
[116] *Ibidem.*
[117] *Ibidem.*

Por último.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

“Dos formas especiales de matrices son la matriz escalonada y la matriz escalonada reducida. Una matriz escalonada debe tener las siguientes propiedades”:[118]

1. “Todas los renglones cero están en la parte inferior de la matriz”.[119]
2. “El elemento delantero de cada renglón diferente de cero, es llamado "pivote"; están a la derecha del elemento delantero del renglón fila anterior (esto supone que todos los elementos por debajo de un elemento pivote son cero)”.[120]

“Si una matriz cumple con esta propiedad, se dice matriz escalonada. Además, cumpliendo estas condiciones, decimos que la matriz se encuentra en la forma reducida de renglón escalón o tan solo en forma escalonada reducida”.[121]

1. “Todos los elementos delanteros ("pivotes") son iguales a 1”.[122]
2. Todos los elementos por encima de los pivotes son nulos.

“Cuando una matriz representa situaciones como tener una columna de ceros parece imposible ya que correspondería a una variable que nunca habría aparecido. Sin embargo esta situación puede presentarse (imaginemos la

[118] *Ibidem.*
[119] *Ibidem.*
[120] *Ibidem.*
[121] *Ibidem.*
[122] *Ibidem.*

ecuación de un plano en el espacio en la que no aparece alguna de las componentes, por ejemplo y + z =0). Así la matriz”.[123]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

“También es una matriz escalonada”.[124]

.ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Resolver los siguientes ejercicios utilizando el método de Gauss – Jordan.

[123] *Ibidem.*
[124] *Ibidem.*

$$1\begin{bmatrix} 3x+y-z=1 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+2z=-17 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} 7x+3y-4z=-35 \\ 3x-2y+5z=38 \\ x+y-6z=-27 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 4x-y+5z=-6 \\ 3x+3y-4z=30 \\ 6x+2y-3z=33 \end{bmatrix}$$

$$4\begin{bmatrix} 9x+4y-10z=6 \\ 6x-8y+5z=-1 \\ 12x+12y-15z=10 \end{bmatrix}$$

$$5\begin{bmatrix} 5x+3y-z=-11 \\ 10x-y+z=10 \\ 15x+2y-z=-7 \end{bmatrix}$$

$$6\begin{bmatrix} x+y+z=11 \\ x-y+3z=13 \\ 2x+2y-z=7 \end{bmatrix}$$

$$7\begin{bmatrix} x+y+z=-6 \\ 2x+y-z=-1 \\ x-2y+3z=-6 \end{bmatrix}$$

$$8\begin{bmatrix} 2x+3y+4z=3 \\ 2x+6y+8z=5 \\ 4x+9y-4z=4 \end{bmatrix}$$

$$9\begin{bmatrix} 6x+3y+2z=12 \\ 9x-y+4z=37 \\ 10x+5y+3z=21 \end{bmatrix}$$

$$10\begin{bmatrix} 2x+4y+3z=3 \\ 10x-8y-9z=0 \\ 4x+4y-3z=2 \end{bmatrix}$$

3.4.- SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES POR EL MÉTODO DE LA INVERSA

"Es posible utilizar la eliminación gaussiana para encontrar matriz inversas de matrices $n \times n$. Para ello se aumenta la matriz dada, con una matriz identidad escribiendo los renglones de la identidad a continuación de las de nuestra matriz A, por ejemplo dada":[125]

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se resolvería

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"Y ahora se realizan las operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada que sean necesarias para obtener la forma escalonada reducida de la matriz A; sumando tanto a la segunda como a la tercera fila la primera obtenemos".[126]

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"Multiplicamos la segunda fila por -1 y la intercambiamos con la primera"[127]

---

[125] http://uinformatica.blogspot.es/

[126] *Ibidem*.

[127] *Ibidem*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

"Ya tenemos el pivote de la primera fila que usamos para hacer ceros debajo"[128]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora usamos el pivote de la segunda fila

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

"Y por último cambiamos de signo la tercera fila y usamos el pivote correspondiente"[129]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

"El proceso ha finalizado porque en la parte izquierda tenemos la forma escalonada reducida de *A* y puesto que ésta es la matriz identidad, entonces *A* tiene inversa y su inversa es la matriz que aparece a la derecha, en el lugar que

[128] *Ibidem*.
[129] *Ibidem*.

al principio ocupaba la identidad. Cuando la forma escalonada reducida que aparece no es la identidad es que la matriz de partida no tiene inversa”.[130]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Resolver ejercicios y problemas ejemplificando el método de matriz inversa.

[130] *Ibidem*.

$$1\begin{bmatrix} x+4y-z=6 \\ 2x+5y-7z=-9 \\ 3x-2y+z=2 \end{bmatrix}$$

$$2\begin{bmatrix} x+y+z=6 \\ x-y+2z=5 \\ x-y-3z=-10 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} x+y+z=12 \\ 2x-y+z=7 \\ x+2y-z=6 \end{bmatrix}$$

$$4\begin{bmatrix} x-y+z=2 \\ x+y+z=4 \\ 2x+2y-z=-4 \end{bmatrix}$$

$$5\begin{bmatrix} 2x+y-3z=-1 \\ x-3y-2z=-12 \\ 3x-2y-z=-5 \end{bmatrix}$$

$$6\begin{bmatrix} 2x+3y+z=1 \\ 6x-2y-z=-14 \\ 3x+y-z=1 \end{bmatrix}$$

$$7\begin{bmatrix} 5x-2y+z=24 \\ 2x+5y-2z=-14 \\ x-4y+3z=26 \end{bmatrix}$$

$$8\begin{bmatrix} 4x+2y+3z=8 \\ 3x+4y+2z=-1 \\ 2x-y+5z=3 \end{bmatrix}$$

$$9\begin{bmatrix} 6x+3y+2z=12 \\ 9x-y+4z=37 \\ 10x+5y+3z=21 \end{bmatrix}$$

$$10\begin{bmatrix} 2x+4y+3z=3 \\ 10x-8y-9z=0 \\ 4x+4y-3z=2 \end{bmatrix}$$

3.5.- Solución de ecuaciones lineales por el método de Cramer

La regla de Cramer es una demostración en Álgebra Lineal, que da el resultado de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704 - 1752), quien publicó la regla de Cramer en su libro *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* de 1750, aunque el matemático Colín Maclaurin también publicó el método de Cramer en su libro *Treatise of Geometry* de 1748 (y probablemente conocía del método desde 1729).

La regla de Cramer es de gran importancia teórica porque da un término explícito para la solución de un sistema de ecuaciones.

Si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales. el valor de **A** es la matriz de coeficientes del sistema, los valores de $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ es el vector columna de las incógnitas y el valor de $\mathbf{b}$ es el vector columna de los términos independientes. Entonces la solución al sistema se representa mediante la fórmula:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(\mathbf{A})}$$

Donde el valor A_j representa la matriz resultante de cambiar la j-ésima columna de A por el vector columna **b**. nótese que para que el sistema sea compatible determinado, el determinante de la matriz A no ha de ser nulo.

Para la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de la forma. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Se representa en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Entonces, *X* e *Y* pueden ser halladas con la regla de Cramer, con una división de determinantes, de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

Y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

La regla para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es similar, con una división de determinantes:

$$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$$

Que representadas en forma de matriz es:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

X, *y*, *z* pueden ser encontradas como sigue:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, \text{ y } z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}.$$

Sean:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & a_{n-1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Usando las propiedades de la multiplicación matricial

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow I\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Entonces:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{(\mathrm{Adj}\, A)^t}{|A|}\vec{b}$$

Sean:

$$A^{-1}\vec{b} = p_{jk}$$

$$(\mathrm{Adj}A)^t = \frac{A'_{pl}}{A'_{pl}} = A_{lp}$$

Por lo tanto:

$$A^{-1}\vec{b} = p_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A'_{ji}}{|A|} b_{ik} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_{ij} b_i}{|A|} =_{(1)} \frac{|A_j|}{|A|}$$

Aparte, recordándose la definición de determinante, el valor de la sumatoria definida acumula el producto del elemento adjunto o cofactor del lugar ij, con el elemento i-ésimo del vector B (que es precisamente el elemento i-èsimo de la columna j, en la matriz $A_{j.}$[131]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Demostrar la regla de Cramer en sistemas de ecuaciones con tres incógnitas.

[131] Baldor Aurelio, Álgebra, p. 346 – 347.

AUTOEVALUACIÓN

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss, Gauss – Jordan, Matriz inversa y por el método de la regla de Cramer.

$$1)\begin{Bmatrix} 2x+y-3z=-1 \\ x-3y-2z=-12 \\ 3x-2y-z=-5 \end{Bmatrix}$$

$$2)\begin{Bmatrix} 2x+4y+3z=3 \\ 10x-8y-9z=0 \\ 4x+4y-3z=2 \end{Bmatrix}$$

$$3)\begin{Bmatrix} 4x-y+5z=-6 \\ 3x+3y-4z=30 \\ 6x+2y-3z=33 \end{Bmatrix}$$

RESPUESTAS AUTOEVALUACIÓN

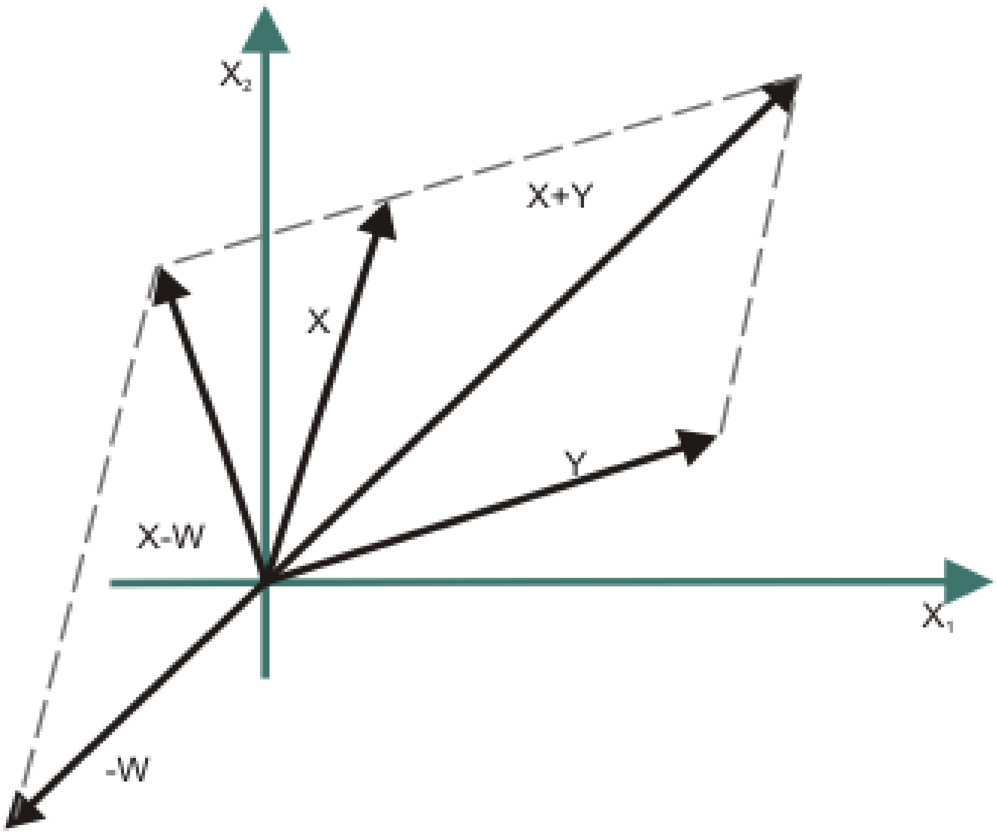
$$1)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$3)\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

UNIDAD 4

ESPACIOS VECTORIALES



132

OBJETIVO

El estudiante interpretará el espacio vectorial

[132] http://estudiarfisica.files.wordpress.com/2009/05/vectores.png?w=328&h=284

TEMARIO

4.1 Definición de espacios vectoriales y sus propiedades.

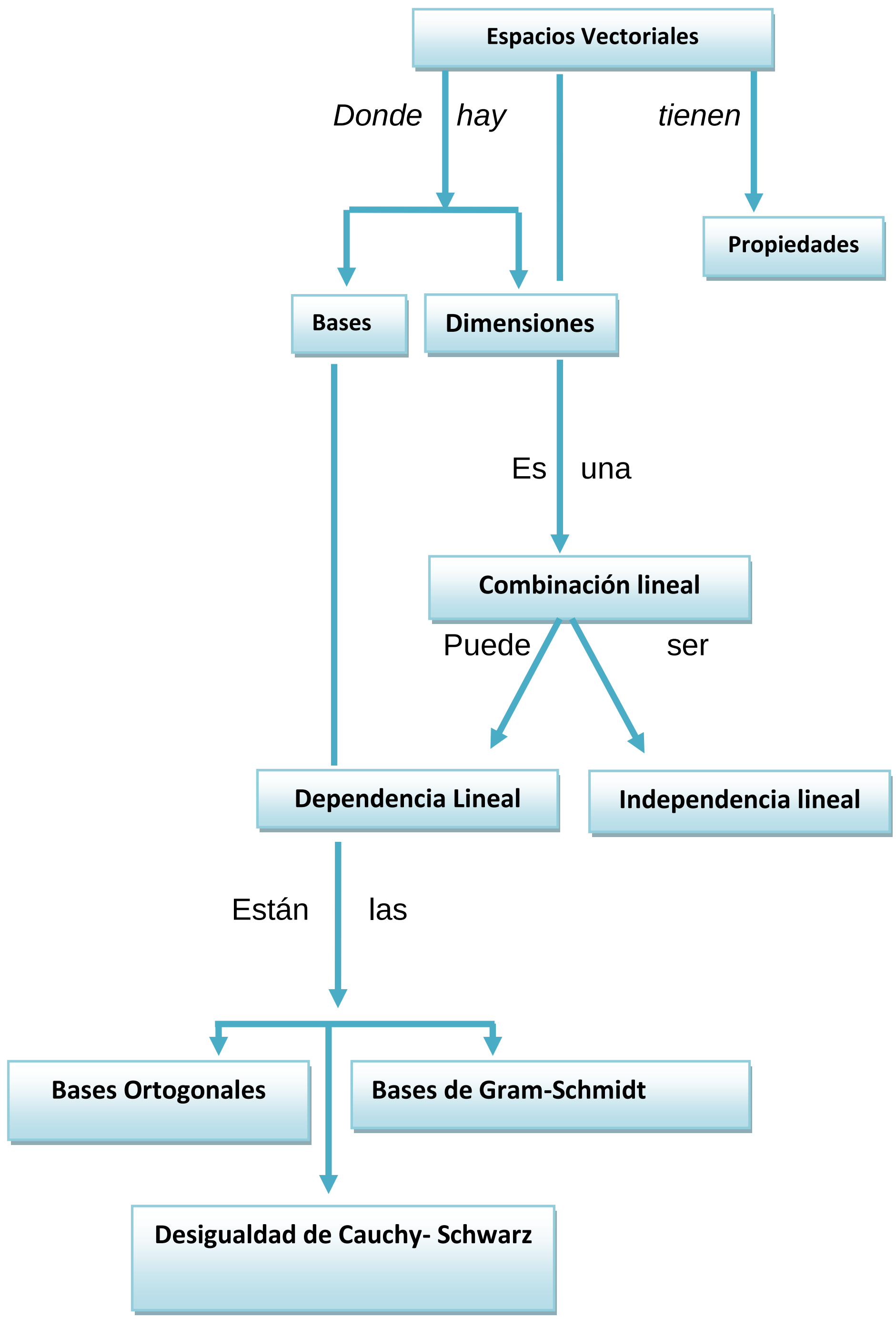
4.2 Combinación lineal, dependencia e independencia lineal.

4.3 Bases y dimensiones

4.4 Cambio de base, bases ortogonales de Gram - Schmidt.

4.5 Desigualdad de Cauchy - Schwarz.

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se trabajará con los espacios vectoriales, así como con las diferentes operaciones que se pueden realizar con ellos, y con las modificaciones pertinentes que se pueden realizar.

4.1.- DEFINICIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES Y SUS PROPIEDADES

El espacio vectorial (denominado, también, espacio lineal) es estudiado por el álgebra lineal. Los vectores son los datos o elementos que se hallan en los espacios vectoriales.

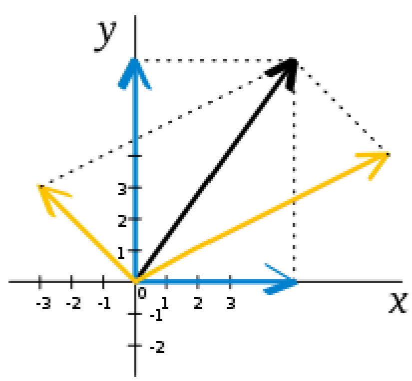
Los vectores permiten las operaciones de escalarse (multiplicar un vector por un escalar) y de sumarse. Ambas acciones son regidas por teoremas que generalizan las propiedades básicas de las tuplas (secuencia con mucho orden de objetos, o una lista de limitados objetos) de números reales así como la ubicación de los vectores en el espacio euclídeo. Un concepto importante es el de dimensión.

Con la geometría analítica del siglo XVII, se llega a los primeros indicios o ideas de los espacios vectoriales modernos.ç

Ahora bien, por conducto del científico y filósofo italiano Giuseppe Peano (finales del siglo XIX), se llega a la primera formulación moderna y axiomática. Luego, los avances en la teoría de espacios vectoriales se derivan del análisis funcional; los espacios de funciones.

Cabe señalar que los espacios vectoriales son aplicados en las matemáticas y en ciencias o especialidades como las diversas ingenierías; proporcionan soluciones de ecuaciones en derivadas parciales.

También ofrecen una forma abstracta libre de coordenadas, al relacionarse con figuras geométricas o físicas.



El vector obscuro $(x, y) = (5, 7)$ puede expresarse como combinación lineal de dos pares de diferentes de vectores [(5· (1, 0) y 7· (0, 1)] – azul; 3· [(−1, 1) y 4· (2, 1)] – amarillo).

El plano vectorial $\mathbf{R}^2$, consistente en los pares (x, y) de números reales, es el claro ejemplo de un espacio vectorial: cualesquiera dos pares de números reales pueden sumarse,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

Y cualquier par (x, y) puede multiplicarse por un número real s, para obtener un nuevo vector (sx, sy).

Se puede apreciar un vector, de valor (0,0), al que se le da el nombre de vector nulo que al sumarse con cualquier otro vector no lo altera. Todo vector, por ejemplo el (1, 0), tiene su vector opuesto, el (-1, 0), que al momento des sumarse dan como resultado el vector nulo (0, 0).

El espacio vectorial requiere de un cuerpo de elementos escalares **K** (como un cuerpo de números reales o uno de números complejos). Ahora bien, un conjunto vector **V** (no vacío), cuyos elementos llevan el nombre de *vectores* y acompañado de dos operaciones, es lo que se considera un *espacio vectorial.*

Suma de vectores: dos vectores **v** y **w** se pueden sumar para obtener un tercer vector **v** + **w.**

Producto de un escalar: un vector **v** puede multiplicarse por un valor escalar, a. El producto se denota como a**v.**

Que satisfacen las propiedades o axiomas (**u**, **v**, **w** son vectores arbitrarios de *V*, y *a*, *b* son escalares, respectivamente):

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Realizar un resumen del tema con lo explicado en clases y retroalimentando con conceptos complementarios

4.2.- COMBINACIÓN LINEAL, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

En la ciencia matemática llamada álgebra lineal, un conjunto de vectores se dice que es linealmente independiente si ninguno de ellos puede ser escrito como una combinación lineal de los vectores restantes. Por ejemplo, los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1) se puede afirmar que son linealmente independientes, mientras que los vectores (2, −1, 1), (1, 0, 1) y (3, −1, 2) no lo son, ya que el tercer vector es la suma de los dos primeros.

Sean $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de vectores. Podemos decir que son *linealmente dependientes* si existen números '$a_1, a_2, \ldots, a_n$, ninguno igual a cero, tal que satisfagan la siguiente ecuación:

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Véase el símbolo a la derecha del signo de igual no es precisamente cero, sino que simboliza el valor de un vector nulo. El conjunto de vectores nulos forma la matriz nula.

Si los números no existen, entonces los vectores se dicen que son *linealmente independientes*.

Utilizando nociones de espacios vectoriales podemos determinar la independencia lineal así:

Un conjunto de vectores U de un espacio vectorial es linealmente independiente si

$$\forall\, u \in U, u \notin \langle U - u \rangle$$

Entre las características de los vectores linealmente dependientes e independientes podemos encontrar:

1. Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y solamente si alguno de los vectores es combinación lineal de los demás.
2. Si un conjunto de vectores es linealmente independiente cualquier subconjunto suyo también lo es.

Geométricamente, dos vectores son independientes si no tienen la misma dirección. Esta definición presume que el vector nulo tiene todas las orientaciones.

Tres vectores son independientes si no están contenidos en el mismo espacio vectorial, si ninguno de ellos es una combinación lineal de los otros dos .

El espacio vectorial generado por un sistema de vectores es el conjunto de todas las combinaciones lineales de estos vectores. . El espacio creado por dos vectores independientes es el plano vectorial que los contiene. Resulta fácil demostrar que el espacio generado por un sistema de vectores es el minimo (por la inclusión) espacio vectorial que los contiene a todos

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Realización de Mapas conceptuales para checar las características de los elementos del tema.

4.3.- BASES Y DIMENSIONES

Las bases dan a conocer la estructura de los espacios vectoriales de un modo conciso. “Una base la podemos definir como el menor conjunto (finito o infinito) $B = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$ de vectores que crean todo el espacio. Esto nos da el significado de que cualquier vector **v** puede expresarse como una suma (llamada *combinación lineal*) de datos de la base”[133]

$$a_1\mathbf{v}_{i1} + a_2\mathbf{v}_{i2} +\ldots + a_n\mathbf{v}_{in},$$

Donde los elementos a_k son datos escalares y elementos $\mathbf{v}_{ik}$ (k = 1,..., n) son datos vectores de la base B. l.

“La dimensión de un espacio vectorial de coordenadas F^n es n, pues cualquier vector (x_1, x_2,..., x_n) puede decirse de forma única como combinación lineal de n vectores (a los que se les da el nombre de vectores coordenadas) $\mathbf{e}_1$ = (1, 0,..., 0), $\mathbf{e}_2$ = (0, 1, 0,..., 0), a $\mathbf{e}_n$ = (0, 0,..., 0, 1), es decir, la suma”[134]

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 +\ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

La dimensión de los espacios vectoriales de funciones, es infinita. Bajo adecuadas asunciones de regularidad de los factores involucrados, la dimensión del espacio vectorial de resultados de una ecuación diferencial común homogénea es igual al grado de la ecuación.

El término dimensión de un espacio vectorial se puede definir como el número de datos o cardinal de una base en dicho espacio

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Realizar un resumen sobre lo aprendido del tema explicado en clases.

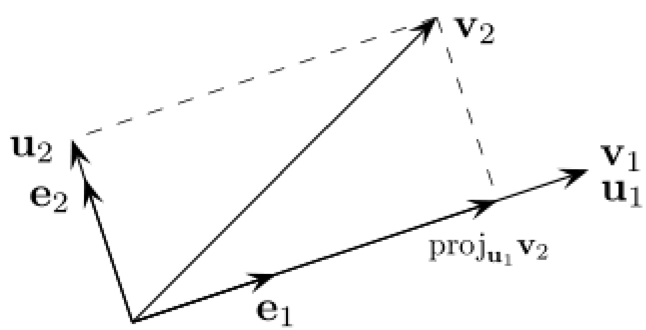
[133] http://matematicasit.blogspot.com/2009/10/44-base-y-dimension-de-un-espacio.html

[134] http://matematicasit.blogspot.com/2009/10/44-base-y-dimension-de-un-espacio.html

4.4.- CAMBIO DE BASE, BASES ORTOGONALES DE GRAM-SCHMIDT

En álgebra lineal, el método de ortogonalización de Gram–Schmidt es un proceso para diseñar, a partir de un conjunto de vectores de un espacio prehilbertiano (espacio vectorial que está provisto de un producto escalar) (usualmente, el espacio euclídeo R^n), otro conjunto ortonormal de vectores que cree el mismo subespacio vectorial.

Este proceso recibe su nombre en honor de los matemáticos Jørgen Pedersen Gram y Erhard Schmidt.



Los dos primeros procedimientos del método de Gram–Schmidt

Se especifica, en primer lugar, el operador proyección mediante la siguiente operación algebraica:

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle}{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}\mathbf{u} = \frac{||\mathbf{v}||||\mathbf{u}||\cos\alpha}{||\mathbf{u}||||\mathbf{u}||1}\mathbf{u} = ||\mathbf{v}||\cos\alpha\frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||},$$

Donde los corchetes (elementos de agrupación) angulares representan el producto interior. Es visible que

$$\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}\,\mathbf{v}$$

Es un vector ortogonal a$\mathbf{u}$. Por lo tanto, dados los vectores$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, el proceso de Gram–Schmidt define los vectores ortonormales $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1, & \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||} \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\,\mathbf{v}_2, & \mathbf{e}_2 &= \frac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||} \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\,\mathbf{v}_3 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}\,\mathbf{v}_3, & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{u}_3}{||\mathbf{u}_3||} \\
&\vdots & &\vdots \\
\mathbf{u}_k &= \mathbf{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_j}\,\mathbf{v}_k, & \mathbf{e}_k &= \frac{\mathbf{u}_k}{||\mathbf{u}_k||}
\end{aligned}$$

A partir de las características de proyección y del producto escalar, es sencillo demostrar que la sucesión de vectores $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$es ortogonal.

Ejemplo

Considera el siguiente conjunto de vectores en **R**^{2} (con el convencional producto interno)

$$S = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ahora, aplicamos el método de Gram–Schmidt, para conseguir un conjunto de vectores ortogonales:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}\,\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} - \mathrm{proj}_{\binom{3}{1}}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/5\\6/5\end{pmatrix}.$$

Comprobamos que los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son ortogonales:

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2/5\\6/5\end{pmatrix}\right\rangle = -\frac{6}{5} + \frac{6}{5} = 0.$$

Entonces logramos normalizar los vectores dividiendo, y obtenemos:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{40}{25}}}\begin{pmatrix}-2/5\\6/5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Realizar un resumen de lo aprendido en clase.

4.5.- DESIGUALDAD DE CAUCHY - SCHWARZ.

En matemáticas, la desigualdad de Cauchy-Schwarz, desigualdad de Schwarz, desigualdad de Cauchy, o desigualdad de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz es una desigualdad muy útil hallada en diferentes áreas, como el álgebra lineal aplicada al álgebra de vectores, en exploración aplicada a sucesiones infinitas e integración de productos, y en la teoría de posibilidades, aplicadas a varianzas y covarianzas.

La desigualdad para sumas fue publicada por el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1821), mientras que la conveniente desigualdad para integrales fue creada por el matemático ruso Viktor Yakovlevich Bunyakovsky

(1859) y redescubierta por el matemático alemán Hermann Amandus Schwarz (1888) (mal escrito como "Schwartz").

La desigualdad de Cauchy-Schwarz marca que para todo par de vectores X e Y de un espacio de producto interno real o complejo,

$$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle \cdot \langle y,y\rangle.$$

Semejantemente, agarrando la raíz cuadrada en ambos lados de la fórmula, y relatándose a la norma de los vectores, la desigualdad se reescribe como

$$|\langle x,y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||.$$

Adicionalmente, los dos lados son idénticos sólo si X e Y son linealmente dependientes.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es utilizada para demostrar que el producto interno es una función continua con relación a la topología provocada por el producto interno propio.

AUTOEVALUACIÓN

Contesta correctamente las siguientes preguntas:

1. ¿Qué es un espacio vectorial?
2. ¿Qué es un vector linealmente dependiente?
3. ¿Qué son las bases?
4. ¿Qué son las dimensiones?

RESPUESTA AUTOEVALUACIÓN

1. Un espacio vectorial (o espacio lineal) es el objeto básico de estudio en la rama de la matemática llamada álgebra lineal. A los elementos de los espacios vectoriales se les llama vectores.
2. que son linealmente dependientes si existen números 'a_1, a_2,..., a_n, no todos iguales a cero, tal que:

   $$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$
3. Las bases revelan la estructura de los espacios vectoriales de una manera concisa. Una base es el menor conjunto (finito o infinito) $B = \{\mathbf{v}_i\}_{i \in I}$ de vectores que generan todo el espacio.
4. La dimensión de un espacio de coordenadas F^n es n, pues cualquier vector (x_1, x_2,..., x_n) puede expresarse de forma única como combinación lineal de n vectores (llamados vectores coordenadas)

GLOSARIO

A

Abstractas: de abstracto, que indica una cualidad con exclusión de sujeto. Que no se ocupa de cosas reales. Numero abstracto es aquel cuya unidad no se expresa. Lo abstracto es lo difícil de determinar.

Adjunto: que va unido con otra cosa. Dícese de la persona que acompaña a otra en un negocio o trabajo.

Afijo: partícula que se pone al principio o al fin de las palabras para modificar su significado.

Algoritmo: procedimiento de cálculo. Ciencia del cálculo aritmético o algebraico. Método y notación en las distintas formas de cálculo.

Análogamente: de analogía. Similitud.

Aritmética: ciencia que estudia las propiedades elementales de los números racionales.

Artificio: habilidad con la que esta hecha alguna cosa.

Axiomas: principio o sentencia tan claro que no necesita explicación.

B

Binomio: expresión algebraica formada por dos términos.

Binómica: de binomio.

C

Calculo: operación que se hace para conocer el resultado de la combinación de varios números. Arte de resolver los problemas de aritmética.

Columna: pilar cilíndrico con base que sostiene un edificio.

Combinación: arreglo y distribución ordenada de varias cosas análogas.

Combinatorio: parte de las matemáticas que estudia las propiedades de los elementos en cuanto a su posición y grupos que pueden formarse entre ellos.

Conjugado: dícese de las líneas o cantidades enlazadas por alguna ley o relación determinada.

Conmutativo: que se relaciona con el cambio.

Continuidad: unión natural que tienen la parte del todo.

Conversión: acción y efecto de convertir.

Convertir: mudar o cambiar una cosa en otra.

Cuántica: relativo a los quanta o unidades de energía.

D

Denominador: que denomina. Parte de una fracción que indica en cuantas partes se divide un todo.

Descomposición: acción y efecto de descomponer. Desordenar. Separar los diversos elementos de un todo.

Desigualdad: calidad de desigual, falta de igualdad.

Dimensión: tamaño. Cada una de las tres direcciones en que se mide la extensión de un cuerpo.

E

Ecuación: igualdad que contiene una o más incógnitas.

Escalar: entrar en un sitio por medio de escalas

Exponente: número que indica la potencia a que se ha de elevar una cantidad.

Extendible: que se puede extender.

F

Fila: línea o hilera de personas o cosas

Finita: que tiene fin o término.

Fórmula: modelo que contiene los términos en que debe redactarse un documento. Resultado de un cálculo algebraico, del que pueden hacerse aplicaciones a varios casos análogos.

Función: cantidad cuyo valor depende del de otra variable.

G

Geometría: ciencia que tiene por objeto el estudio de la extensión considerada bajo sus tres dimensiones: línea, superficie y volumen.

Grafica: se dice de aquello que se relaciona con el arte de representar los objetos por medio de líneas o figuras.

I

Imaginario: que solo existe en la imaginación. Cantidad imaginaria, radical de segundo grado aplicado a una cantidad negativa.

Incógnita: cantidad desconocida que es preciso determinar en una ecuación.

L

Lineal: relativo a las líneas. Dícese de la función cuya incógnita o variable puede ser representada gráficamente por una línea recta.

P

Pivote: elemento que gira sobre un soporte

Potencia: virtud para hacer una cosa, para producir un efecto, etc.

Proximidad: calidad de próximo, cercanía.

R

Recíproco: que tiene lugar entre dos personas o cosas que obran una sobre otra.

Regla: instrumento recto, plano y largo, que sirve para trazar líneas. Principio, base.

S

Simétrico: que tiene simetría; proporción adecuada de las partes de un todo entre si y con el todo mismo.

Sistema: conjunto de principios verdaderos o falsos reunidos entre si, de modo que formen un cuerpo de doctrina.

T

Teorema: proposición que exige demostración. Conclusión de un estudio matemático.

Topología: ciencia que estudia los razonamientos matemáticos sin consideración a ningún significado concreto.

Topológico: relativo a la topología

Transformación: acción y efecto de transformar o transformarse, es un cambio o modificación, cambiar de forma.

Transversal: que cruza de un lado a otro, es longitudinal.

V

Variable: que puede variar. Cantidad susceptible de tomar valores numéricos diferentes, comprendidos o no dentro de un cierto límite.

BIBLIOGRAFÌA

1. GROSSMAN STANLEY I. *ÁLGEBRA LINEAL*. MC GRAWHIL, 2007.

2. ANFOSSI AGUSTÍN. *ÀLGEBRA*.PROGRESO, 1988.

3. BALDOR AURELIO. *ÁLGEBRA*. PUBLICACIONES CULTURAL. 2006.

4. ANTON HOWARD. *INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL* LIMUSA NORIEGA EDITORES, 1999.

5. LIPSCHUTZ SEYMOUR, *ÁLGEBRA LINEAL*. MC GRAWHIL, 1992.

6. SOLAR GONZÁLEZ EDUARDO. *ÁLGEBRA 1*. LIMUSA NORIEGA EDITORES, 2006.

7. REES PAULK. *ÁLGEBRA*. MC GRAWHIL, 1991.

8. BARNETT RAYMOND A. *ÁLGEBRA*. MC GRAWHIL, 2000.

9. SILVA JUAN MANUEL. *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS* LIMUSA NORIEGA EDITORES, 2002.

10. CHAPRA STEVEN C. *MÉTODOS NUMÉRICOS PARA INGENIEROS* MC GRAWHIL, 2003.

1. http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/determinantes_api/inversa_de_una_matriz_con_determinantes.htm
2. http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/cursoJava/numerico/complejo/complejo.htm