

# Investigación **de** operaciones

**JOAQUIN AQUINO CORDOVA**

**Red Tercer Milenio**

# INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

# INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

JOAQUIN AQUINO CORDOVA

RED TERCER MILENIO



## AVISO LEGAL

---

**Derechos Reservados © 2012, por RED TERCER MILENIO S.C.**

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Prohibida la reproducción parcial o total por cualquier medio, sin la autorización por escrito del titular de los derechos.

Datos para catalogación bibliográfica

Joaquín Aquino Córdova

*Investigación de operaciones*

ISBN 978-607-733-139-1

**Primera edición: 2012**

## DIRECTORIO

---

**Bárbara Jean Mair Rowberry**  
*Directora General*

**Rafael Campos Hernández**  
*Director Académico Corporativo*

**Jesús Andrés Carranza Castellanos**  
*Director Corporativo de Administración*

**Héctor Raúl Gutiérrez Zamora Ferreira**  
*Director Corporativo de Finanzas*

**Ximena Montes Edgar**  
*Directora Corporativo de Expansión y Proyectos*

## ÍNDICE

Introducción .....	5
Mapa conceptual.....	7
Unidad 1. Introducción a los métodos cuantitativos para la toma de decisiones .	8
Mapa conceptual.....	9
Introducción .....	10
1.1 PROCESO DE TOMA DE DECISIONES .....	11
1.2 MÉTODOS CUANTITATIVOS Y ADMINISTRACIÓN CIENTÍFICA .....	12
1.3 SISTEMAS EMPRESARIALES: CONCEPTO Y PROCESO .....	13
1.4 MÉTODOS CUANTITATIVOS: DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN.....	15
1.5 INVESTIGACIÓN OPERATIVA: DEFINICIÓN, CAMPO DE aplicación, MODELOS Y CLASIFICACIÓN.....	16
1.6 METODOLOGÍA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE SISTEMAS DECISORIOS .....	18
Autoevaluación .....	20
Unidad 2 Programación lineal.....	23
Mapa conceptual.....	24
Introducción .....	25
2.1 CARACTERÍSTICAS DE LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA.....	26
2.2 FORMULACIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL.....	26
2.3 ALGORITMOS DE SOLUCIÓN.....	28
2.4 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS .....	44
2.5 APLICACIONES A PLANEAMIENTO DE LA PRODUCCIÓN, MEZCLA, DISTRIBUCIÓN, ASIGNACIÓN Y PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES. ....	45
Autoevaluación .....	47
Unidad 3 Programación entera .....	51
Mapa conceptual.....	52
Introducción .....	53
3.1 VARIABLES ENTERAS .....	54
3.2 ALGORITMO BRANCH AND BOUND. ....	54
3.3 VARIABLES BINARIAS .....	59

3.4. APLICACIÓN DE VARIABLES ENTERAS .....	60
Autoevaluación .....	61
Unidad 4 Programación de metas.....	64
Mapa conceptual.....	65
Introducción .....	66
4.1 ECUACIONES DE RESTRICCIONES Y DE METAS .....	67
4.2 FUNCIÓN OBJETIVO CON PRIORIDADES DOMINANTES .....	68
4.3 FORMULACIÓN DE CASOS.....	69
Autoevaluación .....	71
Unidad 5. Programación no lineal .....	74
Mapa conceptual.....	75
Introducción .....	76
5.1 CARACTERÍSTICAS DE LOS PROBLEMAS NO LINEALES .....	77
5.2 FORMULACIÓN Y RESOLUCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS CON RESTRICCIONES U OBJETIVOS NO LINEALES. ....	77
5.3 MÉTODO DE RECURRENCIA .....	83
5.4 ALGORITMO DE POOLING .....	85
Autoevaluación .....	86
Unidad 6 Administración de proyectos.....	89
Mapa conceptual.....	90
Introducción .....	91
6.1 CONCEPTUALIZACIÓN .....	92
6.2 SISTEMAS DE ADMINISTRACIÓN PERT Y CPM .....	92
6.3 CONSTRUCCIÓN DE REDES FLECHA-ACTIVIDAD Y NODO-ACTIVIDAD .....	94
6.4 ACTIVIDADES FICTICIAS .....	95
6.5 DEFINICIÓN Y CÁLCULO DE FECHAS.....	96
6.6 CAMINO CRÍTICO. DEFINICIÓN Y CONCEPTO. MÁRGENES DE SUCESOS Y DE ACTIVIDADES. ....	99
6.7 ESTIMACIÓN DE TIEMPOS DE REALIZACIÓN.....	99
6.8 ANÁLISIS DE COSTOS.....	101
6.9 PROGRAMACIÓN FINANCIERA .....	107

6.10 PROYECTOS SUJETOS A RESTRICCIONES.....	108
Autoevaluación .....	110
Unidad 7 Gestión de inventarios .....	116
Mapa conceptual.....	117
Introducción .....	118
7.1 OBJETIVO. COMPORTAMIENTO CÍCLICO DE LOS INVENTARIOS .....	119
7.2 COSTOS INTERVINIENTES.....	119
7.3 CARACTERÍSTICAS Y OBJETO DE LOS PROBLEMAS DE STOCKS.....	122
7.4 FORMULACIÓN MATEMÁTICA Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON Y SIN NIVEL DE PROTECCIÓN.....	123
7.5 AGOTAMIENTO DE EXISTENCIAS.....	125
7.6 REPOSICIÓN INSTANTÁNEA Y NO INSTANTÁNEA .....	126
7.7 PRECIOS DE ADQUISICIÓN VARIABLES CON EL TAMAÑO DEL LOTE.....	127
7.8 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD. ERROR RELATIVO .....	128
7.9 RESTRICCIONES FÍSICAS, ADMINISTRATIVAS Y FINANCIERAS.....	129
7.10 PROBLEMAS PARA MÁS DE UN PRODUCTO .....	130
7.11 CURVAS DE ISOCOSTOS.....	131
7.12 ANÁLISIS TI-TO (TOTAL INMOVILIZADO-TOTAL DE ÓRDENES).....	133
7.13 MODELOS ESPECIALES DE DEMANDA ALEATORIA.....	134
7.14 CURVAS ABC .....	136
7.15 CRITERIOS DE REAPROVISIONAMIENTO DE STOCKS .....	137
7.16 CONCEPTOS DE MRP Y JUST IN TIME .....	138
Autoevaluación .....	141
Unidad 8 Teoría de filas.....	148
Mapa conceptual.....	149
Introducción .....	150
8.1 PROCESOS DE INGRESO Y ATENCIÓN DE CLIENTES EN SISTEMAS DE ATENCIÓN .....	152
8.2 TIPOS DE FILAS Y DISPOSICIONES DE CANALES.....	153
8.3 MODELOS CON FILAS DE UN CANAL Y DE VARIOS CANALES DISPUESTOS EN PARALELO. ....	154

8.4 MODELOS CON POBLACIÓN FINITA E INFINITA .....	159
8.5 EFECTO DE LA IMPACIENCIA .....	161
8.6 MODELOS CON CAPACIDAD LIMITADA E ILIMITADA DE FILA .....	162
8.7 CANALES EN SERIE.....	164
8.8 ANÁLISIS DE PROBLEMAS COMPLEJOS CON VELOCIDADES DE ATENCIÓN DISTINTAS .....	164
8.9 OPTIMIZACIÓN DE SISTEMAS DE FILAS .....	166
Autoevaluación .....	168
Unidad 9 Simulación de procesos.....	172
Mapa conceptual.....	173
Introducción .....	174
9.1. DEFINICIONES Y METODOLOGÍA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE MODELOS DE SIMULACIÓN.....	175
9.2. SIMULACIÓN DISCRETA Y CONTINUA .....	176
9.3. SIMULACIÓN DETERMINÍSTICA.....	177
9.4. SIMULACIÓN DE PROCESOS ALEATORIOS. PROCESOS MONTE CARLO .....	177
9.5. GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS .....	179
9.6. TRANSFORMACIÓN INVERSA.....	181
9.7. VENTAJAS Y DESVENTAJAS CON RESPECTO A LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS .....	181
Autoevaluación .....	183
<i>Bibliografía</i> .....	187
<i>Glosario</i> .....	188



## INTRODUCCIÓN

El propósito general de este libro es suministrar una fuente básica de aprendizaje para el estudio de los métodos cuantitativos que forman parte de la investigación de operaciones (IO), y que le permitirán tomar mejores decisiones en la práctica administrativa. Con este fin se han incorporado ejemplos resueltos en los diversos temas prácticos que se tratan. En lugar de demostraciones matemáticas se emplean explicaciones que despiertan la intuición.

Este texto está orientado para estudiantes de la carrera de contaduría pública y áreas afines de las ciencias económico administrativas, por lo que se procuró en su elaboración integrar la mayor parte de elementos que ayuden al futuro profesional de la contaduría a tomar las mejores decisiones en la empresa utilizando las técnicas cuantitativas de la IO.

El presente se integra con nueve unidades temáticas. Inicia con una introducción a los métodos cuantitativos, señalando en esta primera parte cómo es el proceso de la toma de decisiones, se definen los métodos cuantitativos y se explica la metodología para la implementación de sistemas decisorios en la empresa.

La unidad dos se refiere al método conocido como programación lineal. Aquí se describen sus características, se muestra cómo se aplica en la solución de problemas de mezcla de productos y se caracteriza el procedimiento matemático que se sigue en la solución de casos reales.

La unidad tres tiene que ver con la descripción del modelo de solución de problemas de programación entera. En la unidad cuatro se desarrolla el modelo para la programación de metas que incluye ecuaciones de restricción y la función objetivo con prioridades dominantes.

En la unidad cinco se considera la programación no lineal que se refiere a aquellos problemas de la vida real que no se comportan de manera lineal, es decir, las variables que intervienen no constituyen una línea recta y, por tanto,

se aplican en su solución modelos tales como el método de recurrencia y el algoritmo de pooling.

La administración de proyectos es otro de los temas interesantes que se abordan en este libro y es tratado en la unidad seis; el modelo matemático que aquí se explica permite el desarrollo de proyectos de cualquier tipo. Para llevar a cabo un proyecto en la empresa moderna se utilizan las técnicas de planeación PERT y CPM, que conjuntamente formaron la técnica conocida como *camino crítico*.

La unidad siete trata sobre la gestión de inventarios, un aspecto esencial en la administración, ya que una cantidad mayor o menor en los inventarios de la empresa puede dar lugar a elevados costos de mantenimiento o pérdidas, todo por una mala decisión en la determinación de los *stock* que deben mantenerse de acuerdo con las circunstancias particulares de la organización.

La unidad ocho expone la teoría de filas. Muchas de las compañías actuales requieren de un buen sistema de atención a sus clientes diseñando un modelo de filas apropiado con canales de atención apropiados. En esta unidad se describen los diversos casos que pueden presentarse, así como la optimización de los canales de atención.

Finalmente, en la unidad nueve se estudia la simulación de procesos; aquí se describen los métodos discretos y continuos, los métodos de Montecarlo, así como la generación de números aleatorios.

Por otra parte, el texto incluye actividades de aprendizaje por tema y por unidad, así como una autoevaluación para que el estudiante pueda medir su nivel de aprovechamiento al cabo de las unidades tratadas.

# MAPA CONCEPTUAL



## UNIDAD 1

### INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES

#### OBJETIVO

Conocer los modelos cuantitativos existentes y su uso como herramienta para la resolución de problemas de gestión y administración en sistemas donde se persigan resultados óptimos.

#### TEMARIO

- 1.1 PROCESO DE TOMA DE DECISIONES
- 1.2 MÉTODOS CUANTITATIVOS Y ADMINISTRACIÓN CIENTÍFICA
- 1.3 SISTEMAS EMPRESARIALES: CONCEPTO Y PROCESOS
- 1.4 MÉTODOS CUANTITATIVOS: DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN
- 1.5 INVESTIGACIÓN OPERATIVA: DEFINICIÓN, CAMPO DE APLICACIÓN, MODELOS Y CLASIFICACIÓN
- 1.6 METODOLOGÍA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE SISTEMAS DECISORIOS

## MAPA CONCEPTUAL



## INTRODUCCIÓN

Si se aspira a ser un profesional con éxito, uno de los talentos que deben desarrollarse es la toma de decisiones. Habrá que aprender a buscar el contexto de problemas y oportunidades, obtener la información necesaria, identificar las posibles alternativas, analizar todas ellas con cuidado, tomar una decisión personal y seguir adelante. En la medida en que esas decisiones estén bien tomadas, se podrán obtener mejores resultados cada vez; este proceso permite ir perfeccionando, de manera permanente, el método para la toma de decisiones hasta alcanzar el éxito.

El estudio de este tema se parece al de cómo caminar: es tan común que se da por hecho. Pero en los negocios es mucho lo que está en juego, ya que la decisión del gerente de la empresa afecta a mucha gente, la razón tiene que ver con la velocidad y la calidad de las decisiones tomadas. Al hacer esto, se limitará el estudio a la toma de decisiones racional o a cómo debería hacerse. Así, en este tema se hará hincapié en ser lógicos, racionales y objetivos al resolver problemas. Como se verá, éste es uno de los objetivos, aunque pocas veces se alcance por completo.

Como ayuda de este tema se usarán las matemáticas, ya que es el lenguaje del pensamiento racional. De la misma forma que la taquigrafía a la secretaria, las matemáticas permiten expresar pensamientos complejos de manera concisa. Son convincentes y tienen aplicación práctica.

En el desarrollo de esta unidad se explica el proceso de la toma de decisiones, se dan los conceptos que permiten el entendimiento de los modelos y métodos, a la vez que se describe de forma detallada la metodología para la implementación de sistemas decisorios.

### 1.1 PROCESO DE TOMA DE DECISIONES

La toma de decisiones nos permite elegir una opción entre dos o más para alcanzar un objetivo. Para las empresas es importante culminar un buen proceso de toma de decisiones para asegurar el éxito y sustento a largo plazo.

La toma de decisiones puede describirse como una sucesión de pasos: definición del problema, generación de alternativas, evaluación de alternativas, elección de una alternativa e implantación de la alternativa elegida.<sup>1</sup>

El proceso de toma de decisiones comienza cuando se delimita el problema de estudio; es decir, la empresa debe enfocarse en un problema y definirlo claramente con el propósito de que sea entendible por cada miembro de cada área de trabajo.

Después se procede a buscar soluciones en donde todos puedan dar su punto de vista y propongan soluciones, no sin antes plantearse las siguientes preguntas: ¿qué?, ¿cómo?, ¿cuándo?, ¿por qué?, ¿para quién?, y ¿dónde?, y partir de ahí para generar una lluvia de ideas que traten de abarcar cada punto necesario para alcanzar un objetivo óptimo.

Cuando hay muchas opciones, se debe evaluar cada una usando métodos cuantitativos. Por último, se debe elegir la solución que brinde más beneficios.

El proceso para la toma de decisiones es también similar al proceso científico: ambos ayudan a solucionar problemas. El método científico busca alcanzar conocimientos válidos, que pueden ser alternativas de solución para un determinado problema.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Describa diez situaciones en las que considere que interviene el proceso de toma de decisiones para una empresa de bienes o servicios.
2. De la actividad anterior, identifique los criterios de decisión que se toman en cuenta para cada situación en proceso de toma de decisiones.

---

<sup>1</sup> Robert J. Thierauf, *Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones*, p.230.

3. Investigue un problema real, elabore un árbol de decisiones e identifique la solución factible.

## 1.2 MÉTODOS CUANTITATIVOS Y ADMINISTRACIÓN CIENTÍFICA

El principal objetivo de la aplicación de métodos cuantitativos es la toma de decisiones, utilizando un esquema de trabajo interdisciplinario así como modelos matemáticos para la resolución de problemas. En la actualidad, las empresas se apoyan en las computadoras para obtener resultados cuantitativos con precisión y en menor tiempo.

Los métodos cuantitativos se emplean en problemas donde es necesario conocer la relación existente entre variables que pueden tomar muchos valores numéricos. Su utilización y la buena interpretación de los resultados ayudan en cada una de las áreas que conforman cualquier sistema para tomar las mejores decisiones, además de que pueden emplearse en cualquier etapa de la administración de empresas.

La administración científica puede definirse como la aplicación de una serie ordenada de pasos que buscan resolver problemas en el área administrativa, algo sumamente relevante para el éxito en una empresa. Los pasos ordenados pueden ser: planeación, organización, dirección y control.

En la planeación, se establecen los tiempos, las acciones y su secuencia, el análisis de las consecuencias; se determinan los planes y procedimientos necesarios para alcanzar los objetivos. La planeación requiere de datos históricos y actuales, que se manipulan usando métodos cuantitativos para reducir los niveles de incertidumbre.

La organización consiste en colocar las actividades de acuerdo con un plan y coordinar los recursos con los que cuenta la empresa para aprovecharlos al máximo. El empleo de los métodos cuantitativos en esta etapa aparece porque todas las empresas tienen recursos limitados y deben organizarlos y distribuirlos de modo tal, que se logre alcanzar la optimización.



La dirección abarca la ejecución y coordinación de todas las actividades planeadas, dar seguimiento a cada procedimiento y ver la forma de dotar de los recursos necesarios a cada área para que no se retrasen las actividades.

Para un buen control, se debe comparar lo planeado con los resultados obtenidos; dichos resultados pueden compararse utilizando métodos cuantitativos para el análisis y la interpretación. Cuando no se tiene el rendimiento esperado, se deben regular los recursos, tiempos, acciones o lo necesario para un correcto funcionamiento.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Describa tres problemas en donde se empleen los métodos cuantitativos.
2. Elabore un cuadro sinóptico del tema *métodos cuantitativos*
3. Elija una empresa y explique de qué forma se emplea la administración científica.

### 1.3 SISTEMAS EMPRESARIALES: CONCEPTO Y PROCESO

Los sistemas empresariales son herramientas utilizadas para ayudar a la organización para que se facilite la administración, automatizando y controlando los procesos. Existen numerosos sistemas empresariales que favorecen a la organización. Es muy importante manipular la información generada en la empresa y la rapidez de respuesta a los problemas que puedan surgir.

Para comenzar, se debe sensibilizar al personal para que dejen de trabajar con sistemas viejos y se integren con los nuevos. Después se debe elegir el sistema adecuado para cada situación o empresa.

Un sistema que da asistencia a los analistas es el de Ingeniería de Software Asistida por Computadora (CASE, Computer Aided Software Engineering), que orienta para la implementación de *software* en toda la etapa de vida del mismo. Sirve, además, para que las empresas cuenten con información en tiempo real.

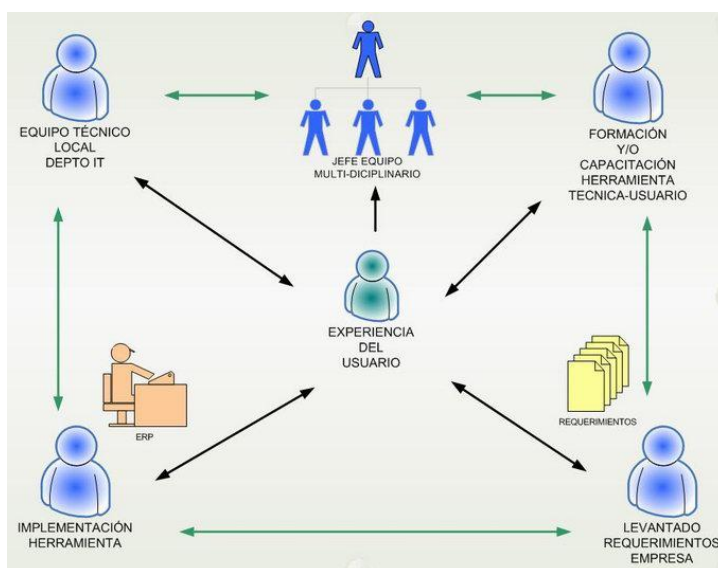


Figura 1 Sistema de gestión empresarial

Lo más importante del CASE es que tiene una relación directa con las experiencias del usuario, la existencia de un grupo multidisciplinario, capacitación constante y que de acuerdo con los requerimientos se implementa la herramienta.

Los sistemas de gestión empresarial (ERP, Enterprise Resource Planning) son sistemas que ayudan en las actividades de planeación de la organización tal como puede observarse en la figura 1. Es un *software* que engloba aspectos como ventas, adeudos, volúmenes de producción, entre otros. Con este *software* se logra la manipulación total de la información por todos los que forman parte de la organización, en tiempo real.

Los sistemas ERP se distinguen por ser Integrales, ya que engloban cada aspecto de la organización, cada área, cada proceso, para trabajarla en conjunto. Asimismo, se caracterizan por ser modulares, donde cada módulo o área está relacionado con los demás, existe un flujo continuo de información. También, este tipo de sistemas es adaptable a cada organización, sin importar el giro o naturaleza, incorporando herramientas que permiten programar de manera más rápida.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Elabore un mapa mental del tema *sistemas empresariales*
2. Indique las ventajas y desventajas de usar sistemas empresariales
3. Investigue otros dos sistemas empresariales

### 1.4 MÉTODOS CUANTITATIVOS: DEFINICIÓN Y CLASIFICACIÓN

El planteamiento de los problemas organizacionales, por lo general, comienza con los métodos cualitativos; es decir, revisa todas las cualidades o características, hasta un punto en donde después se pueden usar los métodos cuantitativos, que llevan a obtener modelos que permiten tomar decisiones con mayor grado de confiabilidad.

Cuando construimos un modelo matemático e insertamos símbolos para representar constantes y variables (en gran parte números), llamamos a esto un modelo cuantitativo.<sup>2</sup>

Los métodos cuantitativos son procedimientos lógicos, que permiten explicar fenómenos a través de la manipulación de datos numéricos. Los datos numéricos deben ser reales y recabados de la manera más completa posible; para ello se debe tener cuidado al seleccionar la mejor técnica de recolección de datos.

Estos datos se analizan buscando las relaciones entre las diferentes variables que actúan. Los métodos cuantitativos empleados en la investigación de operaciones, se pueden clasificar en:

1. Métodos para el equilibrio entre variables
2. Métodos para el problema de espera
3. Métodos para problemas secuenciales

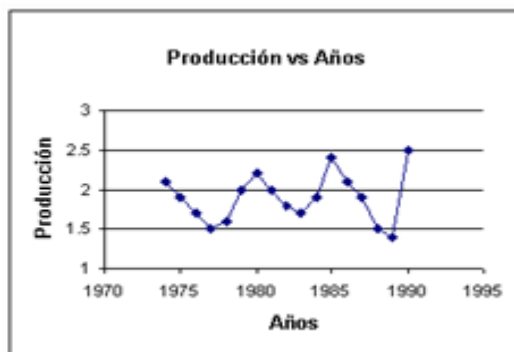
Para equilibrar las variables, se usan procedimientos como la programación lineal, programación no lineal, programación dinámica, modelos de transporte, entre otros. Para solucionar los problemas de espera se utiliza la teoría de

---

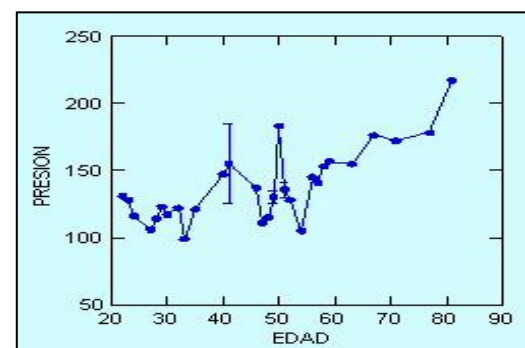
<sup>2</sup> Robert J. Thierauf, *op. cit.*, p.26.

líneas de espera de un sólo canal o de canales múltiples. Para tratar problemas secuenciales, se utilizan los modelos de series de tiempo y causales, donde las series de tiempo se organizan, de acuerdo con el tiempo en que se estén generando, como se puede observar en la gráfica 1.

Los procedimientos causales crean proyecciones de las variables que se pretenden investigar, cuando es posible entender las causas que existen al relacionarse dos o más variables, y con base en las proyecciones se puede crear una predicción más certera, como lo muestra la gráfica 2.



Grafica 1 Relación entre dos variables



Grafica 2 Predicción estadística

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Investigue otros dos sistemas empresariales
2. Busque en medios informativos la aplicación actual de los métodos cuantitativos en organizaciones

### 1.5 INVESTIGACIÓN OPERATIVA: DEFINICIÓN, CAMPO DE APLICACIÓN, MODELOS Y CLASIFICACIÓN

La investigación operativa puede definirse como la rama de las matemáticas que se encarga de analizar las operaciones que lleva a cabo un sistema, empleando modelos matemáticos y algoritmos, para tomar decisiones que permitan optimizar los recursos.

Debido a que la investigación operativa trata de buscar soluciones óptimas para la confiabilidad en la toma de decisiones,,el campo de aplicación es muy grande, desde sistemas abiertos o cerrados, hasta económicos o de servicio.

La IO es de gran utilidad cuando existen muchas alternativas y sólo una de ellas es la que brinda mayores beneficios a la empresa; también, cuando los resultados son al azar y no se tiene la certeza de cuál es el más probable. Es por ello que sus métodos han sido aplicados en empresas manufactureras, de transporte, de comunicaciones, que se dedican a las finanzas, así como en las guerras, entre otros campos de aplicación.

Los modelos empleados en la investigación operativa se clasifican en tres grupos: icónicos, analógicos y simbólicos o matemáticos.

Los modelos icónicos representan físicamente un objeto o fenómeno de forma idealizada o a escala. Son útiles con representaciones de situaciones en el tiempo, como una fotografía. Los modelos icónicos pueden tener dos dimensiones (mapas, fotos y demás) o tres dimensiones (como un globo terráqueo o un barco).

Los modelos analógicos presentan situaciones dinámicas que varían de acuerdo con la relación existente entre las variables. Un ejemplo de situaciones dinámicas son las curvas de oferta y demanda, donde se dice que una variable depende de la otra para aumentar o disminuir. Los modelos analógicos pueden representar muchas operaciones al mismo tiempo, por ejemplo un diagrama de flujo.

Los modelos simbólicos o matemáticos representan fenómenos reales mediante símbolos, cifras, algoritmos. Para crear este tipo de modelos, basta con observar y analizar la realidad y formularla a través de números o símbolos algorítmicos. Las ecuaciones, funciones o matrices son ejemplos de modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos se subdividen en cuantitativos y cualitativos; al usar cantidades o símbolos se convierten en cuantitativos y al representar características mediante gráficos en cualitativos; estándar o hechos a la

medida: cuando el mismo algoritmo se emplea para explicar diferentes fenómenos se convierte en estándar, cuando se construye para un solo problema se denomina hecho a la medida: probabilísticos y determinísticos.

Cuando intervienen las leyes del azar son probabilísticos, cuando sólo exista un resultado posible se llama determinístico; son descriptivos o de optimización cuando sólo tratan de describir situaciones o cuando persiguen la mejora continua. Son estáticos o dinámicos cuando los algoritmos responden a una situación que no varía con el tiempo o cuando transcurre el tiempo en dinámicos.

Son de simulación o de no simulación cuando se crea un programa donde se pueden cargar datos específicos que reflejen el estado de una situación en el presente o en el futuro, o cuando no se usan programas que demuestren realidades de acuerdo con datos específicos.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Elaborar y explicar cualquier modelo, que represente una situación en la organización
2. Investigar y analizar tres definiciones de *investigación operativa*
3. Definir cinco campos de aplicación de la investigación de operaciones en tu comunidad

### 1.6 METODOLOGÍA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE SISTEMAS DECISORIOS

Para la implementación de sistemas decisorios, se debe tener clara la necesidad de la empresa para implementar este tipo de sistemas, también denominados sistemas empresariales. Para comenzar, se debe controlar y automatizar sólo lo que sea necesario, sin perjudicar los elementos que estén funcionando correctamente con el viejo sistema. Después se debe conseguir el soporte y respaldo de los directivos de la empresa, para que se facilite la implementación y que se cuente con los recursos necesarios.

El siguiente paso es involucrar a los usuarios y a todo el personal de la empresa en la implementación del nuevo sistema. Hacer un prototipo de la nueva herramienta que ayudará a mejorar la productividad de la empresa. Para conseguir el éxito, se debe motivar y capacitar al personal que estará directamente relacionado con el nuevo sistema. Después se debe poner en marcha el sistema y dirigirlo y controlarlo internamente. Por último, es importante crear un grupo que intercambie conocimientos sobre el sistema, para cualquier duda o fallo en él.

### ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Investigue una organización que este trabajando con algún sistema empresarial y explique los pasos seguidos para su implementación; así como las ventajas y desventajas
2. Elabore un ensayo del tema *sistemas decisorios*

## AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: subraye la respuesta correcta

1. ¿Cuáles son los pasos para la toma de decisiones?

- a) La toma de decisiones puede describirse como una sucesión de pasos: definición del problema, generación de alternativas, evaluación de alternativas, elección de una alternativa e implantación de la alternativa elegida.
- b) Planteamiento del problema, recolección de datos, elaboración de un modelo, representación gráfica y obtención de resultados para la toma de decisiones.
- c) Análisis de las soluciones factibles, generación de resultados lógicos, elección de un resultado e implantación de mejoras.
- d) Planteamiento del problema, experimentación, hipótesis y solución.

2. ¿Cuál es el principal objetivo de usar métodos cuantitativos?

- a) Explicar un fenómeno real.
- b) La toma de decisiones.
- c) Análisis sistemáticos de los problemas.
- d) Tener cantidades para visualizar mejor el problema.

3. ¿Cuáles son los pasos ordenados empleados en la administración científica?

- a) Planeación, organización, dirección y control.
- b) Planteamiento, organización, formulación de hipótesis, ejecución y control.
- c) Planeación, análisis, ejecución y resultados.
- d) Planeación, ejecución, interpretación y control.

4. Son herramientas utilizadas para ayudar a la organización para que se facilite la administración, automatizando y controlando los procesos:

- a) Administración científica
- b) Investigación operativa.
- c) Sistemas empresariales.



d) Administración de proyectos.

5. Rama de las matemáticas que se encarga de analizar las operaciones que lleva a cabo un sistema, empleando modelos matemáticos y algoritmos, para tomar decisiones que permitan optimizar los recursos:

a) Administración científica.

b) Investigación operativa.

c) Sistemas empresariales.

d) Planeación de la producción.

6. Representan fenómenos reales mediante símbolos, cifras y algoritmos:

a) Modelos icónicos.

b) Modelos analógicos.

c) Modelos matemáticos.

d) Modelos determinísticos.

7. ¿Qué son los Sistemas CASE?

a) Ingeniería de *software* asistido por computadora.

b) Sistemas externos de mantenimiento por computadora.

c) Ingeniería de líneas de espera empresarial.

d). Algoritmos de enlace.

## HOJA DE RESPUESTAS

Preguntas	Respuestas			
	(a)	(b)	(c)	(d)
1	X			
2		X		
3	X			
4			X	
5		X		
6			X	
7	X			

## UNIDAD 2

### PROGRAMACIÓN LINEAL

#### OBJETIVO

Interpretar problemas en sistemas complejos y resolverlos empleando modelos con ecuaciones lineales que permitan encontrar la solución óptima, con la finalidad de hacer más eficiente el recurso disponible en una organización.

#### TEMARIO

2.1 CARACTERÍSTICAS DE LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

2.2 FORMULACIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

2.3 ALGORITMOS DE SOLUCIÓN

2.4 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

2.5 APLICACIONES A PLANEAMIENTO DE LA PRODUCCIÓN, MEZCLA, DISTRIBUCIÓN.  
ASIGNACIÓN Y PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES

## MAPA CONCEPTUAL



## INTRODUCCIÓN

La programación lineal es un método determinista de análisis para elegir la mejor alternativa entre muchas. Con frecuencia, seleccionar una alternativa incluye satisfacer varios criterios al mismo tiempo; por ejemplo cuando se compra una pieza de pan se tiene el criterio de frescura, tamaño, tipo, costo y rebanado o sin rebanar.

Se puede ir más adelante y dividir estos criterios en dos categorías: restricciones y objetivo. Las restricciones son las condiciones que debe satisfacer una solución que está bajo consideración.

Si más de una alternativa satisface todas las restricciones, el objetivo se usa para seleccionar entre todas las alternativas factibles. Cuando se elige una pieza de pan puede quererse una pieza de pan rebanado y fresco. Si varias marcas satisfacen estas restricciones, puede aplicarse el objetivo de un costo mínimo y escoger la más barata.

En la práctica, podemos encontrar situaciones en donde las decisiones son de mayor envergadura y, por consiguiente, requieren de un método de mayor precisión para tomar las decisiones de elección entre varias alternativas.

Cuando estos casos se presentan, lo más conveniente es utilizar la programación lineal. Es un método cuantitativo que utiliza el álgebra de matrices, en donde existe un conjunto de relaciones lineales entre las variables del problema.

En esta unidad se describen dos métodos para la solución de un problema de programación lineal: el método gráfico y el método simplex; ambos se apoyan en las matemáticas básicas y también se presentan ejercicios resueltos que corresponden a situaciones de la vida real. Al mismo tiempo, se incluyen actividades de aprendizaje para reforzar los conocimientos en esta materia.

## 2.1 CARACTERÍSTICAS DE LA PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA

La programación lineal o matemática es empleada en muchas organizaciones debido a la facilidad de formulación y solución de numerosos problemas organizacionales, arrojando siempre el mejor resultado de varios disponibles.

La programación lineal puede definirse como la técnica matemática para determinar la mejor asignación de los recursos limitados de la empresa.<sup>3</sup>

En la programación lineal, se emplean algoritmos matemáticos, creados a partir de ecuaciones lineales, en donde se busca la mejor asignación de los recursos limitados de la empresa. El término linealidad representa una relación entre más de una variable, que son directas y proporcionales; por ejemplo un aumento del 10% de mano de obra, causará el mismo porcentaje en el aumento de la producción.

En conjunto, los algoritmos matemáticos forman un modelo, que optimizan recursos limitados cuando toman en cuenta características como variables, restricciones y una función objetivo. La función objetivo, como su nombre lo indica, representa el objeto del problema; es decir, lo que persigue la empresa en términos cuantitativos.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Formule un algoritmo en el que exista una relación entre dos o más variables
2. Determine la función objetivo de cualquier empresa de servicios
3. Elabore un mapa mental del tema *programación lineal*

## 2.2 FORMULACIÓN DE MODELOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Para tener éxito en la solución de problemas dentro de una organización, es importante la creación de modelos que permitan representar una situación real y partir de ello para buscar las alternativas de solución.

---

<sup>3</sup> Roger G. Schroeder, *Administración de operaciones, toma de decisiones en la función de operaciones*, p.26.

El modelo es una representación o abstracción de una situación u objeto reales, que muestra las relaciones (directas e indirectas) y las interrelaciones de la acción y la reacción en términos de causa y efecto. Como un modelo es una abstracción de la realidad, puede parecer menos complicado que la misma.<sup>4</sup>

Para la formulación de un modelo dentro de la programación lineal, como primer paso, el investigador debe delimitar el problema y conocer el objetivo que desea alcanzar, que puede ser maximizar las utilidades o minimizar los costos, siempre tomando en cuenta el principio de optimización.

El siguiente paso consiste en conocer las variables que presentarán la solución al problema, es decir, las incógnitas que resolverán el modelo de programación lineal pueden ser tantas como sea necesario, con el fin de representar de la mejor forma posible la realidad.

Una vez que se conozcan las variables de decisión, se deben plantear las restricciones, que son los requerimientos que debe cumplir la solución óptima para que se pueda llevar a la práctica y brinde grandes beneficios a la empresa. También pueden llamarse limitantes, ya que indican los valores máximos o mínimos que deben emplearse para garantizar la optimización.

Las restricciones pueden ser por los volúmenes de ventas, por las limitantes en los recursos de la empresa, por la mezcla de ingredientes, por la cantidad de desperdicios y por cuestiones de administración dentro de la empresa, como el tiempo de preparación de la máquina.

Por último, se debe tener presente que todas las variables empleadas en el modelo, deben ser siempre positivas porque representan situaciones que existen en la realidad.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Formule un modelo de programación lineal basado en la mercadotecnia
2. De la actividad anterior, explique las consecuencias de no tomar en cuenta las restricciones

---

<sup>4</sup> Robert J. Thierauf, *Toma de decisiones por medio de investigación de operaciones*, p.24.

3. Investigar los tipos de modelos empleados en la investigación de operaciones.

### 2.3 ALGORITMOS DE SOLUCIÓN

Como ya se mencionó anteriormente, hay que expresar un objetivo bien definido, que pueda minimizar los costos o maximizar las utilidades, además de que deben existir relaciones entre dos o más variables y considerar las limitantes que tenga el problema a resolver, con lo cual se estará en posibilidad de encontrar la mejor solución. Por último, para implementar el modelo, la empresa debe contar con recursos limitados.

Los problemas de programación lineal se pueden resolver por varios métodos, entre los cuales, en este texto se explican el método gráfico y el método simplex. En el primer algoritmo se muestra cómo se comportan las variables del problema en cuestión, mediante el trazo de todas las variables del problema formando un polígono que representa el área de soluciones factibles, en donde también se ubica la solución óptima.

El segundo algoritmo es un método iterativo que permite la solución de problemas con un mayor número de variables que, por lo mismo, es imposible dibujarlas y buscar una solución gráficamente.

#### *Solución por el método gráfico*

En el método gráfico no puede haber más de tres incógnitas, ya que se usa un plano cartesiano formado por dos rectas ( $X$ ,  $Y$ ) y, por ende, dos dimensiones.

Para comenzar, se debe analizar el problema y plantear el objetivo principal que se persigue usando algoritmos (ecuaciones, restricciones, función objetivo), ya sea maximizar las ganancias o minimizar los costos. Después, se expresa en forma gráfica las desigualdades de restricción y se ubica el área de solución factible.

En seguida se traza la función objetivo (FO) en el plano cartesiano y se dibujan líneas paralelas a éste, hasta llegar al punto más distante en el área de soluciones factibles. Por último, se resuelven las desigualdades de las dos



líneas que se cruzan por el punto más distante en el área de soluciones factibles. A continuación se ilustrará con un ejemplo:

La empresa Aires del Sur SA de CV, produce dos tipos de aires acondicionados: Supercraft (X) y Powermax (Y). Un Supercraft tiene un precio de \$600 y un Powermax \$700. Los dos productos, deben pasar por tres áreas.

La empresa desea conocer el volumen de producción que maximice las ganancias, ajustándose a las limitantes de tiempo presentadas en la tabla siguiente:

ÁREA	HORAS REQUERIDAS		HORAS DISPONIBLES AL MES
	Supercraft X	Powermax Y	
1	1	2	140
2	2	2	190
3	3	2	240

Como primer paso, se debe expresar el problema en forma matemática, y para ello hay que construir las ecuaciones, que deben quedar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{Maximizar } Z = \$600X + \$700Y \quad \text{Función objetivo} \\ \left. \begin{array}{l} 1X + 2Y \leq 140 \\ 2X + 2Y \leq 190 \\ 3X + 2Y \leq 240 \end{array} \right\} \text{ El signo } \leq \text{ indica que las horas requeridas por} \\ \text{cada área, deben ser menores que las} \\ \text{disponibles al mes.} \\ \left. \begin{array}{l} X \geq 0, Y \geq 0 \end{array} \right\} \text{ El signo } \geq \text{ indica que X e Y deben ser mayores} \\ \text{que cero, porque se produce o no se produce.} \end{array}$$

El siguiente paso consiste en expresar gráficamente las restricciones (horas requeridas); para ello se deben localizar los puntos X e Y de cada una de las tres desigualdades. Para la primera desigualdad tenemos:

$1X + 2Y \leq 140$ $1X + 2(0) \leq 140$ $X \leq 140$
--

Si todo el tiempo el área 1 produce sólo Supercraft (X) y no produce Powermax (Y), entonces pueden fabricarse **140** unidades de X.

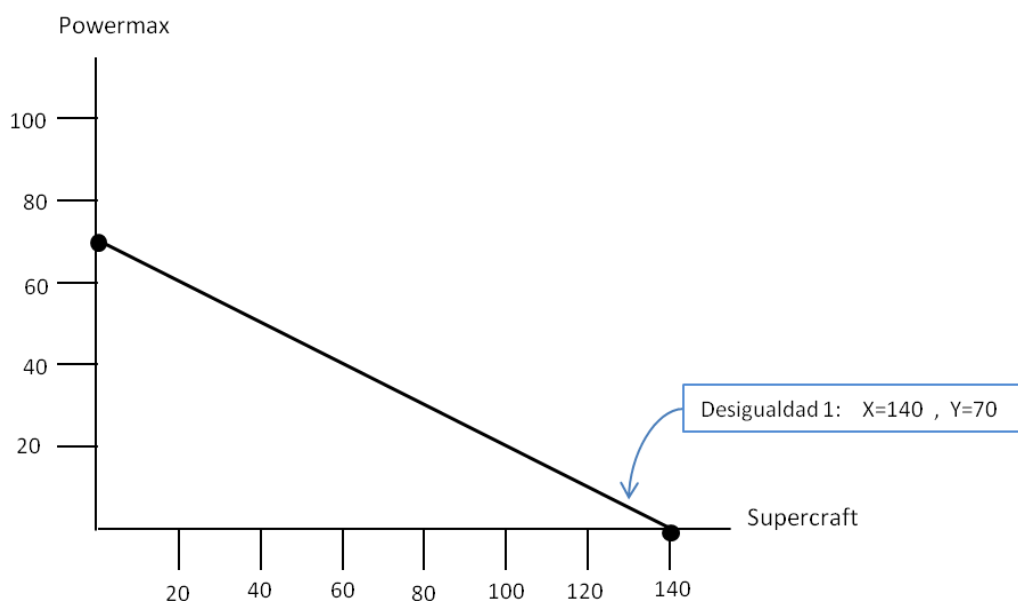
Si todo el tiempo el área 1 produce sólo Powermax (Y) y no produce Supercraft (X), entonces pueden fabricarse **70** unidades de Y.

$$1X + 2Y \leq 140$$

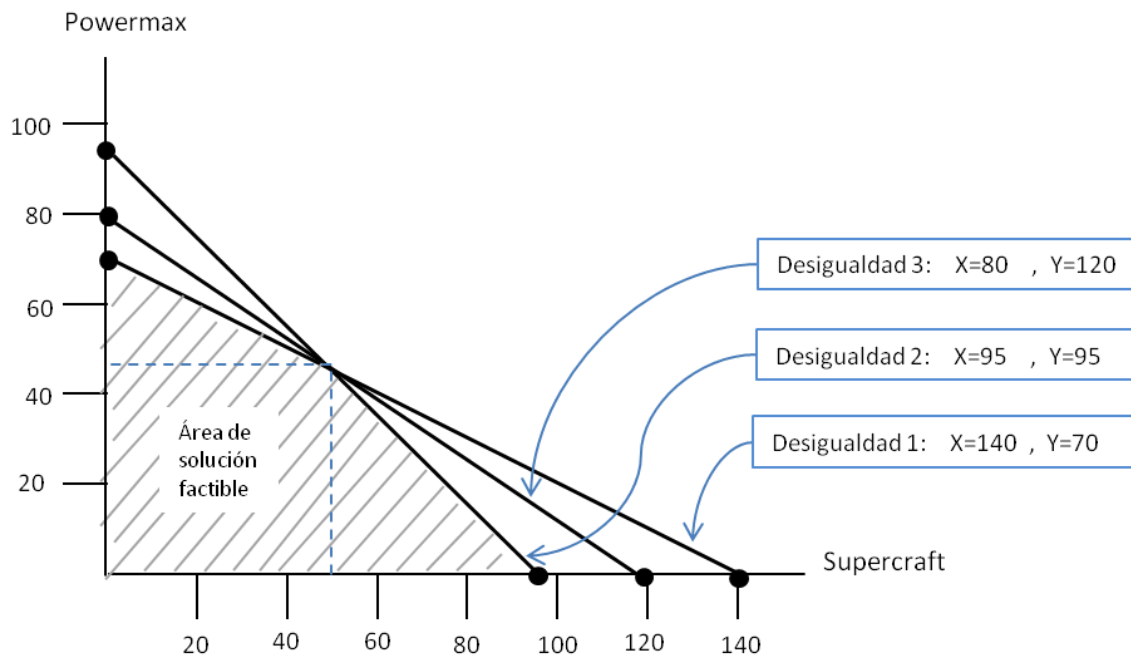
$$1(0) + 2Y \leq 140$$

$$Y \leq 70$$

Con lo anterior, tenemos un punto para el eje  $X=140$  y un punto para el eje  $Y=70$ , que se representan en un plano cartesiano y se unen los puntos para crear una recta, como se presenta a continuación:



Se realiza la misma acción para las desigualdades 2 y 3. Después se sombrea el área de solución factible, sin rebasar las líneas de restricciones, como se muestra en la gráfica siguiente:



Una vez encontrada el área de solución factible, quedan cuatro puntos principales (A, B, C y D) que delimitan dicha área. Para el siguiente paso, se debe trazar la función objetivo. Es necesario conocer los puntos para el eje X y para el eje Y, por ello se propone conseguir una contribución mínima, multiplicando el coeficiente de X con el de Y ( $600 * 700 = 420,000$ ). Los cálculos son los siguientes:

$$\text{Maximizar } Z = \$600X + \$700Y$$

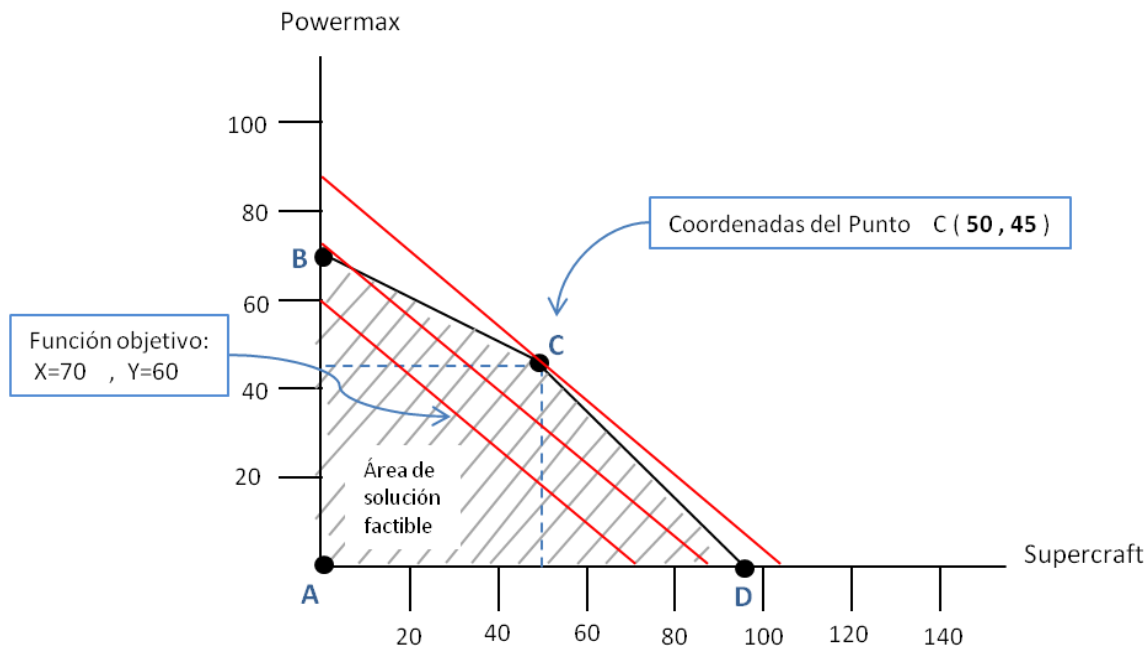
$$600X + 700(0) = 420,000$$

$$X = 700$$

$$600(0) + 700Y = 420,000$$

$$Y = 600$$

Como resultan cantidades grandes, se deben reducir para poder graficar la línea en conjunto con las desigualdades. Para ello se dividirá entre 10 para tener como resultado el eje  $X=70$  y  $Y=60$ . Procedemos a prolongar la línea que representa a la función objetivo de forma paralela, hasta tocar el punto más lejano que delimita el área de soluciones factibles, como se presenta a continuación:



Como se puede observar, el punto C, es el punto más lejano del área de soluciones factibles, lo cual indica, que es el que le da mayor contribución a la empresa Aires del Sur SA de CV, maximizando las utilidades.

Se puede observar en el gráfico anterior, que el resultado del ejercicio son las coordenadas del punto C; donde indica que la empresa debe producir **50** unidades de Supercraft (X) y **45** unidades de Powermax para maximizar las utilidades.

Sin embargo, en numerosos problemas donde se emplee el método gráfico pueden resultar números decimales que dificultaría ubicarlos con exactitud en un gráfico, por lo que se recomienda la solución del sistema de ecuaciones de las líneas que se cruzan en el punto C, que son la desigualdad 1 y desigualdad 2, como se presenta a continuación:

$$1X + 2Y \leq 140 \quad (\text{desigualdad 1})$$

$$2X + 2Y \leq 190 \quad (\text{desigualdad 2})$$

Empleando el método de reducción, se multiplica toda la desigualdad 1 por -1, para poder eliminar la incógnita Y (resultando:  $-1X - 2Y \leq -140$ ). Después se realiza la reducción siguiente:

$$-1X - 2Y \leq -140$$

$$\underline{2X + 2Y < 190}$$

$$X \leq 50$$

Ahora que se conoce el valor de X, se sustituye en cualquiera de las dos desigualdades originales. Sustituyendo X en la desigualdad 1, tenemos:

$$1 X + 2Y \leq 140$$

$$1 (50) + 2Y \leq 140$$

$$2Y \leq 140 - 50$$

$$Y \leq 45$$

Para finalizar, se deben sustituir los valores de X e Y en la función objetivo y así conocer la máxima contribución posible:

$$\text{Maximizar } Z = \$600X + \$700Y \quad \} \quad \text{Función objetivo}$$

$$\text{Maximizar } Z = \$600 (50) + \$700 (45)$$

$$\text{Maximizar } Z = \$ 61,500$$

Se puede concluir que la empresa Aires del Sur SA. de CV, de acuerdo con las limitantes de tiempo, debe producir mensualmente 50 aires acondicionados de la marca Supercraft y 45 de la marca Powermax, que le brindarán una contribución de \$61,500.

*Solución por el método simplex*

Este método es muy útil cuando se trabaja con muchos productos y áreas en la empresa y por lo mismo da lugar a un mayor número de rectas, por lo que no es conveniente usar el método gráfico. Para la solución de problemas de este tipo se usa el álgebra de matrices, por lo que se recomienda al alumno familiarizarse con ese tema.

Para explicar éste método, se usará el ejemplo anterior resuelto por el método gráfico. Formulamos la función objetivo y desigualdades de restricción, resultando lo siguiente:

$$\} \quad \text{Función objetivo}$$

$$\text{Maximizar } Z = \$600X + \$700Y$$

$$1X + 2Y \leq 140$$

$$2X + 2Y \leq 190$$

$$3X + 2Y \leq 240$$

$$X \geq 0, Y \geq 0$$

El signo  $\leq$  indica que las horas requeridas por cada área, deben ser menores que las disponibles al mes.

El signo  $\geq$  indica que X e Y deben ser mayores que cero, porque se produce o no se produce.

Ahora, se deben convertir las desigualdades que indican el tiempo requerido en ecuaciones. Lo anterior, se puede lograr agregando una variable que absorba la holgura de tiempo en cada una de las desigualdades. La holgura de tiempo representada por S1, S2 y S3, será aquella que no se usará en cada una de las áreas.

A continuación, se presentan las ecuaciones una vez añadidas las holguras. Como una condicionante del modelo, todas las variables de holgura deben aparecer en todas las ecuaciones, sólo que las que no correspondan a un determinado departamento, aparecerán con coeficiente cero y la variable que sí corresponda, con coeficiente uno, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{rcl}
 140 \text{ horas} & = & 1X + 2Y + \text{S1} + 0\text{S2} + 0\text{S3} \\
 190 \text{ horas} & = & 2X + 2Y + 0\text{S1} + \text{S2} + 0\text{S3} \\
 240 \text{ horas} & = & 3X + 2Y + 0\text{S1} + 0\text{S2} + \text{S3}
 \end{array}$$

Cantidad de horas
Matriz de cuerpo
Matriz identidad

$$\text{Maximizar } Z = \$600X + \$700Y + \$0S1 + \$0S2 + \$0S3$$

Para visualizar de mejor forma y facilitar la solución del problema, se representa en una tabla:

Tabla 1 Simplex

Cj	Contribución por unidad de variables						
		\$600	\$700	\$0	\$0	\$0	
	Mezcla de productos	Cantidad	X	Y	S1	S2	S3
\$0	S1	140	1	2	1	0	0
\$0	S2	190	2	2	0	1	0
\$0	S3	240	3	2	0	0	1
	Zj	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0
	Cj - Zj		\$600	\$700	\$0	\$0	\$0

Contribución por unidad para las variables de holgura  
 Variables de solución  
 Cero, porque el tiempo no usado por área no produce ganancia  
 Contribución de Pérdida por unidad  
 Contribución neta Por unidad

El método simplex emplea iteraciones, es decir, es un proceso repetitivo, en donde se van creando una serie de soluciones para cada iteración. Las dos últimas filas del cuadro anterior se usan para determinar si puede mejorarse la solución. Los valores de cero en Zj, representan las cantidades en que se reduce la contribución, en el caso de que una unidad de las variables (X, Y, S1, S2 y S3) se añadiera a la mezcla de productos. La última fila, que representa la contribución neta, resulta de juntar una unidad de una variable (Supercraft o Powermax) a la producción.

En la solución inicial no hay contribución (\$0), porque no se producen unidades de aire acondicionado marca Supercraft (X) y tampoco se producen unidades de aire acondicionado marca Powermax (Y). Para conocer la contribución, multiplicamos la columna Cj por la columna de cantidad ( $\$0 \cdot 140 + \$0 \cdot 190 + \$0 \cdot 240 = \$0$ ). Por lo tanto la primera solución es:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Supercraft} = 0 \\ \text{Powermax} = 0 \end{array} \right\} \text{Unidades producidas}$$

Tiempo no usado en h.

$$\left. \begin{array}{l} S1 \\ S2 \\ S3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} = 140 \\ = 190 \\ = 240 \end{array}$$

El siguiente paso consiste en conocer la columna óptima, es decir el producto que genere una mayor contribución para la empresa. En este ejemplo se toma a Powermax (Y), porque contribuye con \$700.

Después se debe conocer la variable que debe reemplazarse; para ello, se divide la columna de cantidad entre los coeficientes de la columna óptima (Y) y se elige la fila que tenga el menor valor positivo.

Cj		Contribución por unidad de variables							
			\$600	\$700	\$0	\$0	\$0		
	Mezcla de productos	Cantidad	X	Y	S1	S2	S3		
140/2=70	\$0	S1	140	1	2	1	0	0	F1/2
190/2=80	\$0	S2	190	2	2	0	1	0	
240/2=120	\$0	S3	240	3	2	0	0	1	
	Zj	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	
	Cj - Zj		\$600	\$700	\$0	\$0	\$0		

Intersección = 2

División de la columna de cantidad, entre la columna óptima. Se elige la fila con menor valor positivo (70).

Columna óptima, genera mayor contribución, \$700.

Como se puede observar en la tabla anterior, entre la columna óptima y la fila elegida, hay un elemento de intersección (coeficiente 2), que servirá para encontrar una mejor solución, reemplazando la variable S1, por la variable Y.

$$\text{Nueva Fila } Y = \frac{\text{Fila 1}}{2}$$



Por ello, se divide cada valor de la fila 1, entre el valor que hay en la intersección, sin tomar en cuenta a  $C_j$  y la mezcla de productos; es decir:

, que también puede representarse como:  $F1/2$

\$0	S1	140	1	2	1	0	0	F1/2
-----	----	-----	---	---	---	---	---	------

$140/2$  ,  $1/2$  ,  $2/2$  ,  $1/2$  ,  $0/2$  ,  $0/2$

\$0	S1	70	1/2	1	1/2	0	0	Nueva fila "Y"
-----	----	----	-----	---	-----	---	---	-------------------

En la columna de  $C_j$ , se debe reemplazar el valor que tenía S1 (cero), por \$700, que es el valor de la contribución de Y.

La nueva fila Y, también puede ser llamada fila pivote, ya que es un apoyo para calcular los nuevos valores de las filas restantes. Para el siguiente paso, se deben calcular los nuevos valores para las filas 1 y 2, tomando en cuenta que los coeficientes de la columna óptima en las filas 2 y 3 deben convertirse en cero.

FILA Y, También llamada fila PIVOTE

		Contribución por unidad de variables							
Cj		\$600	\$700	\$0	\$0	\$0			
	Mezcla de productos	Cantidad	X	Y	S1	S2	S3		
FILA Y	\$700	Y	70	1/2	1	1/2	0	0	
FILA 2	\$0	S2	190	2	2	0	1	0	(F2) - (2)(FY)
FILA 3	\$0	S3	240	3	2	0	0	1	(F3) - (2)(FY)
	Zj		\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	\$0	
	Cj - Zj		\$600	\$700	\$0	\$0	\$0	\$0	

Los coeficientes de la columna óptima en las filas 2 y 3 deben convertirse en cero.

Para encontrar la nueva fila 2 y 3, se debe usar la siguiente fórmula:

$$\text{Nueva Fila} = \left( \begin{matrix} \text{Elemento en} \\ \text{la Fila a} \\ \text{reemplazar} \end{matrix} \right) - \left( \begin{matrix} \text{Coeficiente en la columna} \\ \text{óptima de la fila reemplazante} \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \text{Elemento en la} \\ \text{Fila pivote.} \end{matrix} \right)$$

Esto también puede ser representado de la siguiente manera:

$$\text{Nueva Fila 2} = \left( \text{FILA 2} \right) - \left( 2 \right) \left( \text{FILA Y} \right) \quad \text{Simplificando:} \quad \text{Nva. F2} = (F2) - (2)(FY)$$

$$\text{Nueva Fila 3} = \left( \text{FILA 3} \right) - \left( 2 \right) \left( \text{FILA Y} \right) \quad \text{Simplificando:} \quad \text{Nva. F3} = (F3) - (2)(FY)$$

Donde la nueva fila 2 se calcula tomando cada elemento de esta fila, menos dos veces lo que vale la fila Y. De la misma forma se sustituyen los valores para la fila 3.

Los nuevos valores de la fila 2:	Los nuevos valores de la fila 3:
$190 - 2(70) = 50$	$240 - 2(70) = 100$
$2 - 2(1/2) = 1$	$3 - 2(1/2) = 2$
$2 - 2(1) = 0$	$2 - 2(1) = 0$
$0 - 2(1/2) = -1$	$0 - 2(1/2) = -1$
$1 - 2(0) = 1$	$0 - 2(0) = 0$
$0 - 2(0) = 0$	$1 - 2(0) = 1$

Una vez calculado los nuevos valores para las filas 2 y 3, calculamos los valores para las filas  $Z_j$ , de la siguiente forma:

$$Z_j \text{ (contribución total)} = \$700(70) + \$0(50) + \$0(100) = \$49,000$$

$$Z_j \text{ para X} = \$700(1/2) + \$0(1) + \$0(2) = \$350$$

$$Z_j \text{ para Y} = \$700(1) + \$0(0) + \$0(0) = \$700$$

$$Z_j \text{ para S1} = \$700(1/2) + \$0(-1) + \$0(-1) = \$350$$

$$Z_j \text{ para S2} = \$700(0) + \$0(1) + \$0(0) = \$0$$

$$Z_j \text{ para S3} = \$700(0) + \$0(0) + \$0(1) = \$0$$

Los cálculos para la fila  $C_j - Z_j$ , se presentan a continuación:

$$\text{Para X} = \$600 - \$350 = \$250$$

$$\text{Para Y} = \$700 - \$700 = \$0$$

$$\text{Para S1} = \$0 - \$350 = -\$350$$

$$\text{Para S2} = \$0 - \$0 = \$0$$

$$\text{Para S3} = \$0 - \$0 = \$0$$

Los resultados de los cálculos anteriores se plasman en la siguiente tabla:

Cj		Contribución por unidad de variables						
		\$600	\$700	\$0	\$0	\$0		
	Mezcla de productos	Cantidad	X	Y	\$1	S2	S3	
FILA Y	\$700	Y	70	1/2	1	1/2	0	0
FILA 2	\$0	S2	50	1	0	-1	1	0
FILA 3	\$0	S3	100	2	0	-1	0	1
Zj		\$49,000	\$350	\$700	\$350	\$0	\$0	
Cj - Zj			\$250	\$0	-\$350	\$0	\$0	

Para tener una contribución de \$49,000, se deben producir 70 unidades de Y

Por cada hora añadida a la solución, se reduce 1/2 de unidad en la producción de Y

Nueva contribución total

Valor positivo, indica que existe una mejor contribución general

Cj - Zj

En la primera iteración, podemos observar que la contribución total es de \$49,000 comparada con \$0 al inicio del ejercicio. Dicha contribución es alcanzada si se producen 70 unidades de Powermax (Y).

El valor de positivo en la fila  $C_j - Z_j$ , indica que existe una mejor contribución general, por lo que hay que realizar una segunda iteración (repetir los pasos anteriores).

El valor de 1/2 en la fila Y, indica que por cada hora de S1 añadida a la solución, se reduce la producción de Y en 1/2 de unidad.

Para encontrar una mejor contribución, comenzaremos otra iteración buscando la columna óptima, es decir, el producto que genere mayor dinero para la empresa. Se toma a Supercraft (X) porque contribuye con \$250.

Después se debe conocer la variable que debe reemplazarse; para ello, se divide la columna cantidad, entre los coeficientes de la columna óptima (X) y se elige la fila que tenga el menor valor positivo.

$$\text{Fila Y} = 70 / (1/2) = 140$$

$$\text{Fila S2} = 50 / 1 = 50$$

$$\text{Fila S3} = 100 / 2 = 50$$

Los resultados de las filas 2 y 3 son iguales, por lo que se puede tomar cualquiera de las dos, para convertirse en la nueva fila X. Tomaremos la fila 2 y después se procede a convertir en 1 el elemento de intersección.

En este caso no será necesario, porque el elemento de intersección es 1. La nueva fila X, será nuestro elemento pivote para los siguientes cálculos.

Siguiendo los mismos pasos de la -primera iteración, la columna de  $C_j$ , se debe reemplazar el valor que tenía  $S_2$  (cero), por \$700, que es el valor de la contribución de Y.

A la nueva fila X le llamamos fila pivote, que utilizaremos para calcular los nuevos valores para las filas Y y  $S_3$ , tomando en cuenta los coeficientes de la columna.

				Coeficientes que se convierten en cero				
Fila Pivote								
\$700	Y	70	1/2	1	1/2	0	0	$(FY) - (1/2)(FX)$
\$600	X	50	1	0	-1	1	0	
\$0	$S_3$	100	2	0	-1	0	1	$(F3) - (2)(FX)$
			Elemento de Intersección					

Para encontrar la nueva fila Y y 3, se debe usar la siguiente fórmula:

$$\text{Nueva Fila} = \left( \begin{array}{c} \text{Elemento en} \\ \text{la Fila a} \\ \text{reemplazar} \end{array} \right) - \left( \begin{array}{c} \text{Coeficiente en la columna} \\ \text{óptima de la fila reemplazante} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \text{Elemento en la} \\ \text{Fila pivote.} \end{array} \right)$$

Esto también puede ser representado de la siguiente manera:

$$\text{Nueva Fila Y} = \left( \text{FILA Y} \right) - \left( 1/2 \right) \left( \text{FILA X} \right) \quad \text{Simplificando:} \quad \text{Nva. FY} = (FY) - (1/2)(FX)$$

$$\text{Nueva Fila 3} = \left( \text{FILA 3} \right) - \left( 2 \right) \left( \text{FILA X} \right) \quad \text{Simplificando:} \quad \text{Nva. F3} = (F3) - (2)(FX)$$

Donde la nueva fila Y se calcula tomando cada elemento de la fila Y, menos 1/2 de veces lo que vale la fila X. De la misma forma, se sustituyen los valores para la fila 3.

Los nuevos valores de la fila Y:	Los nuevos valores de la fila 3:
$70 - 1/2(50) = 45$	$100 - 2(50) = 0$
$1/2 - 1/2(1) = 0$	$2 - 2(1) = 0$
$1 - 1/2(0) = 1$	$0 - 2(0) = 0$
$1/2 - 1/2(-1) = 1$	$-1 - 2(-1) = 1$
$0 - 1/2(1) = -1/2$	$0 - 2(1) = -2$
$0 - 1/2(0) = 0$	$1 - 2(0) = 1$

Una vez calculado los nuevos valores para las filas 2 y 3, calculamos los valores para las filas  $Z_j$ , de la siguiente forma:

$$Z_j \text{ (contribución total)} = \$700 (45) + \$600 (50) + \$0 (100) = \$61,500$$

$$Z_j \text{ para X} = \$700 (0) + \$600 (1) + \$0 (2) = \$ 350$$

$$Z_j \text{ para Y} = \$700 (1) + \$600 (0) + \$0 (0) = \$ 700$$

$$Z_j \text{ para S1} = \$700 (1) + \$600 (-1) + \$0 (1) = \$ 100$$

$$Z_j \text{ para S2} = \$700(-1/2) + \$600 (1) + \$0 (-2) = \$ 250$$

$$Z_j \text{ para S3} = \$700 (0) + \$600 (0) + \$0 (1) = \$ 0$$

Los cálculos para la fila  $C_j - Z_j$  se presentan a continuación:

$$\text{Para X} = \$600 - \$600 = \$ 0$$

$$\text{Para Y} = \$700 - \$700 = \$ 0$$

$$\text{Para S1} = \$0 - \$100 = -\$100$$

$$\text{Para S2} = \$0 - \$250 = -\$250$$

$$\text{Para S3} = \$0 - \$0 = \$ 0$$

Los resultados de los cálculos anteriores se plasman en la siguiente tabla:

Tabla 3 Simplex

La empresa debe producir 45 unidades de Y y 50 unidades de X.

Cj	Contribución por unidad de variables						
			\$600	\$700	\$0	\$0	\$0
	Mezcla de productos	Cantidad	X	Y	S1	S2	S3
\$700	Y	45	0	1	1	-1/2	0
\$600	X	50	1	0	-1	1	0
\$0	S3	0	0	0	1	-2	1
	Zj	\$61,500	\$600	\$700	\$100	\$250	\$0
	Cj - Zj		\$0	\$0	-\$100	-\$250	\$0

Nueva contribución total

Al no existir valores positivos, indica que no existe una mejor contribución general

Se puede concluir que la empresa Aires del Sur SA de CV, de acuerdo con las limitantes de tiempo, debe producir mensualmente 50 aires acondicionados de la marca Supercraft (X) y 45 de la marca Powermax (Y) que le brindarán una contribución de \$61,500.

### ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Formule las ecuaciones necesarias y resuelva el siguiente ejercicio empleando el método gráfico:

La empresa Bebidas del Grijalva produce un jugo a partir de dos ingredientes básicos que son X y Y. Un litro de X puede ser adquirida a \$80 y un litro de Y cuesta \$120. Cada ingrediente contiene tres tipos de nutrientes A, B y C. Un litro de jugo debe contener al menos 3,600 unidades de nutriente A, 730 unidades de nutriente B y 1,250 unidades de nutriente C.

INGREDIENTE	NUTRIENTE		
	A	B	C

X	257	61	208
Y	450	73	69

Contenido nutricional

¿Qué proporciones de X y Y deberían de tenerse para minimizar el costo del jugo?

#### 2.4 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Los resultados obtenidos se deben analizar y con base en la situación actual, se debe tomar una decisión. La forma de interpretar los resultados y tomar la mejor decisión es la clave del éxito de numerosas empresas reconocidas.

La programación lineal ayuda al administrador a usar más eficientemente sus recursos, distribuyendo eficazmente los elementos con los que cuenta para la actividad productiva. Además, los resultados numéricos obtenidos al usar programación lineal, permiten tomar decisiones objetivas y dejar a un lado el modo de pensar o de sentir.

En el mundo actual las decisiones ya no pueden ser tomadas por tanteo o corazonadas; ahora deben tomarse en cuenta métodos sistemáticos y herramientas que brinden resultados confiables.

Es de considerar que la programación lineal arroja soluciones posibles y prácticas y le dan un panorama al administrador para la toma de decisiones; sin embargo, nadie puede predecir exactamente el futuro, y pueden interferir otras variables que perjudiquen a la empresa sin poder tener un control absoluto de ello, como por ejemplo problemas económicos nacionales, la demanda, etc.

### ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Explique con sus palabras por qué es importante tomar decisiones basadas en los resultados de la programación lineal
2. Elabore un ensayo donde señale por qué la programación lineal es un método de toma de decisiones para las empresas



## 2.5 APLICACIONES A PLANEAMIENTO DE LA PRODUCCIÓN, MEZCLA, DISTRIBUCIÓN, ASIGNACIÓN Y PROGRAMACIÓN DE ACTIVIDADES.

Para la aplicación de la programación lineal, el administrador debe definir exactamente la función objetivo, ya que puede cambiar constantemente debido a factores internos o externos que afectan a la empresa. Además, se debe conocer con precisión la cantidad de recursos con los que cuenta la empresa, como mano de obra, materias primas y maquinaria.

La programación lineal puede resolver muchos problemas de producción analizando las variables que influyen como la mezcla de materia prima, distribución de material, equipo y mano de obra.

Para algunas empresas, la mezcla es imprescindible para la creación de nuevos productos que permitan acaparar un mercado diferente. La organización puede ser capaz de ampliar metodológicamente su línea de productos de dos formas: extendiéndola y cambiando o agregando más características al producto.

La distribución la conforman un grupo de personas denominadas intermediarios que están relacionados y que permiten que el producto final llegue a las manos de la población que demanda la mercancía, para la satisfacción de sus necesidades.

Con la programación lineal podemos solucionar problemas relacionados con el limitado tiempo de entrega del producto, debido a su caducidad, sistemas de comunicación, asignación de recursos para los canales de distribución (vehículos, paquetería o motocicletas) y mejorar los sistemas de embalajes, entre otros.

Referente a la asignación de recursos, podemos mencionar que toda empresa tiene que plantearse esta tarea, porque todas tienen un suministro limitado. Si los recursos fueran ilimitados, no existiría la necesidad de la aplicación de la programación lineal.

En la empresa, en cada programa existen actividades diferentes, al igual que tiempos de ejecución y necesidad de recursos para llevarse a cabo. Éste es otro tema fundamental, a la hora de emplear o no programación lineal. Al iniciar

el proceso de programación, se deben evaluar todas las variables que intervienen y la relación estrecha entre ellas.

### ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Explique con sus palabras por qué la programación lineal es un método para solución de problemas de mezcla de producción
2. Elabore un ensayo donde señale por qué la programación lineal se puede usar para resolver problemas de asignación

## AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: subraye la respuesta correcta

1. ¿Cuáles de las siguientes relaciones no serían aceptables como restricciones de programación lineal?

- a)  $7X + 5Y = 9$
- b)  $8XY + 2X \leq 12$
- c)  $13X + 9X^2 \geq 8$
- d)  $7X - 4Y \leq 9$

2. ¿Cuáles de las siguientes relaciones serían aceptables como restricciones en PL?

- a)  $X^2 + Y^2 = 8$
- b)  $3X + 7X \geq 9$
- c)  $12X + 8 = 8XY$
- d)  $14x - 6 - 5$

3. ¿Cuáles son los pasos ordenados empleados en la administración científica?

- a) Planeación, organización, dirección y control.
- b) Planteamiento, organización, formulación de hipótesis, ejecución y control.
- c) Planeación, análisis, ejecución y resultados.
- d) Planeación, administración, ejecución y control.

4. Son herramientas utilizadas para ayudar a la organización para que se facilite la administración, automatizando y controlando los procesos:

- a) Administración científica
- b) Investigación operativa.
- c) Sistemas empresariales.
- d) Administración de proyectos

5. Rama de las matemáticas que se encarga de analizar las operaciones que lleva a cabo un sistema, empleando modelos matemáticos y algoritmos, para tomar decisiones que permitan optimizar los recursos:

- a) Administración científica.
- b) Investigación operativa.
- c) Sistemas empresariales.
- d) Administración de la producción.

6. Representan fenómenos reales mediante símbolos, cifras y algoritmos:

- a) Modelos icónicos.
- b) Modelos analógicos.
- c) Modelos matemáticos.
- d) Modelos de decisión.

7. ¿Qué son los sistemas CASE?

- a) Ingeniería de *software* asistido por computadora.
- b) Sistemas externos de mantenimiento por computadora.
- c) Ingeniería de líneas de espera empresarial.
- d) Sistemas de producción computarizada.

8. ¿En qué consiste el método gráfico?

- a) Es un sistema de ecuaciones cuadráticas.
- b) Es un sistema de ecuaciones lineales que permite encontrar una solución óptima a través de un gráfico.
- c) Es un sistema de ecuaciones lineales que nos muestran una curva.
- d) Es un esquema que nos muestra una solución, a través de una curva.

9. ¿En qué consiste el método simplex?

- a) Es un método iterativo que arroja soluciones factibles hasta encontrar la óptima por aproximaciones sucesivas.
- b) Es un método cuantitativo que toma en cuenta varias ecuaciones y las mezcla para encontrar una solución óptima.
- c) Es un método de aproximaciones para encontrar la función objetivo y la minimización de las ganancias.

d) Es un método de solución de ecuaciones cuadráticas.

10. ¿Por qué se utiliza el álgebra de matrices en la solución de un problema de programación lineal?

a) Porque el álgebra de matrices tiene una formación dinámica y lineal.

b) porque el álgebra de matrices permite una solución integral.

c) Porque un problema de más de tres ecuaciones es fácil resolverse a través del álgebra de matrices.

d) Porque se trata de un problema complejo que requiere un ordenamiento matricial.

## HOJA DE RESPUESTAS

Preguntas	Respuestas			
	(a)	(b)	(c)	
1	X			
2		X		
3	X			
4			X	
5		X		
6			X	
7	X			
8		X		
9	X			
10			X	

## UNIDAD 3

### PROGRAMACIÓN ENTERA

#### OBJETIVO

Formulación de modelos de optimización y aplicación de programación lineal con variables de valores enteros a partir de problemas en donde las empresas buscan optimizar la función objetivo.

#### TEMARIO

3.1 VARIABLES ENTERAS

3.2 ALGORITMO BRANCH AND BOUND

3.3 VARIABLES BINARIAS

3.4. APLICACIÓN DE VARIABLES ENTERAS

## MAPA CONCEPTUAL





## INTRODUCCIÓN

*Programación entera* es el nombre que recibe un conjunto de técnicas que pueden usarse para encontrar la mejor solución entera posible para un problema de programación lineal. Se utiliza para resolver problemas en que las variables deben ser enteras y para problemas enteros mixtos, es decir, los que tienen algunas variables enteras y algunas continuas. Es una técnica de optimización ya que lleva a la mejor solución entera posible.

En la unidad anterior se desarrolló el método simplex de programación lineal, el cual supone que todas las variables son continuas y generalmente da soluciones no enteras. Cuando las variables de decisión, como personas, mesas o unidades de producción, no pueden subdividirse, la solución del simplex no puede usarse en forma directa.

El redondeo de una solución óptima es peligroso, ya que no es obvio el hecho de que la solución que resulte sea óptima o siquiera posible. Por tanto, se tienen que emplear otros métodos cuantitativos que permitan sólo el uso de variables enteras y que generen soluciones enteras.

En ese sentido, los estudiosos de la investigación de operaciones han desarrollado varias técnicas que cumplen con dichas características, entre las que se pueden citar el algoritmo branch and bound y el método de variables binarias, entre otros.

En este apartado se explican con detalle los métodos señalados y se muestra un ejemplo desarrollado, así como las características que lo diferencian de otras técnicas de programación

### 3.1 VARIABLES ENTERAS

Las variables estudiadas en una empresa pueden ser referidas mediante un símbolo (X, Y o cualquier letra) que puede representar a cualquier elemento dentro de la organización. Por ejemplo, la variable X puede ser un producto de la empresa o los trabajadores de la misma.

La programación entera se diferencia de la programación lineal, en que los valores de las variables de decisión sólo pueden tomar valores enteros. Así pues, las variables enteras no pueden tomar números fraccionarios o decimales.

Como ejemplo de las variables enteras podemos citar el número de productos al día, que pueden ser 50 o 120, pero no pueden ser 50.23 ni 120.32 productos.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Mencione diez ejemplos de variables enteras
2. Mencione la importancia de emplear variables enteras

### 3.2 ALGORITMO BRANCH AND BOUND.

Es una herramienta que emplea algoritmos para encontrar la solución óptima con variables enteras. Al inicio, los problemas se deben resolver empleando la programación lineal, a través de la cual se obtienen fracciones; es de gran ayuda emplear el algoritmo de branch and bound.

Este método denominado en español *ramificación y acotamiento* forma parte de la programación entera. Puede ser usado para dos o más variables dependiendo del problema que se presente.

Ramificación y acotamiento es una estrategia de búsqueda sistemática que reduce mucho el número de combinaciones que se deben examinar. Comienza con la solución óptima del simplex en donde se ignoraron las restricciones de variables enteras. Se selecciona después una variable con valor no entero y se crean dos ramas mutuamente excluyentes. Esto da lugar a dos nuevos problemas de programación lineal que se deben resolver. Si

ninguna solución es entera, se crean nuevas ramas y se resuelven nuevos problemas.

En cada paso, la solución que se encuentra proporciona una cota para esa rama en el sentido de que ninguna otra solución puede ser mejor. Por ejemplo, se inicia el proceso con una solución óptima no entera; se sabe que no existe ninguna otra solución no entera que sea mejor.

Para explicar mejor el método, se presenta a continuación un ejercicio resuelto:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & Z = \$ 60X + 100Y \\ \text{Sujeto a:} \quad & 2X + 3Y \leq 7 \\ & 4X + 3Y \leq 10 \\ & X \geq 0 \quad Y \geq 0 \text{ Enteros} \end{aligned}$$

Para comenzar, se debe resolver el ejercicio empleando programación lineal (método gráfico o método simplex). Los resultados para este problema son:  $X = 3/2$  e  $Y = 4/3$ , con una contribución (VC) de \$223.33. Como podemos observar, los valores de las variables  $X$  e  $Y$  son valores fraccionarios y en las restricciones del método sólo se permiten valores enteros.

Para usar el método de branch and bound se deben escoger cualquiera de las dos variables; para este ejemplo, se seleccionó la variable  $X$  para aproximar el resultado al entero superior e inferior ( $3/2 = 1.5$ ), es decir que se crearán 2 subproblemas o nodos que llamaremos  $N1$  y  $N2$ . Para  $N1$  tenemos como restricción que  $X \leq 1$  (entero inferior). Para  $N2$  tenemos como restricción que  $X \leq 2$  (entero superior). Sustituyendo los valores tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a:} \quad & 2X + 3Y \leq 7 \\ & 4X + 3Y \leq 10 \end{aligned}$$

Para  $N1$  con restricción  $X \leq 1$

$$2(1) + 3Y \leq 7$$

$$3Y \leq 7 - 2, \text{ entonces } Y \leq \mathbf{5/3}$$

$$4(1) + 3Y \leq 10$$

$$3Y \leq 10 - 4, \text{ entonces } Y \leq \mathbf{2}$$

Tomamos el menor ( $5/3$ ) para no perjudicar los resultados de las ecuaciones.

Para N2:

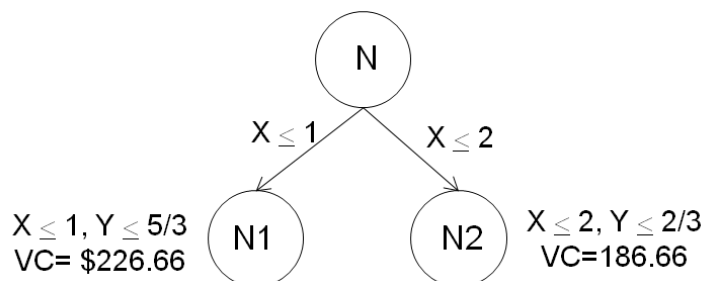
$$2(2) + 3Y \leq 7$$

$$3Y \leq 7 - 4, \text{ entonces } Y \leq 1$$

$$4(2) + 3Y \leq 10$$

$$3Y \leq 10 - 8, \text{ entonces } Y \leq 2/3$$

selecciona el menor (2/3) para no perjudicar los resultados de las ecuaciones.

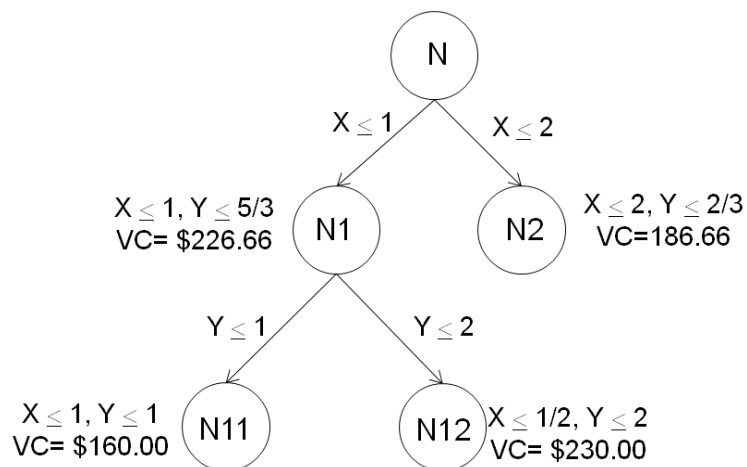


Como podemos observar, del problema inicial se desprenden dos subproblemas, pero ninguno da sólo resultados enteros, que es el objetivo del método de branch and bound; sin embargo, N1 nos da una contribución mayor (\$226.66), por lo que puede seguir generando más nodos hasta hallar una solución con número enteros.

Los nodos se agotan o se dejan de usar cuando:

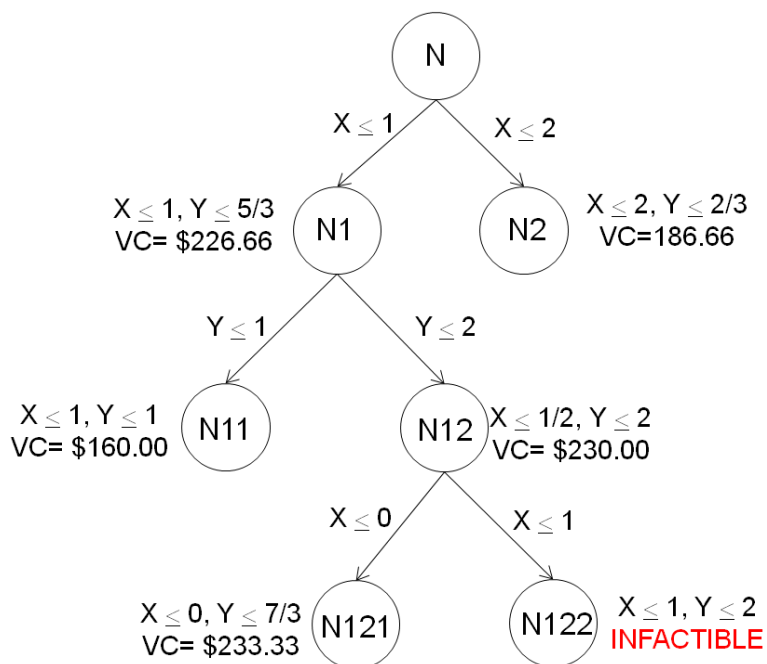
- 1.- Se encuentra una solución con números enteros
- 2.- La solución no es factible (rebasa los resultados iniciales)
- 3.- Se obtiene una solución fraccionaria con una contribución menor

Como siguiente paso, N1 genera dos nodos: N11 (con restricción  $Y \leq 1$ ) y N12 (con restricción  $Y \leq 2$ ), debido a que sólo Y da un valor fraccionario ( $Y=1.66$ ) y luego se debe aproximar al menor entero y mayor entero como se muestra a continuación:

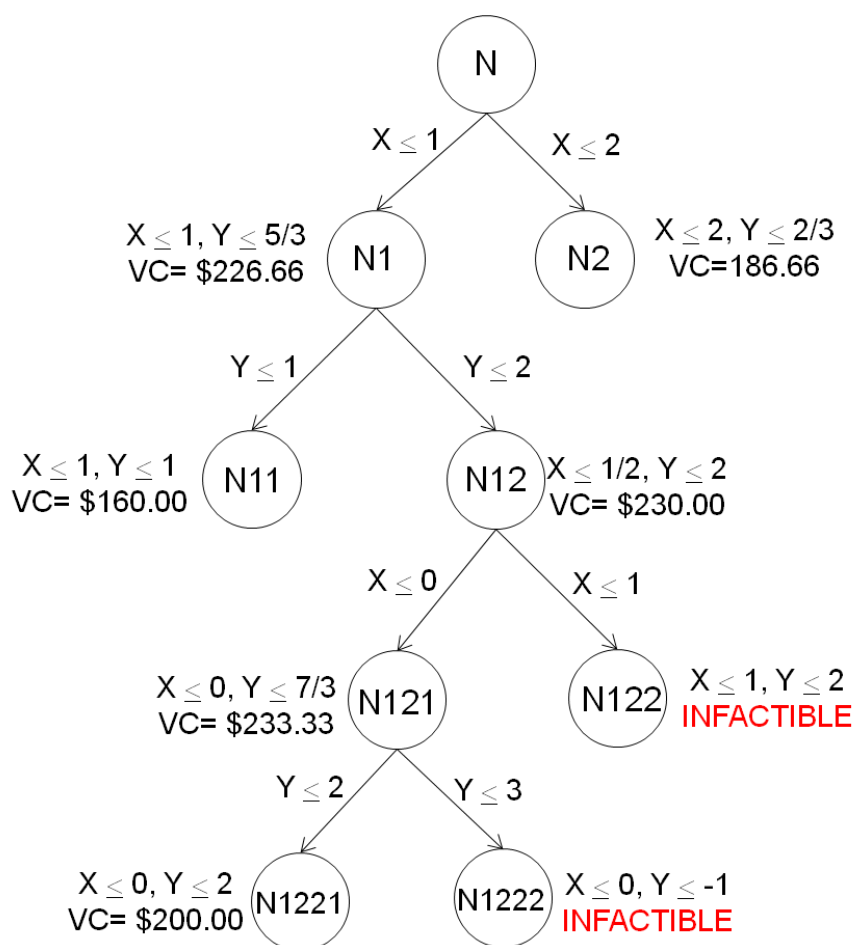


Para este caso, al calcular N11 respetamos el valor entero de  $X$  encontrado en el nodo N1 ( $X=1$ ) y para N12 calculamos el valor de  $X$  con base en el valor de  $Y \leq 2$ . Se puede apreciar en el gráfico anterior que se ha encontrado una solución entera en N11; sin embargo, se tiene una mayor contribución en N12, por lo que se puede seguir buscando una mejor solución entera en N12.

A continuación se parte de N12 para generar nuevos nodos: el nodo N121 (con restricción  $X \leq 0$ ) y el nodo N122 (con restricción  $X \leq 1$ ), ya que se aproxima al menor entero y mayor entero.



El nodo N122 es infactible, ya que los valores de X e Y sustituidos en las ecuaciones originales, rebasan los resultados, por lo que el nodo se agota y seguimos con el nodo N121 que tiene un valor fraccionario ( $Y=2.33$ ), que hay que aproximar al menor entero y mayor entero. Se genera el nodo N1211 (con restricción  $Y \leq 2$ ) y el nodo N1212 (con restricción  $Y \leq 3$ ), resultando lo siguiente:



Debido a que ya no existen valores fraccionarios, ya no se pueden seguir subdividiendo los nodos, por lo que el nodo N1221 presenta la máxima contribución de \$200 con valores enteros y la solución se da con  $X=0$  y  $Y=2$ .

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Resuelve el siguiente problema utilizando el método de branch and bound

$$\text{Maximizar} \quad Z = 120X + 80Y$$

$$\text{Sujeto a:} \quad 2X + Y \leq 6$$

$$7X + 8Y \leq 28$$

$$X \geq 0, Y \geq 0 \text{ Enteros}$$

2. Investigue las aplicaciones del método branch and bound

### 3.3 VARIABLES BINARIAS

Las variables binarias se distinguen porque sólo pueden tomar valores de 0 y 1. Este tipo de variables son muy empleadas en problemas de decisión, es decir, si se hace una operación o si no se hace. Por ejemplo, una empresa puede elaborar un producto  $X_j$ , o no elaborarlo, pero si se pudiera hacer sólo en ciertas cantidades entre  $K_j$  y  $L_j$ , la variable binaria se representa de la siguiente manera:

$$Y_j \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Si se produce el producto } X_j. \\ 0 \text{ Si no se produce el producto } X_j \end{array} \right.$$

La restricción quedaría de la siguiente forma:

$$K_j \cdot Y_j \leq X_j \leq L_j \cdot Y_j$$

Las variables binarias tienen un sinnúmero de aplicaciones, ya sea en el área industrial, de servicios o de medio ambiente; por ejemplo: hacer un pedido o no hacerlo, hacer la operación o no hacerla, estar vivo o estar muerto, etcétera.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Investigue dos casos reales, donde pueden emplearse las variables binarias
2. Investigue tres definiciones más de variables binarias

### 3.4. APLICACIÓN DE VARIABLES ENTERAS

Los modelos usados en la investigación de operaciones son variados y se adaptan a cualquier problema cuantitativo de la empresa. Los modelos donde intervienen variables enteras, son los que totalmente o una parte de ellos toman valores enteros.

Muchas situaciones pueden analizarse con modelos lineales. Hablamos de linealidad cuando existe una relación estrecha entre dos o más variables que tienen un impacto proporcional. Ejemplo: a un aumento de 5% en horas de trabajo, aumenta un 5% la producción. Para algunos casos, sólo importa que todas las variables de decisión sean valores enteros, es decir, el área de soluciones factibles sólo tenga números enteros; cuando esto sucede hablamos de programación lineal entera.

Ahora, si interesan tan solo algunas variables de decisión, hablamos de programación lineal mixta. Y por último, si sólo interesan las variables que pueden tomar valores de 0 y 1, hablamos de variables binarias.

Se pueden emplear variables enteras, por ejemplo, cuando se refiere a número de máquinas, ya que se habla de 10 o 20 máquinas, pero no de media máquina. Cuando se trabaja con el número de empleados, se dice 40 o 50 empleados, pero no se habla de 35.5 empleados. En fin, existe un campo muy amplio donde es necesario emplear sólo valores enteros y no fraccionarios.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Mencione cinco aplicaciones de variables enteras y explique cada una
2. Elabore un ensayo del tema *programación entera*



## AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: subraye la respuesta correcta

1. ¿Qué estudia la programación entera?
  - a) Proporciona soluciones óptimas a problemas de programación lineal, en donde se obtienen resultados enteros.
  - b) Busca la solución en un problema de producción con aproximaciones sucesivas.
  - c) Busca la solución de un problema con variables fraccionales.
  - d) Busca la solución de problemas con variables enteras.
  
2. ¿De qué método se auxilia la programación entera para obtener una solución óptima?
  - a) Del método grafico simplex.
  - b) Del método PERT.
  - c) Del método simplex.
  - d) Del método probabilístico.
  
3. ¿Qué es una variable entera?
  - a) Es un número cualquiera.
  - b) Es una variable con números enteros.
  - c) Es un número fraccionario.
  - d) Es una cantidad que tiende a variar.
  
4. ¿De los números que a continuación se señala, diga cuáles corresponden a una variable entera?
  - a) 2.1, 3.2, 2.3
  - b) 1.1, 5.2, 120.1
  - c) 150, 140, 5
  - d) 15, 1.2, 32

5. ¿Con qué otro nombre se conoce el algoritmo de branch and bound?
- a) Ramificación y ubicación.
  - b) Ramificación y acotamiento.
  - c) Acotamiento y ramificación.
  - d) Ramificación y ramificación.
6. ¿A qué se refiere el método de variables binarias?
- a) Para tomar una decisión utiliza dos valores: 0 y 1.
  - b) Para tomar una decisión utiliza dos números: uno mayor y otro menor.
  - c) Para tomar una decisión utiliza dos variables: X e Y con valores distintos.
  - d) Para tomar una decisión usa dos pares de números.

## HOJA DE RESPUESTAS

Preguntas	Respuestas			
	(a)	(b)	(c)	(b)
1	X			
2			X	
3		X		
4			X	
5		X		
6	X			

## UNIDAD 4

### PROGRAMACIÓN DE METAS

#### OBJETIVO

Identificar las metas de una empresa de acuerdo con su importancia y construir un modelo que dé solución a los problemas de decisión que tengan muchas metas, pero que estén en conflicto una con otra.

#### TEMARIO

4.1 ECUACIONES DE RESTRICCIONES Y DE METAS

4.2 FUNCIÓN OBJETIVO CON PRIORIDADES DOMINANTES

4.3 FORMULACIÓN DE CASOS

## MAPA CONCEPTUAL



## INTRODUCCIÓN

La programación por metas es muy similar a la programación lineal, en la que existe una función objetivo (que puede ser maximización o minimización). La diferencia radica en que la programación de metas debe tener restricciones de meta, en lugar de restricciones de recursos.

Además, debe existir una evaluación de importancia entre las funciones objetivo. Este método se emplea con frecuencia para problemas con muchas metas o que no puedan evaluarse. Para ello el administrador debe decir cuál es su prioridad.

La programación de metas es flexible, ya que permite tratar con muchas variaciones de restricciones y de prioridad de metas. Así, se puede ver el problema desde diferentes perspectivas y hallar la mejor solución posible.

Anteriormente, programar por metas era trabajo únicamente de industrias; ahora, el campo de aplicación de esta técnica es más extenso usándose en economía, medio ambiente, salud, etcétera.

#### 4.1 ECUACIONES DE RESTRICCIONES Y DE METAS

Al igual que la programación lineal, en la programación por metas existen ecuaciones de restricciones, las cuales se deben formular de acuerdo con los objetivos de la empresa.

Por ejemplo, si una empresa desea producir por lo menos cuatro puertas, se debe formular  $P \geq 4$ ; es decir, debe producir cuatro puertas o más. Ahora, los objetivos de contribuciones o ganancias se formulan como deseos. Por ejemplo: ganar \$25,000 en el siguiente trimestre. Esto puede tener sesgo por encima de la meta o por debajo de la misma. Siguiendo con el ejemplo de las puertas, para fabricar tres tendríamos el siguiente algoritmo:

$P + F - E = 3$  donde la P son las puertas, la F, lo que falta para producirlas y E lo que excede para fabricarlas.

Ejemplo: Una empresa fabrica dos tipos de puerta: una rústica y una con acabados. Se obtiene una utilidad de \$45 en la rústica y \$65 en la puerta con acabados. Como la empresa sabe que existirá una fuerte demanda, sabe que puede vender todo lo que se produzca. Los requerimientos de tiempo se presentan a continuación:

DEPARTAMENTO	PUERTA		HORAS DISPONIBLES AL MES
	RÚSTICA	CON ACABADOS	
CORTE	2	6	70
TERMINACIÓN	2	2	50

CONTRIBUCIÓN	\$45	\$65	
--------------	------	------	--

La empresa desea maximizar sus utilidades, y cree que la utilidad diaria será de \$800. Por lo anterior, quiere determinar la cantidad de productos necesarios para lograr sus objetivos.

Para ello se debe formular un modelo de programación de metas que considere todos los aspectos, donde X es el número de puertas rústicas producidas por día, Y es el número de puertas con acabados producidas por

día,  $D1-$  es la cantidad debajo de la utilidad que se quiere alcanzar y  $D1+$  es la cantidad por arriba de la utilidad que se quiere alcanzar.

$$\text{Minimizar } Z = (D1-) + (D1+)$$

Sujeto a:

$$2X + 6Y = 70 \text{ (horas de corte).}$$

$$2X + 2Y = 50 \text{ (horas de terminación)}$$

$$45X + 65Y + (D1-) - (D1+) = 800 \text{ (utilidad perseguida) restricción meta}$$

$$X, Y, D1-, D1+ \geq 0$$

Cuando se utiliza la programación de metas  $D1-$ ,  $D1+$  van inmersas en la función objetivo y a ambas se les asignan pesos iguales, esto indica que la administración desea lograr la utilidad meta exactamente.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Investigue la historia y desarrollo de la programación de metas
2. Mencione cinco aplicaciones de la programación de metas

### 4.2 FUNCIÓN OBJETIVO CON PRIORIDADES DOMINANTES

Hay situaciones donde nos encontramos con metas múltiples; en ese caso es necesario definir la prioridad de cada una. El orden lo propone el administrador, según las necesidades, prioridades y los objetivos que persigue la empresa. Es necesario clasificar las metas en  $K$  rangos, y a las variables se les da un número de prioridad, de acuerdo con el orden de importancia; así el 1 será el más importante que se desea alcanzar.

Para construir la función objetivo se deben tomar en cuenta dos cosas: preguntarse si los objetivos son proporcionales o se pueden cuantificar, y definir la importancia de cada meta. Si las metas son cuantificables se puede aplicar una ponderación, brindándole un peso mayor al más importante para el administrador. No existe límite al asignar prioridad a las metas. En caso de



considerar a dos metas de igual importancia, es válido asignarle el mismo orden de prioridad.

Una característica de la programación de metas es que la solución del problema se da en orden de importancia. Primero se busca la optimización de la meta más importante y una vez alcanzada, se continúa buscando la optimización de la meta de menor importancia, hasta concluir con esta última.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Investigue la historia y desarrollo de la programación de metas
2. Mencione diez metas que se pueden presentar en una empresa, asígnele un orden según la importancia y explique los resultados

### 4.3 FORMULACIÓN DE CASOS

Considerando el ejercicio anterior, la empresa cree que la utilidad diaria será de \$800; además de esto, quiere utilizar todos los departamentos de acuerdo con las restricciones de tiempo. Aunado a lo anterior, es necesario reducir el tiempo ocioso.

Sujeto a:

$$2X + 6Y + (D2-) - (D2+) = 70 \text{ (horas de corte)}$$

$$2X + 2Y + (D3-) - (D3+) = 50 \text{ (horas de terminación)}$$

$$X, Y, D1-, D1+ \geq 0$$

$$\text{Minimizar } Z = \text{utilidad } (d1- + d1+) + \text{ tiempo ocioso } (d2- + d3-)$$

Dónde:

X = número de puertas rústicas producidas por día

Y = número de puertas con acabados producidas por día

D1- = cantidad abajo de la utilidad requerida

D1+ = cantidad arriba de la utilidad requerida

D2- = tiempo ocioso diario en el área de corte

D2+ = tiempo extra diario en área de corte

D3- = tiempo ocioso diario en el área terminación

D3+ = tiempo extra diario en el área de terminación

Ya que D1- y D1+ están inmersas en la función objetivo, el método tratará de que la utilidad diaria perseguida sea de \$800, minimizando el sesgo tanto por falta o por exceso (positivo y negativo). La meta de utilidad es la de mayor prioridad y la que sigue es el tiempo ocioso.

## ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. Formule las ecuaciones empleando la programación por metas del siguiente ejercicio:

Ejemplo: Una empresa fabrica dos tipos de espejos: cuadrados y redondos. Se obtiene una utilidad de \$32 en los espejos cuadrados y \$44 en los espejos redondos. Cada espejo pasa por una área de corte y una de enmarcado. El espejo cuadrado necesita tres horas en el área de corte y tres horas en el de enmarcado. El espejo redondo necesita cuatro horas en el área de corte y una hora en el área de enmarcado. El área de corte dispone de setenta horas a la semana y el área de enmarcado dispone de sesenta y cinco horas. La empresa desea obtener una utilidad diaria de \$950; además quiere utilizar las áreas de acuerdo con las restricciones de tiempo. Por ello, es necesario reducir el tiempo ocioso.

## AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: subraye la respuesta correcta:

1. ¿En qué consiste la programación de metas?
  - a) Programar en función de las metas.
  - b) Programar las restricciones.
  - c) Programar recursos.
  - d) Programar recursos humanos y financieros con certidumbre.
  
2. ¿Qué diferencia hay entre la programación lineal y la programación de metas?
  - a) En la programación lineal se programan restricciones y en la programación de metas se programan metas.
  - b) En la programación lineal se programan recursos y en la programación de metas se programan metas.
  - c) En la programación lineal se programan objetivos y en la programación de metas se programan metas.
  - d) En la programación de metas se establecen metas a corto plazo y en la programación lineal a largo plazo.
  
3. ¿Se puede emplear la programación de metas en la industria?
  - a) Sí
  - b) No
  - c) A veces
  - d) Sólo en algunas ocasiones.
  
4. ¿En la programación de metas se usan ecuaciones de restricción?
  - a) Sí
  - b) No
  - c) A veces
  - d) Sólo en algunas ocasiones.

5. ¿Por qué se debe dar prioridad a las metas?
- a) Porque se tienen dos metas que perseguir.
  - b) Porque eso permite aumentar la seguridad.
  - c) Porque en ocasiones se tienen metas múltiples.
  - d) Porque las metas son lo básico de una empresa para tener éxito.
6. Es una característica de la programación de metas
- a) Calcular metas
  - b) La solución del problema se da en orden de importancia.
  - c) Se utilizan variables no enteras.
  - d) Utiliza variables enteras.

## HOJA DE RESPUESTAS

Preguntas	Respuestas			
	(a)	(b)	(c)	(d)
1	X			
2		X		
3	X			
4	X			
5			X	
6		X		