Matemáticas II

JOSE DANIEL BECERRA GÜEMES

Red Tercer Milenio

MATEMÁTICAS II

JOSE DANIEL BECERRA GÜEMES

RED TERCER MILENIO

AVISO LEGAL

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Datos para catalogación bibliográfica

José Daniel Becerra Güemes

Matemáticas II

ISBN 978-607-733-146-9

Primera edición: 2012

Revisión pedagógica: Aurora Leonor Avendaño Barroeta

Revisión editorial: Ma. Eugenia Buendía López

DIRECTORIO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

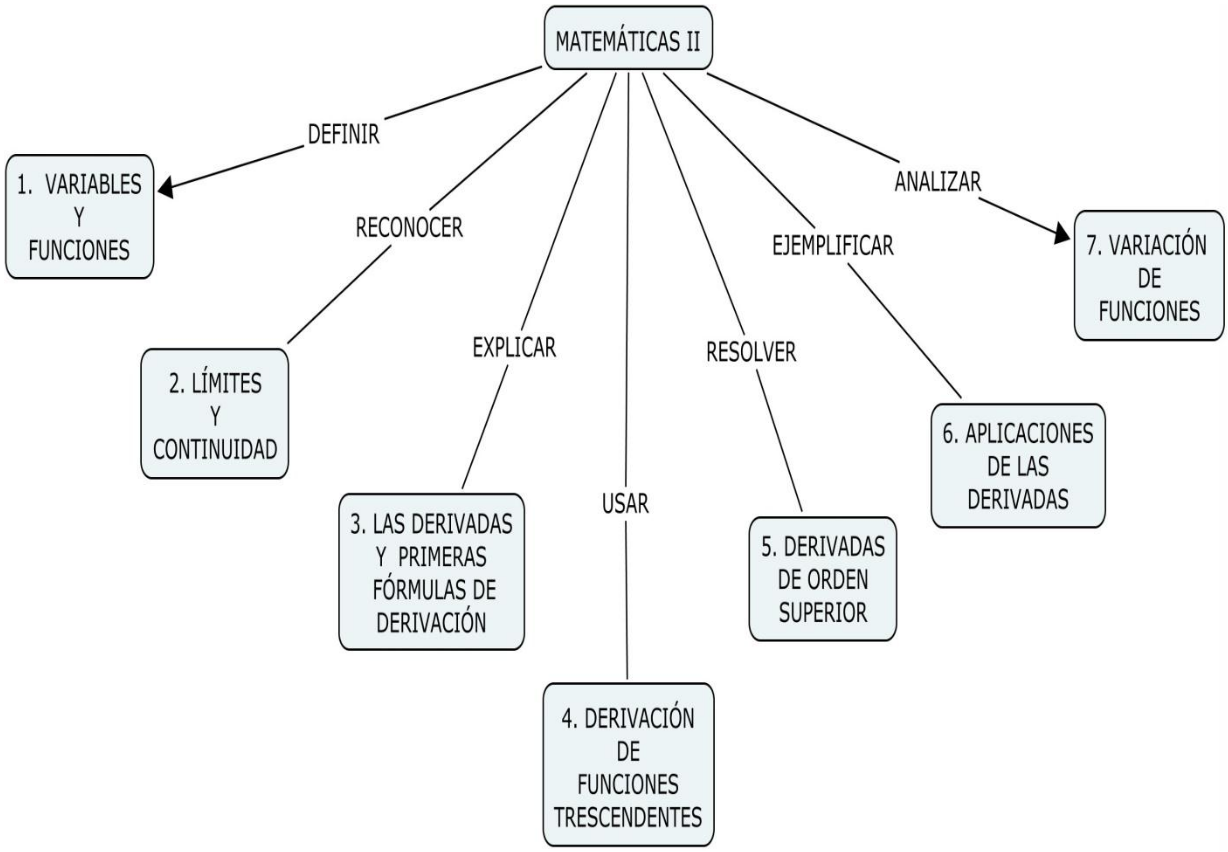
En este libro de matemáticas II, se expondrán paso a paso siete temas y sus correspondientes subtemas; comienza con la descripción del concepto de conjunto y detalla temas como: relación matemática, función, límites y continuidad; se indica la forma de obtener las derivadas desde una función, hasta obtener la fórmula tal como se conoce; describe la manera de emplear las fórmulas ya establecidas para obtener las derivadas; y conforme avancen los temas, se podrán obtener derivadas simples, derivadas de orden superior, y se aplicarán y demostrarán teoremas empleando las derivadas.

Este libro pretende simplificar al máximo los temas expuestos, intentando dar un sentido práctico, al relacionar los temas con situaciones cotidianas; pero siempre con la premisa de proporcionar al estudiante el conocimiento necesario que marca el programa.

OBJETIVO GENERAL DE APRENDIZAJE

El estudiante reconocerá los conceptos básicos de los elementos de variación en funciones; aplicará las derivadas para resolver problemas relacionados con su desempeño profesional.

MAPA CONCEPTUAL GENERAL



UNIDAD 1

VARIABLES Y FUNCIONES

OBJETIVO

Definir, describir y aplicar las distintas funciones, así como reconocer sus diferentes elementos.

TEMARIO

1.1 CONJUNTO PRODUCTO

1.2 RELACIONES BINARIAS

1.3 FUNCIÓN DE UNA O VARIAS VARIABLES REALES

1.4 DOMINIO Y CONTRADOMINIO

1.5 INTERVALOS ENTORNADOS

1.6 CLASES DE VARIABLES

1.7 FUNCIONES ALGEBRAICAS

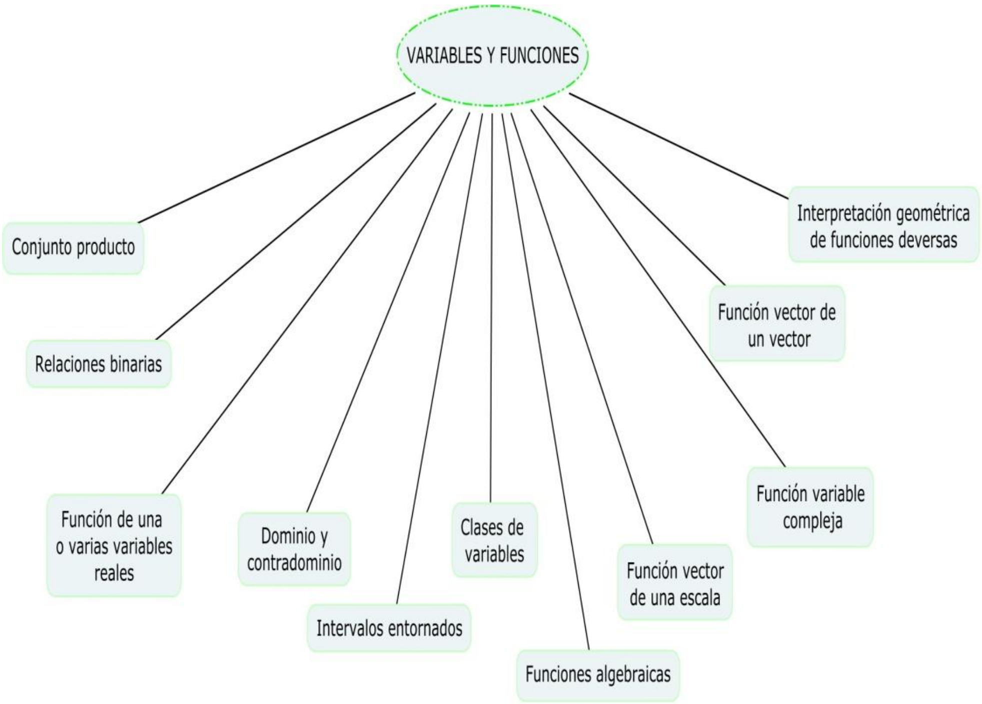
1.8 FUNCIÓN VECTOR DE UNA ESCALA

1.9 FUNCIÓN VARIABLE COMPLEJA

1.10 FUNCIÓN VECTOR DE UN VECTOR

1.11 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE FUNCIONES DIVERSAS

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCION

En general, casi todo lo que el hombre ha construido, se puede descomponer en elementos primarios o en herramientas fundamentales, con las cuales se construyen otras más complejas.

En el cálculo diferencial e integral, las herramientas básicas o conceptos fundamentales son: variable, función y límite. En esta unidad, se abordarán los primeros dos conceptos, el límite se explicará en unidades posteriores cuando se hayan establecido las bases.

En casi todas las actividades, el hombre intenta relacionar (o hacer corresponder) los elementos de un conjunto con los de otro. Esta idea da lugar al estudio matemático de las relaciones y funciones, que es el tema central de esta unidad, en la que se detallarán además, la definición formal de función, las operaciones fundamentales que se pueden hacer con ellas y algunas características de ciertas funciones.

1.1 Conjunto producto

Generalmente, el término *conjunto* se asocia con la idea de agrupar objetos, por ejemplo, un conjunto de discos, de libros, de plantas, etc., es decir el concepto de conjunto denota una colección de elementos, que guardan alguna característica en común.

En matemáticas, una forma de representar los conjuntos es mediante letras mayúsculas, y sus elementos se delimitan con llaves y se separan con comas. Así, por ejemplo:

a) El conjunto de las vocales.

A = { a, e, i, o, u }

b) El conjunto de los números naturales mayores a 0 y menores a 4.

B = { 1, 2, 3 }

Para definir el producto conjunto, es necesario recordar que una pareja ordenada es un esquema en el que un elemento "x" de un conjunto, está relacionado con un elemento "y" de otro conjunto, así entonces una pareja ordenada se escribirá de la siguiente manera: (x, y), donde "x" pertenece al primer conjunto mientras que "y" pertenece al segundo conjunto. Por lo tanto, el conjunto de todas las parejas ordenadas que es posible establecer entre cada uno de los elementos de dos conjuntos (A y B) se le conoce como conjunto producto o producto cartesiano de A y B, y se indica como A x B.

Ejemplo:

1) Obtener el conjunto producto A x B, si:

A = { 1, 2, 3 } y B = { a, b, }

Solución:

A x B = { (1,a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) }

2) Obtener el conjunto producto B x A, si:

A = { 1, 2, 3 } y B = { a, b, }

Solución:

B x A = { (a,1), (a, 2), (a,3), (b, 1), (b, 2), (b, 3) }

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1) Crear el conjunto A y el conjunto B

2) Obtener el producto conjunto A x B

1.2 Relaciones binarias

Al escuchar el término de *relación* es inevitable considerar dos partes, y una asociación entre ellas, por ejemplo, a una persona se le puede asociar edad, estatura, peso, etc.; a un automóvil se le asocia modelo, número de motor, número de placas; a cada país se le asocia superficie, clima, moneda, etc. Por lo tanto, “una relación establece la correspondencia o asociación entre los elementos de dos conjuntos”.[1]

Entonces, una relación binaria es la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos pero expresada en parejas ordenadas.

Ejemplo:

1) Relación existente entre país (conjunto A) y su capital (conjunto B):

País *Capital*

Canadá → Ottawa

E.U. → Washington

Francia → París

- Relación binaria: { (Canadá, Ottawa), (E.U., Washington), (Francia, París) }

2) Relación entre la marca de un automóvil y su país de origen:

Automóvil *País de origen*

Fiat → Italia

Renault → Francia

Citröen ↗

- Relación binaria: { (Fiat, Italia), (Renault, Francia), (Citröen, Francia) }

[1] Conamat, *Matemáticas simplificadas,* p. 1110

3) Relación que existe entre un país y el idioma:

País	*Idioma*
Francia	Francés
Canadá	
Inglaterra	Inglés

- Relación binaria: { (Francia, francés), (Canadá, francés), (Canadá, inglés), (Inglaterra, inglés) }

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1) Crear el conjunto A y el conjunto B, y establecer una relación entre ellos.
2) Obtener la relación binaria entre estos dos conjuntos.

1.3 Función de una o varias variables reales

En matemáticas, una variable es un símbolo o letra, que representa el conjunto de valores que puede tomar una determinada magnitud, es decir, es un número que todavía no se conoce y está representado por una letra.

Como ejemplo, se puede considerar la fórmula del área de una circunferencia: A = ¶r^2 se debe recordar que ¶=3.1416 y que el 2 representa una potencia, entonces hay dos letras (A y r) que tienen un número que aún no se conoce, es decir son variables.

Una función es una relación en la que a cada elemento del dominio (x) corresponde **uno y sólo un** elemento del contradominio (y).

Es importante señalar que toda relación es una función, pero ninguna función es relación.

Ahora, si se consideran los tres ejemplos del tema 1.2:

El ejemplo 1 es claramente una función, ya que para cada elemento del primer conjunto (dominio), sólo hay una respuesta en el segundo conjunto (contradominio).

El ejemplo 3, indica una relación, ya que para el elemento del dominio Canadá existen dos respuestas: francés e inglés, por lo que hay más de uno y sólo un elemento del contradominio.

El ejemplo 2 ¿será relación o función? Al analizar y recordar que una función debe considerar sólo una respuesta para cada elemento del dominio, se puede determinar que es una función, ya que para el elemento Renault sólo hay uno y sólo un elemento: Francia, y para el elemento Citröen sólo hay uno y sólo un elemento: Francia.

Para considerarse una función sólo puede existir una sola respuesta, aun cuando esta respuesta sea compartida.

Si en una función al dominio se le denomina conjunto A y al contradominio conjunto B, entonces la función se simboliza: $f = A \rightarrow B$

Una función se denota o escribe como: $y = f(x)$

Ejemplo 1:

$$y = 5x^2$$

Solución: Como se indicó, la forma de denotar una función es: $y = f(x)$, por lo que el ejemplo queda de la siguiente manera:

$$f(x) = 5x^2$$

f(x) al igual que x, son variables, por lo que si se da valor a x, se obtendrá un valor para f(x); al pensar en un número al azar, por ejemplo x=1.

Donde exista x, se substituirá por el valor numérico 1, quedando entonces:

$$f(1) = 5(1)^2$$

Se indica f(x) = f(1) para sobreentender que el valor que se obtenga en *y,* está en función del valor que se dio a x, que en este caso fue 1.

Al resolver operaciones queda:

$$f(1) = 5$$

Como $y = f(x)$, entonces $y = 5$.

Por lo tanto, si x=1, *y*=5.Al recordar que un par ordenado es una coordenada (x, y), si se analiza, el conjunto solución para este ejemplo es: f={(1, 5)}.

El conjunto par ordenado es una forma de representar una función.

Ejemplo 2:

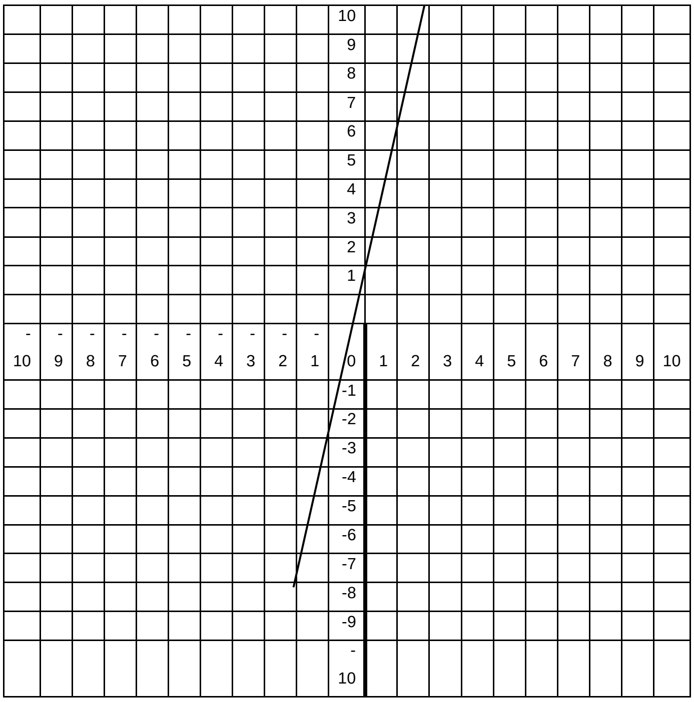
$$y = 5x$$

Ahora, si se dan más valores a x, por ejemplo: $-2 \leq x \leq 2$.

Como son más valores se sugiere usar otra forma de representar una función, es decir, mediante una tabla.

x	f(x) = 5 x	Par ordenado
2	f (2) = 5 (2) = 10	(2, 10)
1	f (1) = 5 (1) = 5	(1, 5)
0	f (0) = 5 (0) = 0	(0, 0)
-1	f (-1) = 5 (-1) = -5	(-1, -5)
-2	f (-2) = 5 (-2) = -10	(-2, -10)

Otra forma de representar una función es mediante una gráfica, considerando el conjunto par ordenado se tiene:



ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Investiga la fórmula del área de un triangulo equilátero e identifica las variables.

2.- Elabora un ejemplo (que no contenga números) de relación y otro de función y justifica porque es relación o función.

3.- Dada la función $f(x) = x^2 - 1$ representa la función como:

a) Tabla
b) Conjunto par ordenado
c) Gráfica

1.4 Dominio y contradominio

Como ya se definió, una relación es la correspondencia entre dos conjuntos; hasta ahora se mencionó el conjunto A y B o conjunto B y A.

El dominio se refiere a todos los valores de los elementos del primer conjunto, el resultado de la relación establecida entre ambos conjuntos se le conoce como *contradominio o codominio*.

Si se considera el ejemplo 1 del tema anterior:

1) Relación que existe entre un país (conjunto A) y su capital (conjunto B):

País — *Capital*
Canadá → Ottawa
E.U. → Washington
Francia → París

- Relación binaria: { (Canadá, Ottawa), (E.U., Washington), (Francia, París) }

Conforme a lo establecido, se puede expresar claramente que los países correspondientes al conjunto A pertenecen al dominio (x), mientras que las capitales (conjunto B) son el contradominio (y).

En el conjunto de par ordenado, el dominio son todos los elementos antes de la coma: Canadá, E.U., Francia, y el contradominio, son todos los elementos después de la coma: Ottawa, Washington, París.

Ahora, se considerará el ejemplo 3 del tema anterior:

2) Relación que existe entre un país y el idioma:

País — *Idioma*
Francia → Francés
Canadá → Francés
Canadá → Inglés
Inglaterra → Inglés

- Relación binaria: { (Francia, francés), (Canadá, francés), (Canadá, inglés), (Inglaterra, inglés) }

El dominio (x) es: Francia, Canadá, Inglaterra.

El contradominio o codominio (y) es: francés, inglés.

Es importante distinguir, que si se requiere definir el dominio y contradominio, dado un conjunto de par ordenado (x, y), si se repitieran los elementos, sólo se mencionan una sola vez, como en este caso con Canadá.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1) Dado el conjunto par ordenado: A= {(1, 1), (1, 2), (1,3), (2, 2), (2, 3)} Identifica el dominio y el contradominio.

1.5 INTERVALOS ENTORNADOS

Un intervalo es el espacio que existe entre dos límites o extremos, a los cuales se denominará a y b. Estos intervalos se clasifican en:

- *Intervalo abierto:* Es aquel que no incluye los límites o extremos y matemáticamente se denota de forma:

$$a < x < b \quad \text{o} \quad (a, b)$$

- *Intervalo cerrado*: Es aquel que incluye los límites y matemáticamente se denota de forma:

$$a \leq x \leq b \quad \text{o} \quad [a, b]$$

- *Intervalo semiabierto por la izquierda:* Es el conjunto de los números reales mayores que a y menores o iguales que b, se denota de forma:

$$a < x \leq b \quad \text{o} \quad (a, b]$$

- *Intervalo semiabierto por la derecha:* Es el conjunto de los números reales mayores o iguales que a y menores que b, se denota de forma:

$$a \leq x < b \quad \text{o} \quad [a, b)$$

- *Intervalos en el infinito:*
    - Al conjunto de todos los números reales de la variable x tal que: x es mayor que a, se representa por:

      $$(x > a)$$

      Para este caso, los valores permitidos, son todos aquellos a la derecha del número designado.
    - Al conjunto de todos los números reales tal que x es menor que b, se representa por:

$$(x < b)$$

Para este caso, los valores permitidos, son todos aquellos a la izquierda del número designado.

- Al conjunto de todos los números reales, tal que x es mayor o igual que a, se representa por:

$$[a, \infty)$$

- Al conjunto de todos los números reales, tal que x es menor o igual que b, se representa por:

$$(-\infty, b]$$

- Al conjunto de todos los números reales, se representa por:

$$(-\infty, \infty)$$

Por el uso de paréntesis, es muy común pensar que se trata de un par ordenado, sin embargo, un intervalo indica los valores que se designan al dominio, sólo se trata de valores ubicado en el eje horizontal o de las x.

Cuando se indique un intervalo abierto o se use el paréntesis, se debe entender que el número referido no es incluido dentro del intervalo, mientras que en un intervalo cerrado o uso de corchete si se contempla, como ejemplo estos dos casos:

Caso 1

Obtener el par ordenado de la función: $f(x)=3x$ para $-1 \leq x \leq 1$ o $[-1, 1]$

Para este caso se desarrollaría la siguiente tabla:

X	f(x) = 3 x	Par ordenado
1	f (1) = 3 (1) = 3	(1, 3)
0	f (0) = 3 (0) = 0	(0, 0)
-1	f (-1) = 3 (-1) = -3	(-1, -3)

Caso 2

Obtener el par ordenado de la función: $f(x)=3x$ para $-1<x<1$ o $(-1, 1)$

Para este caso se desarrollaría la siguiente tabla:

x	f(x) = 3 x	Par ordenado

0	f (0) = 3 (0) = 0	(0, 0)

Por lo tanto, en un intervalo cerrado se debe considerar el valor mayor y menor, mientras que en un intervalo abierto, se contemplan valores anteriores a los designados.

Un intervalo también se puede representar gráficamente. Esto es, sobre una recta numérica en el eje de las x, colocando en el número correspondiente un paréntesis o corchete según sea el caso.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Ejemplifica funciones donde se observe un intervalo abierto, cerrado, semiabierto por la derecha y semiabierto por la izquierda.

2.- Grafica un ejemplo de cada uno de los intervalos aprendidos.

1.6 CLASES DE VARIABLES

Una ecuación se conforma de números y letras, por ejemplo:

$$y = 5ax^2$$

- *Constante absoluta o numérica*: Es aquella cuyo valor nunca cambia, es decir, conserva su valor en cualquier situación, en este caso es el número: 5
- *Constante arbitraria o parámetro*: Es aquella a la cual se le pueden atribuir valores diferentes y que sólo en determinada situación permanecerá constante el valor asignado, es decir, son cantidades en las que cambia el valor de un ejercicio a otro, pero a lo largo del ejercicio no cambia, en este caso: a
- *Variable independiente o argumento*: En una ecuación, es la segunda variable a la cual se le asignan valores a voluntad, dentro de los límites que se señale, en este caso: x
- *Variable dependiente o función:* En una ecuación, es la primer variable cuyo valor se determina al asignarle un valor especifico a la variable dependiente, en este caso y o f(x).

Ejemplo:

De acuerdo con la fórmula del área de una circunferencia: A=¶r^2

¶: es la constante absoluta, ya que siempre será la misma.

2: es también constante absoluta, por la misma razón.

r: es la variable dependiente, ya que se le puede dar el valor que se desee.

A: es la variable dependiente, ya que el resultado está en función de los valores que se otorguen a la variable dependiente (r).

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Ejemplifica cinco casos diferentes, y señala la variable dependiente e independiente, constante absoluta y arbitraria.

1.7 FUNCIONES ALGEBRAICAS

Por la información que se obtiene de una función, se clasifican en:

1. Algebraicas o trascendentes.
2. Continuas o discontinuas, dependiendo si existe una continuidad en su trazo o una intermitencia.
3. Crecientes o decrecientes, dependiendo del comportamiento de su representación gráfica.

Una función es algebraica, cuando emplea operaciones con términos algebraicos.

- Función constante: $y = a$
- Función lineal: $y = mx + b$
- Función cuadrática: $y = ax^2 + bx + c$
- Función cúbica: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$
- Función racional: $f(x) = 1 / x$
- Función irracional: $f(x) = 1 / x^{1/2}$

Las funciones algebraicas pueden ser:

- *Explícitas:* Es cuando la función está en términos de una variable, por ejemplo:

  $y = x^2$ $\qquad f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x} - 1$

- *Implícitas:* Es cuando ambas variables forman parte de la ecuación, por ejemplo:

  $x^2 - 8y + 16 = 0$ $\qquad x^3 + y^2 - 3x = 0$

El valor real f(x) de una función es aquel que toma *y* cuando se asigna a *x* un determinado valor real.

Ejemplo 1

Obtener f(-3) para $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

Solución:

Como f(-3)=f(x), significa que donde se encuentre la variable x se substituirá por el valor determinado de -3

$f(-3) = 3(-3)^2 - 5(-3) - 2$

$f(-3) = 3\ (9)\ +\ 15\ -2$

$f(-3) = 27 + 13$

$f(-3) = 40$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Obtener f(5) para los tres ejemplos mencionados de funciones explícitas.

2.- Si $f(x) = \dfrac{3x-1}{5-x}$, encontrar $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$

1.8 Función vector de una escala

Una curva C en el plano se puede definir como un conjunto de pares ordenados (f (t), g (t)) junto con unas ecuaciones paramétricas:

$$x = f(t) \quad ; \quad y = g(t)$$

Donde: f y g son funciones continuas de t en un intervalo I.

De forma similar, se define que una curva C en el espacio es un conjunto de ternas ordenadas (f (t), g (t), h (t)) junto con unas ecuaciones paramétricas:

$$x = f\,(t)i\ ,\ y = g\,(t)j\ \text{y}\ z = h\,(t)k$$

Donde: f , g y h denotan funciones continuas de t en un intervalo I.

Las funciones vectoriales, asignan a números reales vectores, es decir, son funciones con valores vectoriales.

Se denomina función vectorial a cualquier función de la forma:

$$r\,(t) = (\ f(t)i,\ \ g(t)j\ ) \qquad < \text{Plano} >$$

$$r\,(t) = (\ f(t)i,\ \ g(t)j\ ,\ h(t)k\ ) \quad < \text{Espacio} >$$

Donde las funciones componentes f, g y h son funciones del parámetro t con valores reales. Este concepto se puede generalizar a espacios n dimensionales.

Es común usar la letra *t* para la variable independiente de las funciones vectoriales porque en muchas aplicaciones representa el tiempo.

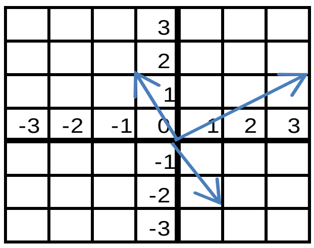
Ejemplo:

Dada la función $r(t) = (\ t + 1\ )i + (r^2 – 2\ )j$ ubicar los vectores considerando t(2), t(0) y t(-2)

$r(2) = (\ (2) + 1\ )i + ((2)^2 – 2\ )j = 3i + 2j$; (3, 2)

$r(0) = (\ (0) + 1\ )i + ((0)^2 – 2\ )j = 1i - 2j$; (1, -2)

$r(-2) = (\ (-2) + 1\ )i + ((-2)^2 – 2\ )j = -i + 2j$; (-1, 2)



Por lo tanto, en este tipo de funciones además de la magnitud, se considera dirección y sentido.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Elabora tres ejemplos de función vectorial y grafica.

1.9 FUNCIÓN VARIABLE COMPLEJA

Los números imaginarios o complejos, son aquellos que no se encuentran dentro del conjunto de los números reales. Son la raíz negativa de un número y se representan por la literal i; de aquí se determina que $\sqrt{-1} = i$; de donde, como ya se mencionó, i es el número imaginario o complejo, por ejemplo:

a) $\sqrt{-9} = \sqrt{(9)(-1)} = \sqrt{9}\sqrt{-1} = \pm 3i$

b) $\sqrt{-13} = \sqrt{(13)(-1)} = \sqrt{13}\ \sqrt{-1} = i\sqrt{13}$

La representación gráfica de un número complejo es la letra z. Un número complejo z, se compone por dos términos: uno con característica real, y el otro con una característica compleja; de forma general:

$$Z = a + bi$$

Aquí se debe mencionar que a es la parte real y b la parte compleja.

> Dada una función de variable compleja, w = f(z), no es posible representar, a la manera clásica, la gráfica de esta función, pues tanto los valores de la variable independiente z como de la función son puntos en un plano. Para representar las funciones de variable compleja se utilizan dos gráficas: en una se sitúan los puntos (z) correspondientes a la variable independiente y en la otra los puntos (w) obtenidos con la función.
>
> Esta forma de representar la función se puede entender la función (f) como la transformación que se produce al aplicar a los puntos de origen la función.
>
> Sea la función $w = z + A$.
>
> Expresando A y z en forma binaria:
>
> $A=a_1 +ia_2$
>
> $z = z_1 + iz_2$
>
> Entonces $w = (a_1 + z_1) + i(a_2 + z_2)$[2]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Calcula la raíz cuadrada de los siguientes números imaginarios:

a) $\sqrt{-49}$

b) $\sqrt{-5}$

[2] http://www.telefonica.net/web2/lasmatematicasdemario/Analisis/Funciones/FunComp.htm

c) √ (-4 / 5)

2.- Elabora tres ejemplos de números complejos conjugados y grafica.

1.10 Función vector de un vector

Es una aplicación que asocia un número real a todo punto del espacio, cada uno de los puntos del espacio, donde la función toma los valores, está descrito por un vector, de tal manera que constituye un campo escalar.

De forma física, estas funciones representan las características de una medición obtenidas en un plano tridimensional. En otras palabras, una función vector de un vector se define como el resultado de la asociación de dos funciones vectoriales de variables vectoriales.

Una función vectorial es una regla que a cada vector $\vec{x}$ de *Rn* le asigna como imagen otro vector $\vec{f}(x)$ de *Rm.*

Ejemplo:

f(x,y) = (x + y, -x,y)

f(1,2) = (1+2, -1,2) = (3, -1,2)

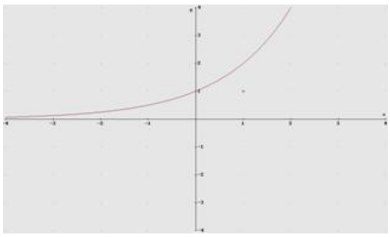
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Elabora tres ejemplos de función vector de un vector.

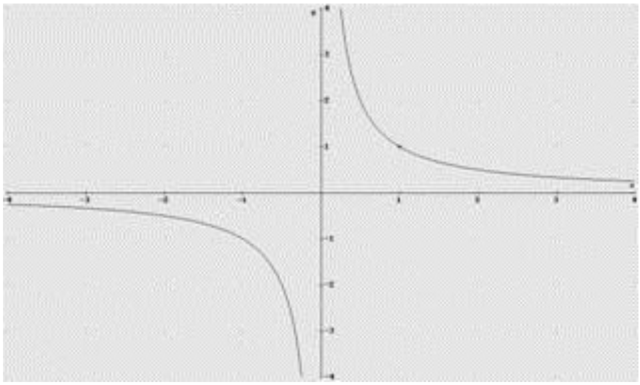
1.11 Interpretación geométrica de funciones diversas

Según su comportamiento, una función puede ser:

Continua: Cuando se realiza el trazo y éste no sufre ningún corte o intermitencia.



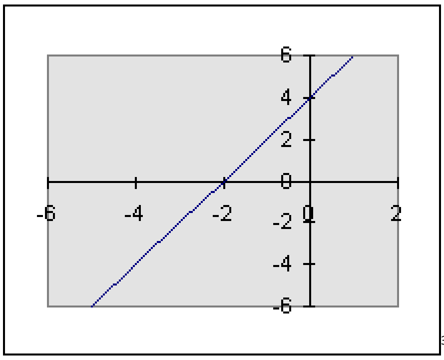
- *Discontinua:* Si no se cumplen las características de la continuidad.



Según su monotonía una función puede ser:

- *Creciente:* Se dice que f(x) es una función creciente en un intervalo I, si:

$x_1 < x_2$ mientras que $f(x_1) < f(x_2)$



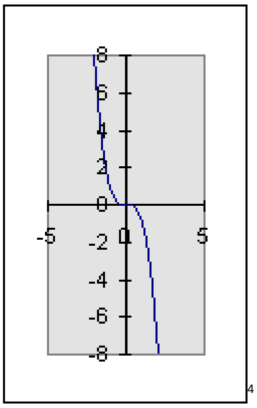
[3]

La función f(x) = 2x + 4 es una función creciente en los números reales.

- *Decreciente:* f(x) es una función decreciente en un intervalo I, si:

$x_1 < x_2$ mientras que $f(x_1) > f(x_2)$

[3] http://bc.inter.edu/facultad/ntoro/grafw.htm

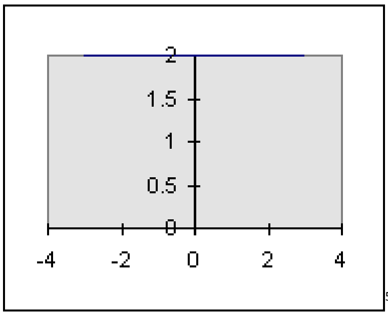


[4]

La función $g(x) = -x^3$ es una función decreciente en los números reales.

Existen comportamientos que por su propia característica se consideran especiales, éstos son:

- *Función constante:* Está definida por f(x) = c, donde c es un número real cualquiera. Su gráfica es una línea recta horizontal paralela al eje x.

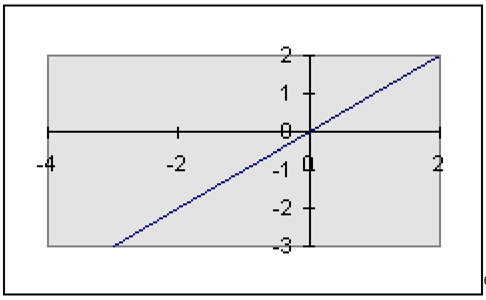


[5]

La función h(x) = 2 es una función constante en los números reales.

- *Función de identidad:* Es una función que está definida por f(x) = x, su característica principal es que los valores de sus pares ordenados son iguales, es decir, el valor de x es igual al de y.

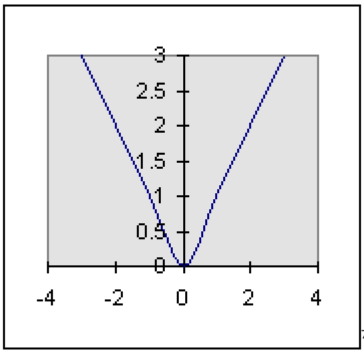
[4] http://bc.inter.edu/facultad/ntoro/grafw.htm
[5] http://bc.inter.edu/facultad/ntoro/grafw.htm



[6]

La función identidad es la función de la forma f(x) = x. El dominio y el recorrido es el conjunto de los números reales.

- *Función valor absoluto:* El valor absoluto se define como la distancia que existe entre 0 y el número en cuestión, que siempre da como resultado un valor positivo. Se representa como I x I.



[7]

La función $f(x) = |x|$ es la función valor absoluto de x. El dominio es el conjunto de los números reales y el recorrido es el cero y los números reales positivos.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Investiga en varios libros y selecciona un ejemplo de cada una de las representaciones gráficas de función descritas.

---

[6] http://bc.inter.edu/facultad/ntoro/grafw.htm
[7] http://bc.inter.edu/facultad/ntoro/grafw.htm

AUTOEVALUACION

Subraya el inciso con la respuesta correcta:

1. Si se tiene el conjunto A={0, 1} y el conjunto B={y, z}, el producto BxA da como resultado:

a) ((0, y), (0, z), (1, y), (1, z))	b) ((0, y), (1, z))	c) ((y, 0), (y, 1), (z, 0), (z, 1))	d) ((0, y), (0, z), (z, 0), (z, 1))

2. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de par ordenado representa una relación?

a) ((2, 1),(1, 3))	b) ((2, 2), (1, 1)	c) Ninguno de los dos	d) Los dos

3. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de par ordenado representa una función?

a) (1, 2), (2, 2), (3, 2)	b) (1, 1), (1, 2), (1, 3)	c) (a, 1), (b, 2), (a, b)	d) Ninguno de los tres

4. ¿Cuál es la definición de función matemática?

a) Correspondencia entre dos conjuntos.	b) Relación entre dos conjuntos, en la cual para cada elemento de x corresponde uno y sólo uno de y.
c) Relación entre dos conjuntos en la cual para cada elemento de y corresponde uno y sólo uno de x.	d) Actividad de mostrar algo.

5. Es la representación matemática de un intervalo abierto:

a) (a, b)	b) [a, b]	c) a≤ x ≤ b	d) -1 > x < 1

6. El dominio de la función $y = 4x – 3$, para $f(2)$ es:

a) 5	b) 2	c) y	d) f(x)

7. Dada la fórmula del área de un círculo A = ¶r^2, la constante absoluta es:

a) ¶	b) r	c) A	d) Ninguna

8. ¿Cuál de los siguientes casos ejemplifica una función implícita?

a) $f(x)= 5x^3 + 3$	b) $y = 3x^2$	c) $y = \frac{3x^2 + 2}{x - 2}$	d) $x^2 + y = 0$

9. Es la representación matemática de un número imaginario:

a) $\sqrt{\ } - i = 1$	b) $– i = 1$	c) $i = \sqrt{-1}$	$i = \sqrt{1}$

10. Dada la función $f(x) = 2x^3$, si $-1 \leq x \leq 1$, el conjunto par ordenado es:

a) (-2, -1), (0, 0), (2, 1)	b) (-1, -2), (0, 0), (1, 2)	c) (-1, 2), (0, 0), (1, -2)	d) No es una función

RESPUESTAS

1.- c

2.- d

3.- a

4.- b

5.- a

6.- b

7.- a

8.- d

9.- c

10.- b

UNIDAD 2

LÍMITES Y CONTINUIDAD

OBJETIVO

Enunciar, expresar y ejemplificar el concepto de límite, límites laterales y su continuidad.

TEMARIO

2.1 LÍMITES DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE REAL INDEPENDIENTE

2.2 LÍMITES LATERALES, REITERADOS Y DOBLES PARA UNA FUNCIÓN DE DOS O MÁS VARIABLES REALES INDEPENDIENTES

2.3 LÍMITE DE LAS FUNCIONES CONSTANTES E IDENTIDAD

2.4 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

2.5 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO, EN UN INTERVALO O EN UNA REGIÓN

2.6 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

2.7 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTOR DE UN ESCALAR

2.8 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTOR DE UN VECTOR

MAPA CONCEPTUAL

INTRODUCCION

Es importante entender el concepto de límite desde la experimentación cotidiana, para que la comprensión en el ámbito matemático se facilite.

El concepto de límite es un hecho fundamental en las matemáticas, y es la base en la que se sustentan otras ideas como la derivada y la integral.

Esta unidad tiene como finalidad entender el concepto de límite en el entorno matemático, desde su aplicación hasta conocer e implementar teoremas o principios, que ofrezcan una guía para la solución de problemas que se generen en una, dos y hasta tres dimensiones.

Seguramente, te ha ocurrido que al dividir algún número entre cero, tu calculadora marca error; este es un caso particular denominado discontinuidad, que se podrá comprender al estudiar el concepto de continuidad, y mediante los límites laterales, se puede conocer en qué punto se genera este salto.

2.1 LÍMITES DE UNA FUNCIÓN DE UNA VARIABLE REAL INDEPENDIENTE

El concepto de límite es un hecho fundamental en las matemáticas, y es la base sobre la que se sustentan otras ideas fundamentales como las derivadas y la integral.

> El límite de una función real de variable real con regla de correspondencia *y=f(x)* cuando la variable independiente *x* tiende a un valor fijo *a*, es el valor L, hacia el cual tiende la función, se denota:
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$
>
> Que se lee: el límite de *f(x)* cuando *x* tiende a *a* es igual a L.
> Significa que cuando *x* está muy cerca de *a*, la función y = *f(x)* está muy cerca de L.[8]

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} (3x + 2)$

Solución: La flecha que sale de *x,* indica que existe una tendencia, es decir, hay que designar valores cada vez más cercanos a éste (en este caso: 3), cuando se indica cercano, se hace referencia a: décima, centésima, milésima y diezmilésima. Para una mejor apreciación se recomienda hacer una tabla:

X	f(x) = 3x + 2
3.1	f(3.1) = 3 (3.1) + 2 = 11.3
3.01	f(3.01) = 3 (3.01) + 2 = 11.03
3.001	f(3.001) = 3 (3.001) + 2 = 11.003
3.0001	f(3.0001) = 3 (3.0001) + 2 = 11.0003
$x \to 3$	$y \to 11$

Se puede observar que mientras más se acerca el valor de *x* a 3, más se acerca el valor de la función y=*f(x)* a 11.

[8] www.uaemex.mx/.../PRIMERA_FASE_EJERCICIOS_CAL.pdf

Por lo tanto, el resultado de $\lim_{x \to 3} (3x + 2) = 11$

Que se lee: el resultado de la función 3x+2 cuando *x* tiende a 3 es igual con 11.

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} (3x / 2)$

x	f(x) = 3x / 2
3.1	f(3.1) = 3 (3.1) / 2 = 4.65
3.01	f(3.01) = 3 (3.01) / 2 = 4.515
3.001	f(3.001) = 3 (3.001) / 2 = 4.5015
3.0001	f(3.0001) = 3 (3.0001) / 2 = 4.5001
$x \to 3$	$y \to 4.5$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1) Indica con tus palabras lo que entiendes por límite.
2) Investiga cinco ejemplos de límites y desarrolla el resultado.

2.2 Límites laterales, reiterados y dobles para una función de dos o más variables reales independientes

El límite en el cual se asignan valores sucesivamente cada vez más cercanos al valor hacia el cual tiende *x*, pero mayores, se denomina *límite lateral por la derecha*:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad \text{o} \quad \lim_{x \to a} f(x)$$

El límite en el cual se asignan valores sucesivamente cada vez más cercanos al valor hacia el cual tiende *x*, pero menores, se denomina *límite lateral por la izquierda:*

$$\lim_{x \to a^-} f(x)$$

Ejemplo: Calcular el límite lateral izquierdo y derecho de la función $2x^2+3$ cuando *x* tiende a 2

El límite lateral izquierdo: $\lim_{x \to 2^-} (2x^2+3)$

X	$f(x) = 2x^2 + 3$
1.9	$f(1.9) = 2(1.9)^2 + 3 = 10.2200$
1.99	$f(1.99) = 2(1.99)^2 + 3 = 10.9202$
1.999	$f(1.999) = 2(1.999)^2 + 3 = 10.9920$
1.9999	$f(1.9999) = 2(1.9999)^2 + 3 = 10.9992$
$x \to 2$	$y \to 11$

Es importante señalar que el signo negativo a la derecha del número al que tiende *x*, indica que se tomarán valores cercanos menores, de ninguna manera se debe confundir este signo como indicación de un número negativo.

El límite lateral derecho : $\lim_{x \to 2} (2x^2+3)$

X	$f(x) = 2x^2 + 3$
2.1	$f(2.1) = 2(2.1)^2 + 3 = 11.8200$
2.01	$f(2.01) = 2(2.01)^2 + 3 = 11.0802$
2.001	$f(2.001) = 2(2.001)^2 + 3 = 11.0080$
2.0001	$f(2.0001) = 2(2.0001)^2 + 3 = 11.0008$
$x \to 2$	$y \to 11$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1) Realiza los siguientes ejercicios e indica tus conclusiones:

a) $\lim_{x \to -2^-} \sqrt{(x^2 - 4)}$

b) $\lim_{x \to 6} \sqrt{(6 - x)}$

2.3 LÍMITE DE LAS FUNCIONES CONSTANTES E IDENTIDAD

Sería demasiado laborioso si todos los problemas sobre límites se tuvieran que resolver tabulando la función para sucesión de valores de la variable independiente. Por ello, se indican las siguientes proporciones que permiten resolver los problemas de límites por sustitución directa.

1) El límite de una constante c, cuando x tiende al valor a, es la constante.

$$\lim_{x \to a} (c) = c$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} (5) = 5$

2) El límite de *x* cuando *x* tiende al valor a, es a.

$$\lim_{x \to a} (x) = a$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 3} (x) =$; $\lim_{x \to 3} (3) = 3$

3) El límite de *x* cuando *x* tiende a cero, y éste es numerador en un cociente, es cero.

$$\lim_{x \to 0} x / c = 0$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 0} (x / 1000) =$; $\lim_{x \to 0} (0 / 1000) = 0$

4) El límite de *x* cuando *x* tiende a cero, y éste es denominador en un cociente, es un límite no existente.

$$\lim_{x \to 0} c / x = \text{no existe}$$

Ejemplo: $\lim_{x \to 0} (1000 / x) =$; $\lim_{x \to 0} (1000 / 0) =$ no existe

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1) Con tus palabras, explica cada uno de los cuatro casos anteriores.
2) Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\lim_{x \to -2} (-4) =$

b) $\lim_{x \to -10} (x) =$

c) $\lim_{x \to 5} (x^2 - 25) =$

2.4 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Como se indicó anteriormente, existen algunas propiedades o teoremas que facilitan la solución de los límites de una función sin tener que sustituir en la variable independiente valores cercanos a éste, a continuación se indican los siguientes:

1) El límite de la suma o resta de un número finito de funciones cuando *x* tiende al valor a, es igual a la suma o resta de sus límites:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

Ejemplo: $\lim_{x \to -1} (x + 4) = ;\ \lim_{x \to -1} (-1 + 4) = 3$

2) El límite del producto de un número finito de funciones cuando *x* tiende al valor a, es igual al producto de sus límites:

$$\lim_{x \to a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x) = L_1 * L_2$$

Ejemplo:

$\lim_{x \to -1} (2x^2) = ;\ \lim_{x \to -1} (2) * \lim_{x \to -1} (x) * \lim_{x \to -1} (x) = ;$

$\lim_{x \to -1} (2) * \lim_{x \to -1} (-1) * \lim_{x \to -1} (-1) = (2)\ (-1)\ (-1) = 2$

3) El límite del cociente de dos funciones cuando *x* tiende al valor a, es igual al cociente de sus límites, siempre que el límite del denominador no sea igual a cero:

$$\lim_{x \to a} [f(x) / g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) / \lim_{x \to a} g(x) = L_1 / L_2, \text{ con } L_2 \neq 0$$

Ejemplo:

$\lim_{x \to 4} (2x / 10) = ;\ \lim_{x \to 4} (2) * \lim_{x \to 4} (x) / \lim_{x \to 4} (10) = ;$

$\lim_{x \to 4} (2) * \lim_{x \to 4} (4) / \lim_{x \to 4} (10) = (2)(4) / 10 = 8 / 10 = 4 /5$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1) Con tus palabras, explica cada uno de los tres casos anteriores.
2) Obtén el resultado de: $\lim_{x \to 2} (3x+4) / (2x + 1)$
3) Mediante una calculadora, obtén el resultado de : $\lim_{x \to 1} (x^2 - 1) / (x -$ ¿Lograste resolverlo? Indica la razón.

2.5 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO, EN UN INTERVALO O EN UNA REGIÓN

Como se indicó en el apartado 1.11 de este libro, la continuidad se refiere a una trayectoria que no tiene interrupciones. En una función, si el valor o valores que se le asignen a la variable independiente, da un resultado dentro de los números reales, es continua.

Ejemplo 1:

Determinar si la función $f(x) = x^2 - 1$ es continua en x = 3

Solución:

$f(3) = (3)^2 - 1 = 8$

Al sustituir el valor de la variable independiente en la función, se obtiene un valor dentro de los números reales (en este caso 8); por lo tanto, se concluye que la función es continua para el valor x = 3.

Ejemplo 2:

Determinar si la función $f(x) = (x^2 - 2x) / x$, es continua en $-2 \leq x \leq 2$

Solución:

Para conocer la continuidad en un intervalo (serie de puntos), se elabora una tabla:

X	$f(x) = (x^2 - 2x) / x$	
-2	$f(-2) = ((-2)^2 - 2(-2)) / -2 = -4$	Continua en x = -2
-1	$f(-1) = ((-1)^2 - 2(-1)) / -1 = -3$	Continua en x = -1
0	$f(0) = ((0)^2 - 2(0)) / 0$ =No está definido	Discontinua en x = 0
1	$f(1) = (1)^2 - 2(1) / 1 = -1$	Continua en x = 1
2	$f(2) = ((2)^2 - 2(2)) / 2 = 0$	Continua en x = 2

Como se puede observar en los ejemplos anteriores, toda función cociente, que dé como resultado cero en el denominador, genera una discontinuidad matemática.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1) Determina si existe algún valor para x que genere una discontinuidad en la función:
   a) $f(x)= 3x^3 - 4x^2 + x -5$?, ¿por qué?
   b) $f(x) = (x^2 – 16) / x – 4$?, ¿cuál?

2.6 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Como se ha indicado, cuando en un cociente, el denominador da como resultado cero, se genera una discontinuidad; si se trata como límite entonces es una indeterminación, sin embargo es posible saber esta indeterminación, aplicando las propiedades de continuidad. Se debe recordar que una función es continua en un punto $x = a$, si:

a) Existe $f(a)$
b) Existe $\lim_{x \to a} f(x)$
c) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo 1:

Determinar si la función $f(x) = (x^2 – 2x) / x$, es continua x = 1

a) $f(1) = ((1)^2 – 2(1) / 1 = -1 / 1 = -1$
b) $\lim_{x \to 1} (x^2 – 2x) / x =$; $\lim_{x \to 1} ((1)^2 – 2(1) / 1 = -1 / 1$
c) $\lim_{x \to 1} (x^2 – 2x) / x = f(1)$

Al cumplir con las propiedades de continuidad, se concluye que la función es continua cuando x = 1

Ejemplo 2:

Determinar si la función $f(x) = (x^2 – 2x) / x$, es continua x = 0

d) f(0) = ((0)2 – 2(0) / 0 = 0 / 0 No está definido
e) $\lim_{x \to 0} (x^2 – 2x) / x =$; $\lim_{x \to 0}$ ((0)2 – 2(0) / 0 = 0 / 0 Indeterminada

Para probar si existe un punto de indeterminación se factoriza:

$$f(x) = \frac{x(x – 2)}{x} = 1(x – 2) = (x - 2)$$

$\lim_{x \to 0} (x^2 - 2x) / x = \lim x \to 0 \ (x - 2) = ((0) - 2) = -2$

Como se puede observar, en este caso es posible probar el punto de indeterminación.

Otra manera de encontrar este punto de indeterminación, es mediante los límites laterales:

X	$f(x) = (x^2 - 2x) / x$
0.1	$f(0.1) = ((0.1)^2 - 2(0.1)) / (0.1) = - 1.9$
0.01	$f(0.01) = ((0.01)^2 - 2(0.01)) / (0.01) = -1.99$
0.001	$f(0.001) = ((0.001)^2 - 2(0.001)) / (0.001) = -1.999$
0.0001	$f(0.0001) = ((0.0001)^2 - 2(0.0001)) / (0.0001) = -1.9999$
$x \to 0$	$f(x) \to - 2$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1) Encuentra el punto de indeterminación de: $f(x) = (x^2 - 16) / x - 4$

2.7 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTOR DE UN ESCALAR

Como se sabe, un vector es la representación física de una magnitud, con dirección y sentido, y puede ser unidireccional, bidimensional (plano) o tridimensional (espacio), también se debe recordar el concepto de límite de una función que indica: dada una función de una variable *f(x)*, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Ahora bien, al conjuntar estos conceptos se puede expresar: Sea f definida en el interior de un disco centrado en el punto (a, b), excepto posiblemente, en el propio (a, b). Se dice que:

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

Al igual que en los límites de función constante, existe la posibilidad de resolver en forma directa, sustituyendo los valores en la función del límite.

Ejemplo: Evaluar $\lim_{(x, y) \to (2, 1)} (2x^2y + 3xy) \ / \ (5xy^2 + 3y)$

Solución: Sustituir los valores de *x* y *y*

$$\lim_{(x,\, y)\to(2,\, 1)} \frac{2((2)^2(1) + 3\,(2)(1)}{5(2)(1)^2 + 3(1)} = \frac{8 + 6}{10 + 3} = \frac{14}{13}$$

Si la función está en un plano tridimensional, se debe contemplar el tercer plano pudiendo definir el límite como:

$$\lim_{(x,\, y,\, z)\to(a,\, b,\, c)} f(x, y, z) = L$$

Ejemplo: Evaluar $\lim_{(x,\, y,\, z)\to(1,\, 0,\, 2)} (4xz) \;/\; (y^2 + z^2)$

Solución: Sustituir los valores de *x, y* y *z.*

$$\lim_{(x,\, y,\, z)\to(1,\, 0,\, 2)} \frac{4\,(1)\,(2)}{(0)^2 + (2)^2} = \frac{8}{4} = 2$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1) Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $\lim_{(x,\, y)\to(\P,\, 1)} (\cos xy) \,/\, (y^2 + 1)$

b) $\lim_{(x,\, y,\, z)\to(1,\, 1,\, 2)} (e^{x+y+z}) \;/\; (x - z)$

2.8 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN VECTOR DE UN VECTOR

Se denomina *función vectorial* a:

$$r(t) = f(t)i + g(t)j \quad \text{(en el plano)}$$

o bien,

$$r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k \quad \text{(en el espacio)}$$

Señalando que, los teoremas o propiedades de los límites y continuidad de funciones de una o varias variables son utilizables con funciones vectoriales. Así, el límite de una función vectorial de un vector es el límite de cada uno de sus componentes, es decir:

$$\text{Si} \quad r(t) = [\, f(t), g(t), h(t) \,]$$

entonces,

$$\lim_{t\to a} r(t) = [\, \lim_{t\to a} f(t),\ \ \lim_{t\to a} g(t),\ \ \lim_{t\to a} h(t) \,]$$

Ejemplo 1:

$\lim_{t \to 3} r(t)$ si $r(t) = 5\, i + [(t^2 - 1) / (t^2 + 1)]\, j + \ln t\, k$

Solución: Se obtienen cada uno de los límites de los componentes de r(t):

Para *i* : $\lim_{t \to 3} 5 = 5$

Para *j* : $\lim_{t \to 3} [(t^2-1) / (t^2+1)] = [((3)^2-1) / ((3)^2+1)] = 9-1 / 9+1 = 8/10 = 4 / 5$

Para z : $\lim_{t \to 3} \ln t = \ln 3$

Así, entonces:

$\lim_{t \to 3} r(t) = 5\, i + (4 / 5)\, j + \ln 3\, k$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1) Demostrar que:

a) $\lim_{t \to 3} r(t) = -5i + e^{-3}k$ Si $r(t) = [(t^2 + t - 6) / (t + 3)]\, i + (t + 3)\, j + e^t\, k$

b) $\lim_{t \to 0} r(t) = 3i - j$ Si $r(t) = 3 \cos t\, i - (\operatorname{sen} t / t)\, j + 4 \operatorname{sen} t\, k$

c) $\lim_{t \to 1} r(t) = j - 5k$ Si $r(t) = \ln t\, i + \sqrt{t}\, j - 5 t^3\, k$

AUTOEVALUACIÓN

Subraya la respuesta correcta:

1. Para $\lim_{x \to 2} (3x - 1)$:

a) $y \to -5$ b) $y \to 2$ c) $y \to 3$ d) $y \to 5$

2.- La expresión matemática de un límite es:

a) $\lim_{x=2} f(x) = L$

b) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

c) $x \to a = \lim_{f(x)} L$

d) $f(x) = \lim$

3.- Si $\lim_{x \to -1^-} (2x + 1)$, un valor cercano hacia el cual tiende x es:

a) $x = -0.9$ b) $x = -1.1$ c) $x = 1$ d) $x = 1.1$

4.- De los siguientes incisos, ¿cuál no es una proporción de los límites?

a) $\lim_{x \to 0} (x/C) = C$

a) $\lim_{x \to a} (x) = a$

a) $\lim_{x \to a} (C) = C$

a) $\lim_{x \to 0} (x/C) = 0$

5.- Para $\lim_{x \to 1} 2x/ x-1$:

a) $y \to -0$ b) $y \to 0$ c) $y \to 2$ d) No existe

6.- Para $\lim_{x \to 2} 3x / 4x-2$:

a) $y \to 1$ b) $y \to 2$ c) $y \to 6$ d) No existe

7.- Para $f(x) = 3x / x-2$ existe un punto de discontinuidad en:

a) $x = -2$ b) $x = 0$ c) $x = 2$ d) No hay punto de discontinuidad

8.- Para $f(x) = 3x / 4-2$ existe un punto de discontinuidad en:

a) $x = -2$ b) $x = 0$ c) $x = 4$ d) No hay punto de discontinuidad

9.- Evaluar $\lim_{(x, y) \to (1, 2)} (2xy + 3y)$:

a) 1 b) 7 c) 10 d) No existe

10.- La expresión matemática que define la función vectorial en el espacio es:

a) $r(t) = f(t)i + g(t)j$

c) $r(t) = f(t)i + g(t)j + h(t)k$

b) $r(t) = f(t)i + h(t)k$

d) $r(t) = f(t)i - g(t)j / h(t)k$

RESPUESTAS

1.- d

2.- b

3.- b

4.- a

5.- d

6.- a

7.- c

8.- d

9.- c

10.- c

UNIDAD 3

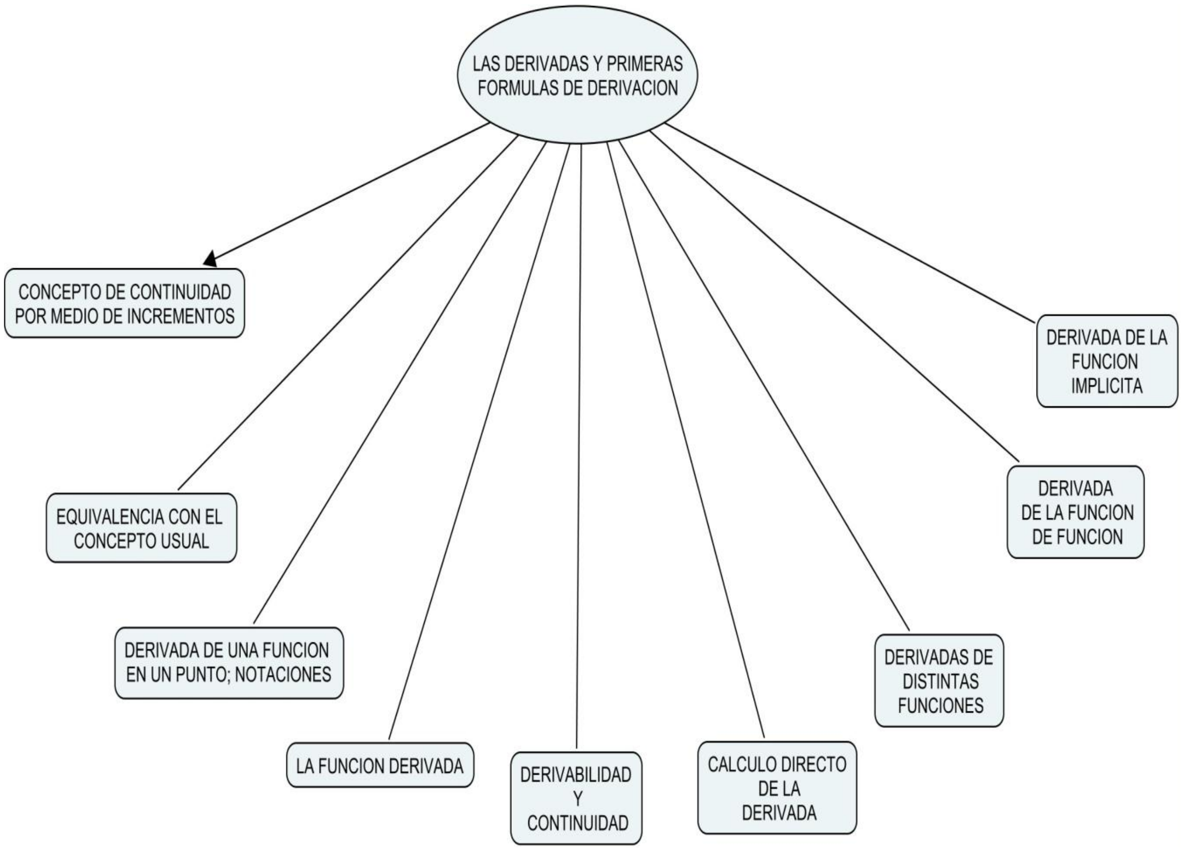
LAS DERIVADAS Y PRIMERAS FÓRMULAS DE DERIVACION

OBJETIVO

El alumno deberá ser capaz de definir claramente el concepto de incremento, así como expresar de manera personal, el procedimiento para la obtención de fórmulas para la derivación, y describirlas Además, aplicará el conocimiento de los conceptos adquiridos para la solución de problemas de funciones que requieran derivarse.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Una de las aplicaciones más importantes del concepto de límites es el de derivada. A través de la experiencia, gran cantidad de fenómenos se presentan como estados en continuo cambio. El deseo de lograr determinar la forma en que estos cambios se realizan, y así, interpretar y predecir fenómenos conduce al concepto de “razón de cambio” el cual, al ser utilizado para calcular la razón instantánea, orienta invariablemente al símbolo 0 / 0, por lo que deberá tratarse como un límite, con el objetivo de tener un significado.

Gran cantidad de conceptos cotidianos, involucran razones de cambio: velocidades, intereses, crecimiento demográfico, etc. El propósito de esta unidad es formalizar este concepto y especificar una serie de teoremas y reglas que se utilizarán posteriormente para evaluar derivadas de primer orden y de orden superior.

3.1 CONCEPTO DE CONTINUIDAD POR MEDIO DE INCREMENTOS

¿Qué preferirías, que incrementaran tus actividades o tus horas de descanso? Independientemente de la respuesta, al escuchar hablar de un incremento, este concepto siempre se asocia con una diferencia, la cual es el resultado de restar al valor final, el valor inicial. En las matemáticas es igual, sólo que en este caso, en ocasiones, las diferencias están basadas en variables, las cuales no son conocidas.

> Si a la variable independiente *x* con un valor inicial a, se le da un valor final *b*, a la diferencia *b – a* se le llama incremento de la variable *x;* esto se expresa usando la letra griega llamada delta (Δ) que se antepone a la variable: $\Delta x = b - a$.[9]

Si se considera que se trata de una variable independiente, se refiere a la variable *x*, y si se entiende al valor *a* como el primer punto, entonces, se refiere al punto x_1, entonces *b* es el punto x_2, pudiendo definir el incremento en *x* como: $\Delta x = x_2 - x_1$

El incremento puede ser positivo, negativo o incluso nulo; a continuación, se indican algunos ejemplos:

Caso 1: Obtener el incremento de la variable independiente x, cuyo valor inicial es de 10, y el valor final es de 15.

Solución:

Valor inicial: $a = x_1 = 10$ Valor final: $b = x_2 = 15$

$\Delta x = x_2 - x_1 = 15 - 10 = 5$ (si el resultado es positivo, el incremento es positivo).

Caso 2: Obtener el incremento de la variable independiente x, cuyo valor inicial es de 15, y el valor final es de 10.

Solución:

Valor inicial: $a = x_1 = 15$ Valor final: $b = x_2 = 10$

---

[9] Fuenlabrada, *Cálculo diferencial*, p. 49

$\Delta x = x_2 - x_1 = 10 – 15 = -5$ (si el resultado es negativo, el incremento es negativo)

Caso 3: Obtener el incremento de la variable independiente x, cuyo valor inicial es de 15, y el valor final es de 15.

Solución:

Valor inicial: $a = x_1 = 15$ Valor final: $b = x_2 = 15$

$\Delta x = x_2 - x_1 = 15 - 15 = 0$ (incremento nulo)

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Con tus palabras, define qué es un incremento matemático.

2.- Ejemplifica tres ejercicios de incrementos; uno por cada caso descrito anteriormente.

3.- Si a= - 5 y b= 0 ¿será incremento positivo o negativo? ¿Por qué?

3.2 Equivalencia con el concepto usual

Se sabe que un incremento es el resultado de la diferencia entre dos valores, y que una función es la respuesta a la sustitución de un valor determinado; por lo tanto, si una función real de variable real con regla de correspondencia y=f(x), si x varía de x_1 a x_2, entonces, el valor de la funcion x_1 se denomina valor inicial de la funcion $f(x_1)$ y el valor en la función en x_2 se llama valor final de la funcion $f(x_2)$, de forma matemática:

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$$

De forma general, para cualquier x que pertenece al dominio de la función, se considera:

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Para obtener este incremento, se debe recordar, que para saber el resultado de una función hay que sustituir la variable independiente en la misma, en este caso, la variable independiente siempre será $(x + \Delta x)$.

Caso 1: Dada la función f(x) = 3x +1, obtener el incremento de la función.

Solución:

$f(x + \Delta x) = 3(x+\Delta x) +1$

$= 3x + 3\Delta x + 1$

$f(x)= 3x + 1$

Si:

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) – f(x)$

Sustituyendo:

$\Delta f(x) = 3x + 3\Delta + 1 – (3x + 1)$

$= 3x + 3\Delta x + 1 – 3x – 1$

$= 3\Delta x$

Caso 2: Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + 5$, obtener el incremento de la función.

Solución:

$f(x + \Delta x) = (x+\Delta x)^2 - 3(x+\Delta x) +5$

$= x^2 + 2(x)(\Delta x) + \Delta x^2 – 3x - 3\Delta x + 5$

$f(x) = x^2 - 3x + 5$

Sustituyendo:

$\Delta f(x) = x^2 + 2(x)(\Delta x) + \Delta x^2 – 3x - 3\Delta x + 5 – (x^2 - 3x + 5)$

$= x^2 + 2(x)(\Delta x) + \Delta x^2 – 3x - 3\Delta x + 5 – x^2 + 3x - 5$

$= 2x\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Define con tus palabras, los pasos para obtener un incremento.

2.- Dada la función $f(x) = 3x^3 + 4x^2 – 5x + 6$, obtener el incremento.

3.3 DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO; NOTACIONES

La derivada de una función se obtiene como el límite del cociente del incremento de la función, entre el incremento de la variable independiente, cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, esto es:

Derivada de:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{}$$

$$\Delta x$$

Con base en lo expuesto sobre función e incremento, la derivada de una función también se expresa como:

Derivada de:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Con el propósito de simplificar la notación, es frecuente representar a Δx con la letra *h*, quedando de la siguiente manera:

Derivada de:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Existen varias formas de expresar las derivadas, es recomendable acostumbrarse al uso de todas, ya que dependiendo del caso que se desarrolle, es más cómodo el uso de alguna de ellas en particular.

$Df(x)$	: Cauchy
$f'(x)$	: Lagrange
y'	: Lagrange
$\frac{Dy}{Dx}$	: Leibnitz

Haciendo una analogía entre las diferentes formas de denotar una función, se tiene:

$$Df(x) = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Investiga la vida y obra de Cauchy, Lagrange y Leibnitz.

3.4 LA FUNCIÓN DERIVADA

La función derivada se puede obtener de dos formas: por fórmulas específicas o por un método denominado *regla general de la derivación.* Esta regla consta de cuatro pasos y lo mejor es que ya se ha realizado anteriormente, el orden es:

1) Se sustituye en la función *x* por $x + \Delta x$, también *y* por $y + \Delta y$. Desarrollar.
2) Se resta el valor de la función $y=f(x)$ del nuevo valor para obtener Δy.
3) Dividir por Δx.
4) Se calcula el límite de este cociente cuando $\Delta x \to 0$.

El procedimiento de los pasos uno y dos, son los mismos que se desarrollaron en los incrementos, mientras que el procedimiento del paso número cuatro, es el mismo que se empleo en límites.

Ejemplo: Dada la función $f(x) = 3x^2 +1$, obtener la derivada.

1) $y + \Delta y = 3(x+ \Delta x)^2 + 1$

$$= 3(x + 2(x)(\Delta x) + (\Delta x)^2) + 1$$
$$= 3x + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 + 1$$

2)
$$\begin{array}{rcl} y + \Delta y = & 3x + 6x\Delta x + 3\Delta x^2 & + 1 \\ \underline{-y \qquad} & \underline{- 3x \qquad\qquad\qquad} & \underline{- 1} \\ \Delta y = & 6x\Delta x + 3\Delta x^2 & \end{array}$$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{6x\Delta x + 3\Delta x^2}{\Delta x} = 6x + 3\Delta x$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 6x + 3(0) = 6x$

Como se analizó con anterioridad:

$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ indica una derivada y tiene varias formas de notación.

Para los ejercicios de este libro se empleará la notación de Lagrange. Por lo tanto, el resultado queda: $y' = 6x$

Una de las formas más comunes que indica una operación de derivación respecto a *x* y su resultado, es: $\frac{d}{dx}(3x^2+1)=6x$; que se lee: derivada de $3x^2+1$ con respecto a x es igual a 6x dx.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Con tus palabras, describe los pasos de la regla general de la derivación.

2.- Obtén la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 3x - x^3$

b) $y = ax^2$

c) $y = 2t - t^2$

3.5 DERIVABILIDAD Y CONTINUIDAD

"De la teoría de los límites, se deduce que si existe la derivada de una función para cierto valor de la variable independiente, la función misma debe ser continua para aquel valor de la variable.

Sin embargo, la recíproca no siempre es cierta: se han descubierto funciones que son continuas y, a pesar de eso, no tienen derivada".[10]

Para los casos y ejemplos que se realicen, sólo se considerarán funciones derivables.

Ejemplo: Calcular la derivada de S = 4 / t

Paso 1

$$S + \Delta S = \frac{4}{t + \Delta t}$$

[10] Granville, William A., *Cálculo diferencial e integral,* p. 30

Paso 2

$$S + \Delta S - S = \frac{4}{t + \Delta t} - \frac{4}{T} = \frac{4t - 4t - 4\Delta t}{t^2 + t\Delta t} = \frac{-4\Delta t}{t^2 + t\Delta t}$$

Paso 3

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\dfrac{-4\Delta t}{t^2 + t\Delta t}}{\Delta t} = \frac{-4\Delta t}{t^2\Delta t + t\,\Delta t^2} = \frac{\Delta t\,(-4)}{\Delta t\,(t^2 + t\Delta t)} = \frac{-4}{t^2 + \Delta t}$$

Paso 4

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{-4}{t^2 + (0)}$$

Por lo tanto $S' = -\dfrac{4}{t^2}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Obtén el límite de la función del ejemplo descrito en este tema si $t \to 0$. Compara ambos resultados, y analiza el porqué de la diferencia.

2.- Obtén la derivada de $y = \dfrac{c}{x^2}$

3.6 CÁLCULO DIRECTO DE LAS DERIVADAS

Hasta ahora, se han derivado funciones mediante la regla general para derivación, sin embargo, este procedimiento es largo y/o difícil. Por ello, a partir de la regla general para la derivación, se han deducido fórmulas para derivar casos particulares que se presentan con frecuencia, y así facilitar la actividad. En estas fórmulas u, v, w representan funciones derivables de x.

A continuación, se desglosa una función mediante la regla general para la derivación, y así observar el procedimiento para obtener la fórmula ya establecida; posteriormente, sólo se mencionan las fórmulas algebraicas y se ejemplifica cada una.

Es sumamente importante memorizarlas, pero más que eso, comprenderlas, ya que son la base para derivadas posteriores.

Caso 1: Derivada de una constante: f(x) = c

1) $y + \Delta y = c$

2) $y + \Delta y = c$

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = c \\ \underline{-y \qquad\ \ -c} \\ \Delta y = 0 \end{array}$$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

La derivada de una constante siempre es cero:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(c) = 0} \quad \text{..... I}$$

Ejemplo: Calcular la derivada si f(x) = 8

1) $y + \Delta y = 8$

2) $y + \Delta y = 8$

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = 8 \\ \underline{-y \qquad\ \ -8} \\ \Delta y = 0 \end{array}$$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

4) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ Por lo tanto, $y' = 0$

Evitando todo el procedimiento y aplicando directamente la fórmula:

$\dfrac{d}{}(8) = 0$ Por lo tanto, $y' = 0$

dx

Caso 2: Derivada de una variable: f(x) = x

La derivada de una variable siempre da como resultado la unidad:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1} \quad \text{..... II}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de y = x

$\frac{d}{dx}(x) = 1$ Por lo tanto, y' = 1

Caso 3: Derivada de la potencia de una función, siendo el exponente constante:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}} \quad \text{..... III}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de $y = x^4$

$\frac{d}{dx}(x^4) = 4\,x^{4-1} = 4x^3$ Por lo tanto, $y' = 4x^3$

Caso 4: Derivada de una constante por una variable: f(x) = cu

$$\boxed{\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)} \quad \text{..... IV}$$

Ejemplo: Calcular la derivada si $f(x) = 8x^4$

$\frac{d}{dx}(8x^4) = 8\frac{d}{dx}(x^4) = 8(4\,x^{4-1}) = 32x^3$ Por lo tanto, $y' = 32x^3$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Con tus palabras, describe cómo se resuelve una función que cumpla las características del caso 3 y del caso 4.

2.- Justifica las funciones:

a) $\frac{d}{}(-ax + x - 4) = -a + 1$

$$\frac{d}{dx}$$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{8x-4}{2}\right) = 4$

3.7 Derivadas de distintas funciones

Como ya se indicó en el tema anterior, en general es más fácil y sencillo usar fórmulas para la derivación. A continuación, se analizan otras fórmulas algebraicas, pero se contemplan distintas funciones.

Caso 1: Derivada de la suma de funciones:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) - \frac{d}{dx}(w)} \quad \ldots\text{.. V}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de $y = 3x^2 - 4x - 5$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 4x - 5)$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2) - \frac{d}{dx}(4x) - \frac{d}{dx}(5)$$

$$3\frac{d}{dx}(x^2) - 4\frac{d}{dx}(x) - 0$$

$3(2x^{2-1}) - 4(1) - 0$ Por lo tanto, $y' = 6x - 4$

Caso 2: Derivada de un cociente de dos funciones:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}} \quad \ldots\text{.. VI}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de $s = \frac{t+4}{t}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{t+4}{\ }\right) = t\frac{d}{\ }(t+4) - (t+4)\frac{d}{\ }(t)$$

dt (t) dt dt .

t^2

$$\frac{t\left(\frac{d}{dt}(t)+\frac{d}{dt}(4)\right)-(t+4)(1)}{t^2}$$

$\frac{t(1+0)-t-4}{t^2} = \frac{t+0-t-4}{t^2}$ Por lo tanto, $s' = \frac{-4}{t^2}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Con tus palabras, describe cómo se resuelve una función que cumpla las características de los dos casos analizados en este tema.

2.- Justifica las funciones:

a) Si $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ entonces $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

b) Si $s = (At + B) / (Ct + D)$ entonces $s' = (AD - BC) / ((Ct + D)^2$

3.8 DERIVADAS DE LA FUNCIÓN DE FUNCIÓN

“A veces acontece que *y* no se define directamente como función de *x*, sino que se da como función de otra variable *v,* que se define como función de *x*, en este caso *y* es función de *x* por intermedio de *v*, y se llama función de función”.[11]

Para obtener la derivada de una funcion de funciones se aplica la fórmula:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dy}} \quad \text{..... VII}$$

La derivada de la función de funciones también se denomina regla de la cadena.

[11] Granville, William A., *Cálculo diferencial e integral*, p.46

Ejemplo: Derivar $y = \left(\frac{2x+1}{4}\right)^3$

Considerando que $u = \frac{2x+1}{4}$ se obtiene entonces $y = u^3$

Derivando respecto y respecto a u, queda $\frac{dy}{du} = 3u^2$

Si $u = \frac{2x+1}{4} = \frac{2x}{4} + \frac{1}{4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

Derivando u respecto a x

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x) + 0 = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la fórmula VII

$$\frac{dy}{dx} = (3u^2)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y' = 3\left(\frac{2x+1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y' = 3\left(\frac{4x^2+4x+1}{16}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto, $y' = \frac{3}{32}(4x^2 + 4x + 1)$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Con tus palabras, describe cómo se resuelve la derivada de función de funciones.

2.- Obtén la derivada de:

a) $y = (3x^3 - 5x^2 + 3)^3$

b) $y = ((x + 1) / (5x - 2))^3$

3.9 DERIVADA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Se han estudiado las fórmulas para derivar las funciones de forma explícita, pero en ocasiones, se debe derivar una función de forma implícita, ya sea porque es muy difícil despejar la y, o porque simplemente no es posible el despeje.

Teniendo una función implícita, es importante analizar si se puede transformar a función explícita para facilitar las operaciones. Si no es posible realizar la transformación, se deben seguir los siguientes pasos:

1.- Derivar término a término y tomar a y como función de x

2.- Es necesario considerar además de la regla de la cadena y la fórmula VI, otras fórmulas:

- Derivada de una variable elevada a un exponente:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u^n) = n\,u^{n-1}\frac{d}{dx}(u)} \quad \text{..... VIII}$$

- Derivada del producto de dos variables:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u)} \quad \text{..... IX}$$

- Derivada de la raíz cuadrada de una función:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{\frac{d}{dx}(u)}{2\sqrt{u}}} \quad \text{..... X}$$

3.- En la expresión resultante, despejar dy / dx como se hace en una ecuación.

Caso 1: Derivar la función implícita $x^2 + y^2 = 5$

Analizando, se observa que se puede despejar y, quedando la función explícita:

$y = \sqrt{(5 - x^2)}$

Aplicando la fórmula X

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(5 - x^2)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}(5 - x^2)}{2\sqrt{(5 - x^2)}} = \frac{\frac{d}{dx}(5) - \frac{d}{dx}(x^2)}{2\sqrt{(5 - x^2)}} = \frac{0 - 2x}{2\sqrt{(5 - x^2)}}$$

Por lo tanto, $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{(5 - x^2)}}$.

Caso 2: Derivar la función implícita $ax^6 + 2x^3y - y^7x = 10$

En este caso, es complicado convertirla a función explícita por ser difícil despejar y, por lo que se deriva por función implícita.

Paso 1

$$\frac{d}{dx}(ax^6) + \frac{d}{dx}(2x^3y) - \frac{d}{dx}(y^7x) = \frac{d}{dx}(10)$$

Paso 2

$$a\frac{d}{dx}(x^6) + \left((2x^3)\frac{d}{dx}(y) + (y)\frac{d}{dx}(2x^3)\right) - \left((y^7)\frac{d}{dx}(x) + (x)\frac{d}{dx}(y^7)\right) = 0$$

$$a(6x^{5-1}) + 2x^3\frac{dy}{dx} + y(2)\frac{d}{dx}(x^3) - y^7 - (x)\,7y^{7-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6ax^5 + 2x^3\frac{dy}{dx} + y(2)(3x^{3-1}) - y^7 - 7x\,y^6\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6ax^5 + 2x^3\frac{dy}{dx} + 6x^2y - y^7 - 7x\,y^6\frac{dy}{dx} = 0$$

Paso 3

$$2x^3 \frac{dy}{dx} - 7x y^6 \frac{dy}{dx} = -6ax^5 - 6x^2y + y^7$$

$$(2x^3 - 7x y^6) \frac{dy}{dx} = y^7 - 6ax^5 - 6x^2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^7 - 6ax^5 - 6x^2y}{2x^3 - 7x y^6}$$

Es importante señalar que el resultado contendrá tanto la variable x como la variable y.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Con tus palabras, describe cómo se resuelve la derivada de la función implícita.

2.- Obtén la derivada de:

a) $y = 3x^2 + xy - 5y^2$

b) $y = ((x + y) / (x - y)) = x^2$

AUTOEVALUACION

Subraya la respuesta correcta:

1.- Un incremento matemático, en el eje de las abscisas, se designa como:

a) Inc x　　b) Δx　　c) Δy　　d) dx / dy

2.- Si a= - 3 y b= 0, el incremento es:

a) – 3　　b) – 0　　c) 0　　d) 3

3.- Un incremento de funciones, está dado por la expresión matemática:

a) $\Delta f(x) = f(x - \Delta x) + f(x)$　　b) $\Delta f(x) = f(x - \Delta x) - f(x)$

c) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) + f(x)$　　d) $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$

4.- El incremento de f(x) = 5 – 2x es:

a) $5\Delta x$　　b) $-2\Delta x$　　c) $5x + 5\Delta x$　　d) $2\Delta x$

5.- ¿Cuál no es una notación de derivada?

a) b’　　*b) f ' (x)*　　c) y'　　d) d*f(x)*

6.- Es el primer paso, de acuerdo con la fórmula general para la derivación:

a) Sustituir Δx por cero　　b) Cambiar x por $x+\Delta x$; y por $y+\Delta y$

c) Dividir la función por Δx　　d) Restar la función original

7.- Fórmula de la derivada de una variable elevada a un exponente:

a) $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$　　b) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

c) $\frac{d}{dx}(\sqrt{u}) = \frac{\frac{d}{dx}(u)}{2\sqrt{u}}$　　d) $\frac{d}{dx}(u^n) = n\,u^{n-1}\frac{d}{dx}(u)$

8.- La derivada de $u=4v + 2v^2$ es:

a) $u' = 2v$ b) $u' = 4v + 4v$ c) $u' = 4 + 4v$ d) $u' = 0$

9.- Es el resultado de la función implícita $3x - \sqrt[3]{y} = 4$

a) $y' = (3x - 4)^3$ b) $27x^2 - 144$ c) $y' = 9(3x - 4)^2$ d)Valor indeterminado

10.- Es el resultado de la función $y = \sqrt{(3 - 2x)}$

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(3 - 2x)}}$ b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(3 - 2x)}}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{(3 - 2x)}}$ d) $\frac{dy}{dx} = -2$

RESPUESTAS

1. - b
2. - d
3. - d
4. - b
5. - a
6. - b
7. - d
8. - c
9. - c
10. - a

UNIDAD 4

DERIVACION DE FUNCIONES TRASCENDENTES

OBJETIVO

El alumno será capaz de reconocer la función inversa, circular, circular inversa, logarítmica y exponencial, así como las propiedades de los logaritmos. Asimismo, logrará aplicar el conocimiento adquirido para solucionar problemas mediante fórmulas, donde se presenten funciones inversas, circulares, circulares inversas, logarítmicas y exponenciales.

TEMARIO

4.1 Función inversa y su derivada

4.2 Funciones circulares directas y sus gráficas

4.3 Límite de sen x/x cuando x tiende a cero

4.4 Derivada de las funciones circulares directas

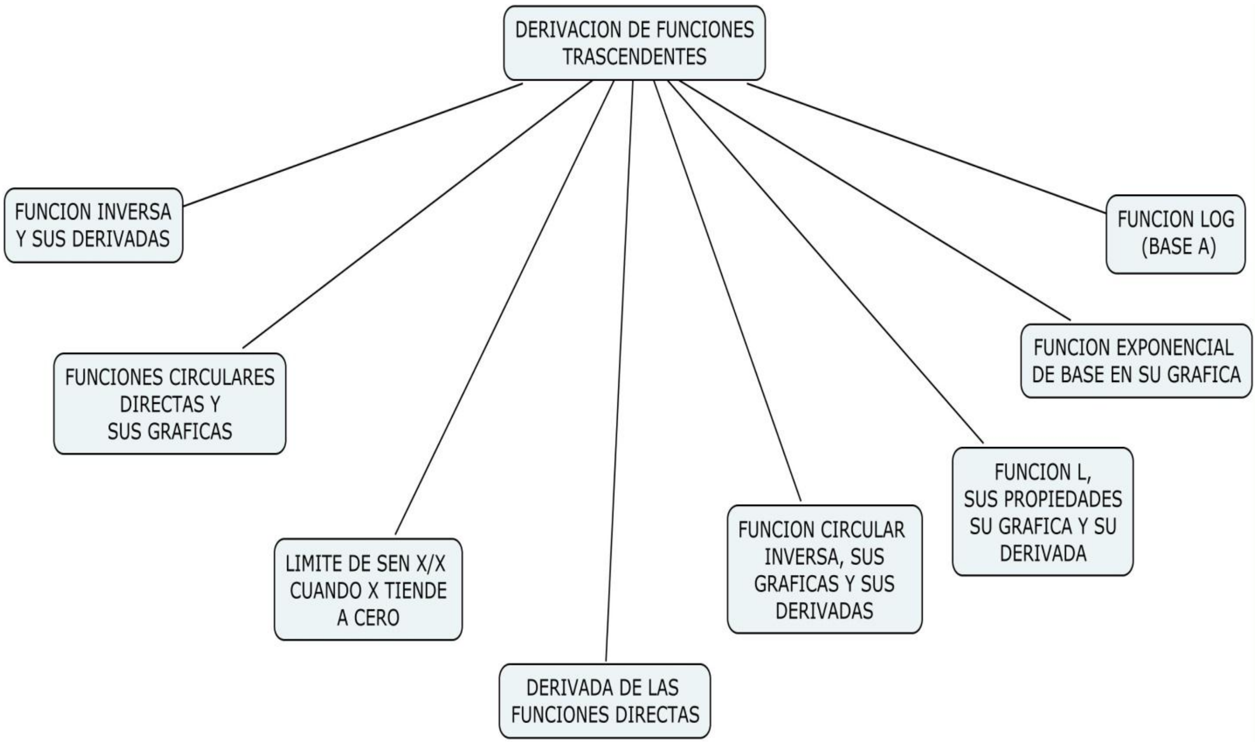
4.5 Función circular inversa, sus gráficas y sus derivadas

4.6 Función L, sus propiedades, su gráfica y su derivada

4.7 Función exponencial de base en su gráfica

4.8 Función Log. (Base A)

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCION

Al matemático escocés John Napier, barón de Merchiston (1550-1617), se reconoce la invención de los logaritmos (palabra de origen griego: *logos*/tratado, *arithmos*/números).

En ocasiones, las operaciones que se realizan en matemáticas son sumamente complicadas, y el uso de logaritmos facilita y simplifica estas operaciones; mediante la aplicación de logaritmos se pueden transformar multiplicaciones en adiciones, divisiones en restas, potencias en multiplicaciones y raíces en divisiones.

Los exponentes fueron introducidos en las matemáticas con la finalidad de crear un método corto que indicara el producto de varios factores semejantes, con este objetivo, sólo se consideraron inicialmente exponentes naturales.

La finalidad de esta unidad es definir, reconocer y practicar la aplicación de fórmulas que son útiles en la búsqueda de resultados de funciones inversas, circulares, logarítmicas y exponenciales.

4.1 Función inversa y su derivada

Si se considera una función *y* dada, como una función de *x* según la ecuación y=f(x).

Es posible, en el caso de las funciones, resolver la ecuación con respecto a *y*, obteniendo:

$$x = f^{-1}(x)$$

Es decir, se puede considerar: *y* como la variable independiente y *x* como la variable dependiente. En este caso, f(x) y $f^{-1}(x)$ son funciones inversas.

Caso 1:

Si f(x) = 2x, y se da un valor a x, por ejemplo x=3, entonces:

f(x) = 2 (3) = 6; por lo tanto, f(x)=6, quedando las coordenadas: (3, 6).

Ahora bien, si y = f(x) = 2x, despejando la variable independiente, x = y / 2

Considerando que el dominio (x) pasa a ser el contradominio (y) y el contradominio (y) pasa a ser el dominio (x), la función queda: $f^{-1}(x) = x / 2$, sustituyendo el valor obtenido del contradominio en la función, entonces:

$f^{-1}(x) = 6 / 2 = 3$, quedando las coordenadas: (6, 3).

Para obtener la derivada, el procedimiento es el mismo, sólo que se despeja la variable x. Tomando en cuenta las derivadas de cada una de las variables, y haciendo una referencia con la función de funciones, se puede corroborar la derivada de la función inversa, de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$$

Caso 2:

Derivada de la función

Si:

$y = x^2$

$\frac{dy}{dx} = 2x$

Derivada de la función inversa

$x = \sqrt{y}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{-1/2}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Comprobando:

$$(2x)\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{2x}{2\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x} = 1$$

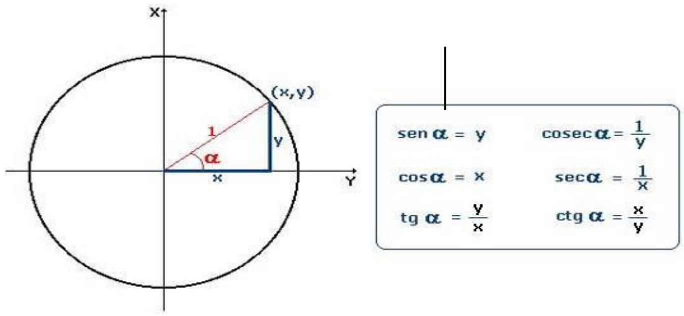
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Analiza lo que sucedió con las coordenadas de la función y la función inversa en el caso 1.

2.- Si $f(x) = ax^2$ obtén la derivada de la función inversa. Considera a=3

4.2 FUNCIONES CIRCULARES DIRECTAS Y SUS GRÁFICAS

Las funciones circulares, indudablemente se refieren a funciones trigonométricas que hacen referencia a una circunferencia. Debido a que una circunferencia de un ángulo α se puede construir de forma geométrica, tomando en consideración el valor del radio igual a la unidad.



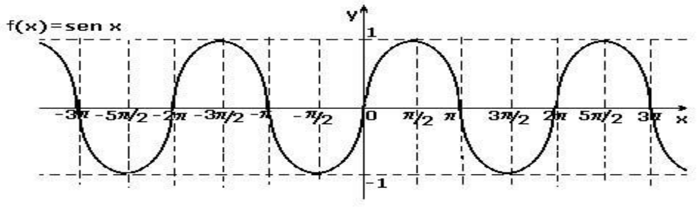
[12]

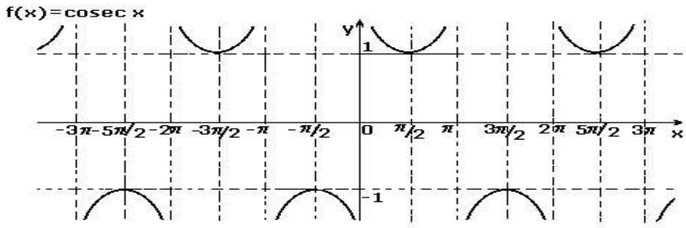
Se deduce con base en el concepto de función que:

- La función seno de un ángulo cualquiera es por lo tanto, $f(x) = \text{sen } x$
- La función coseno de un ángulo cualquiera es por lo tanto, $f(x) = \cos x$
- La función tangente de un ángulo cualquiera es por lo tanto, $f(x) = \text{tg } x$

[12] http://personales.ya.com/casanchi/mat/fcirculares01.htm

Si se considera que cualquier valor de x se supone que está dado en radianes, y señalando que x es una función periódica, la periodicidad de la función tiene la siguiente interpretación geométrica:





[13]

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

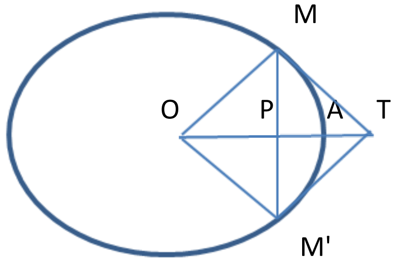
1.- Investiga la razones trigonométricas con respecto a un triangulo rectángulo.

2.- En una hoja milimétrica, desarrolla la representación grafica de la función tangente.

4.3 LÍMITE DE SEN X/X CUANDO X TIENDE A CERO

Antes de derivar sen x, es necesario demostrar que el $\lim_{x \to 0}$ sen x/x=1

Este límite no se puede resolver en forma directa, ya que cualquier número dividido entre cero da como resultado una indeterminación matemática. Por ello, se requiere utilizar la geometría y la trigonometría.



[13] http://personales.ya.com/casanchi/mat/fcirculares01.htm

Si O es el centro de la circunferencia, x=AOM medido en radianes, si el radio en la unidad, entonces el arco AM=x.

Si el arco AM' = arco AM, a su vez que y MT y M'T son tangentes a la circunferencia en M' y M, por geometría:

$$MM' < \text{arc } MAM' < MT + M'T$$

Con comparación por trigonometría:

$$2 \text{ sen } x < 2x < 2 \text{ tg } x$$

Dividiendo todos los miembros por 2 sen x, se obtiene:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

Se remplaza cada término por su recíproco y se invierten los signos de igualdad, quedando:

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Considerando los límites:

$$1 > \lim_{\alpha \to 0} \frac{\text{sen } x}{X} > \lim_{\alpha \to 0} \cos x$$

Como:

$$\lim_{\alpha \to 0} \cos x = 1$$

Se concluye que:

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- En una hoja milimétrica, desarrolla la representación gráfica del límite que se obtuvo en este tema, dando valores a x de -3¶, -2¶, -¶, 0.0001, ¶, 2¶, 3¶. Considera hasta nueve decimales, y describe las diferencias.

2.- Compara el tema visto, con el video publicado en el siguiente enlace de internet: http://www.youtube.com/watch?v=suXMECAUIWs y entrega una síntesis en una hoja.

4.4 DERIVADA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES DIRECTAS

Del mismo modo como se desarrollaron las formulas de derivadas algebraicas mediante la regla general para la derivación, es que se obtienen las fórmulas de derivadas trigonométricas; por ello, en este tema sólo se ejercitarán a partir de la fórmula ya establecida.

Caso 1: Derivadas de la función seno:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u \frac{d}{dx}(u)} \quad \ldots\ldots \text{XI}$$

Ejemplo: Derivar y = sen (ax)

$$\frac{d}{dx}(\text{sen } ax) = \cos ax \frac{d}{dx}(ax) = \cos ax\ (a) \frac{d}{dx}(x) = \cos ax\ (a)(1)$$

Por lo tanto, y’ = a cos ax

Caso 2: Derivada de la función coseno:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos u) = -\text{sen } u \frac{d}{dx}(u)} \quad \ldots\ldots \text{XII}$$

Ejemplo: Derivar y= cos 2x

$$\frac{d}{dx}(\cos 2x) = -\text{sen } 2x \frac{d}{dx}(2x) = -\text{sen } 2x\ (2) \frac{d}{dx}(x) = -\text{sen } 2x\ (2)(1)$$

Por lo tanto, y’ = - 2 sen 2x

Caso 3: Derivada de la función tangente:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{d}{dx}(u)} \quad \ldots\ldots \text{XIII}$$

Ejemplo: Derivar y= tan x - 2x

$$\frac{d}{dx}(\tan x - 2x) = \frac{d}{dx}\tan x - \frac{d}{dx}(2x) = \sec^2(x) \frac{d}{dx}(x) - 2\frac{d}{dx}(x) = \sec^2 x\ (1) - 2\ (1)$$

Por lo tanto, $y' = \sec^2 x - 2$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Explica cuál es la relación que existe entre las fórmulas de derivadas algebraicas y las fórmulas de derivadas trigonométricas.

2.-Demuestra que si:

a) $y = \text{sen}\ (x/2)^2$ entonces $y' = \text{sen}\ (x/2)\cos(x/2)$

b) $y = \cos(3x^2 - x)$ entonces $y' = -(6x - 1)\ \text{sen}\ (3x^2 - x)$

c) $y = \sqrt[3]{\tan 2x}$ entonces $y' = 2\sec^2 2x / 3(\tan 2x)^{2/3}$

4.5 Función circular inversa, sus gráficas y sus derivadas

Como ya se indicó, cuando se despeja x se trata de una función inversa. A continuación, se muestran los siguientes ejemplos, si $x + 2y = -7$

1.- La función es $y = (-7 - x)/2$

2.- La función inversa es $f^{-1}(x) = -7 - 2x$

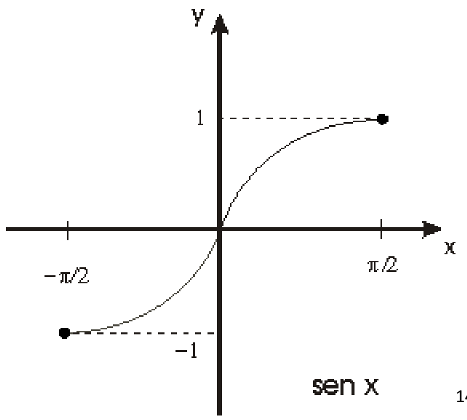
Para el caso de las funciones trigonométricas, se realiza un procedimiento similar; por ejemplo, si se analiza el caso de y = sen x, entonces x= ángulo sen y, al contemplar el cambio que se hace con la variable en la función inversa, la expresión queda:

$$y = \text{sen}^{-1}\ x$$

Debido a que algunos autores consideran que está expresión puede interpretarse de forma incorrecta al leerse: sen x con exponente -1, con frecuencia se emplea la expresión:

$$y = \text{arc sen}\ x$$

¿Recuerdas lo que sucede con la gráfica de una función inversa?, debido a que las variables se invierten, la gráfica es contraria, esto sucede también con estas funciones trigonométricas; a continuación se muestra la gráfica de la función inversa mencionada.



[14]

De igual manera, la función inversa de coseno queda como:

$$y = \cos^{-1} x = \text{arc cos } x$$

Mientras que la función inversa de la tangente queda:

$$y = \tan^{-1} x = \text{arc tan } x$$

A continuación, se muestran ejemplos de las fórmulas de funciones trigonométricas inversas:

Caso 1: Derivada de la función arco seno

$$\boxed{\frac{d}{dx} \text{arc sen } u = \frac{\frac{d}{dx}(u)}{\sqrt{(1 - u^2)}}} \quad \ldots\ldots \text{XIV}$$

Ejemplo: Derivar $y = \text{arc sen } 5x^2$

Si $u = 5x^2$, entonces $u' = 10x$

$$y' = \frac{10x}{\sqrt{(1-(5x^2)^2)}} \qquad \text{Por lo tanto, } y' = \frac{10x}{\sqrt{(1-25x^4)}}.$$

Caso 2: Derivada de la función arco coseno

$$\boxed{\frac{d}{dx} \text{arc cos } u = -\frac{\frac{d}{dx}(u)}{\sqrt{(1 - u^2)}}} \quad \ldots\ldots \text{XV}$$

[14] http://wmatem.eis.uva.es/~matpag/CONTENIDOS/Tfuncele1/marco_funele.htm

Ejemplo: Derivar $y = \text{arc cos}\,(x / 2)$

Si $u = \dfrac{x}{2}$ entonces $u' = \dfrac{1}{2}\, x$

$$y' = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - (\frac{1}{2} x)^2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4 - x^2}{4}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}}.$$

Por lo tanto, $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}.$

Caso 3: Derivada de la función arco tangente

$$\boxed{\frac{d}{dx}\,\text{arc tan}\, u = \frac{\frac{d}{dx}(u)}{1 + u^2}.} \quad \text{..... XVI}$$

Ejemplo: Derivar $y = \text{arc tan}\, 3x^2$

Si $u = 3x^2$ entonces $u' = 6x$

$y' = \dfrac{6x}{1 + (3x^2)^2}$ Por lo tanto $y' = \dfrac{6x}{(1 - 9x^4)}.$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Explica cuál es la relación que existe entre las fórmulas de derivadas algebraicas y las fórmulas de derivadas circulares inversas.

2.-Demuestra que para:

a) $y = \text{sen-1}\,(3x + 5x^3)$; $y' = 3 + 15x^2 / \sqrt{1} - (3x + 5x^3)^2$

b) $y = \cos^{-1}(x / a)$; $y' = -1 / (\sqrt{a}^2 - x^2)$

c) $y = \text{tan-1}\,(6x^2 - 3)$; $y' = 12 / (1 + (6x^2 - 3^2)$

4.6 Función L, sus propiedades, su gráfica y su derivada

Toda ecuación que incluye el logaritmo de una función de la variable, se denomina ecuación logarítmica. *Ejemplo:* $\log_5 (x - 3) + \log_5 x = 2$

Una función logarítmica con base b y constante, de características fijas $b>0$, $b\neq 1$ y dominio en todo $x > 0$, está dada por:

$$f(x) = \log_b x$$

Las propiedades para la función logarítmica son:

- El dominio consiste en todos los números positivos
- El rango consiste en todos los números reales y
- La función es creciente (la curva sube) cuando $b>1$, y es decreciente (la curva baja) cuando $0 < b < 1$
- La curva es cóncava hacia abajo cuando $b > 1$, y cóncava hacia arriba cuando $0 < b < 1$

Dentro de las propiedades de los logaritmos es importante contemplar la ley de los exponentes:

1.- $a^m a^n = a^{m+n}$
2.- $(a^m)^n = a^{mn}$
3.- $(a / b)^m = a^m / a^n$
4.- $(ab)^m = a^m b^m$
5.- $a^m / a^n = a^{m-n}$

Considerando que $a^0 = 1$ y que $a^{-n} = 1 / a^n$

Para trazar la gráfica de una función logarítmica, es necesario obtener su inversa, es decir, la función exponencial, llevando a cabo el siguiente análisis:

$$y = \log_b x \quad \leftrightarrow \quad x = b^y$$

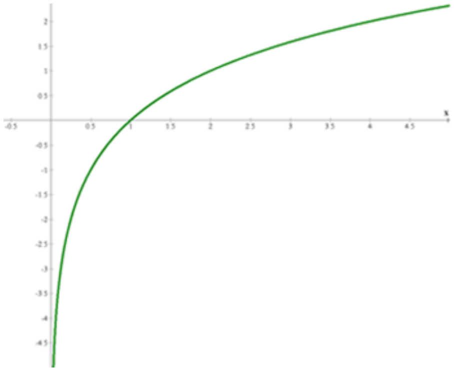
Ejemplo: Obtener la gráfica de $f(x) = \log_2 x$, para $-3 \leq x \leq 3$

Si $y = \log_2 -3 \quad \leftrightarrow \quad -3 = 2^y$

Pero como en la función inversa las variables cambian, la función queda:

$f^{-1}(x) = 2^{-3} = 1 / 2^{3} = 1/8$, la coordenada es (-3, 1/8), pero como las variables cambiaron la coordenada que se grafica es (1/8, -3):

x	$y = log_2 \, x$
1 / 8	-3
1 / 4	-2
1 / 2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



[15]

Caso 1: Derivada de la función logarítmica ($\log_a u$):

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{\log_a e}{u} \circ \frac{d\,(u)}{dx}} \quad \text{…. XVII}$$

Ejemplo: Derivar $y = \log_a \frac{3}{x}$

La función se puede expresar también como $y = \log_a 3x^{-1}$

$u = 3x^{-1}$

$u' = -1(3)x^{-1-1}$

$u' = - 3x^{-2} = \frac{-3}{x^2}$

Aplicando la fórmula:

$y' = \frac{\log_a e}{3x^{-1}} \left(\frac{-3}{x^2} \right)$

Por lo tanto, $y' = - \frac{\log_a e}{x}$

Caso 2: Derivada de la función de logaritmo natural ($\log_e u$):

$$\boxed{\frac{d}{dx} \ln u = \frac{\frac{d(u)}{dx}}{u} = \frac{1}{u} \circ \frac{d}{dx}(u)} \quad \text{….XVIII}$$

[15] http://www.vitutor.com/fun/2/c_14.html

Ejemplo: Derivar $y = \ln(ax + 3)$

$u = ax + 3$

$u' = a$

Sustituyendo en la fórmula:

$$y' = \frac{1}{ax+3}(a)$$

Por lo tanto, $y' = \dfrac{a}{ax+3}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- En una hoja milimétrica, elabora la gráfica para $y = \log_a x$; si $a= ½$ y $-2 \le x \le 2$

2.-Demuestra que para:

a) $y = \ln(\text{sen } 3x)$; $y' = \dfrac{3\cos 3x}{\text{sen } 3x}$

b) $y = 5\ln(3x + 2)$; $y' = \dfrac{15}{3x + 2}$

4.7 FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE EN SU GRÁFICA

Se define b^x para cualquier base positiva b y cualquier exponente racional x, es decir, una ecuación exponencial es toda ecuación que tiene una incógnita como exponente, por ejemplo: $5^x = 625^2$

Cuando se hace referencia a un número irracional, se trata de un número el cual no puede expresarse como el cociente de dos números enteros, por lo tanto, la función exponencial se define: Si $b > 0$ y $b \neq 1$, la función con base b y exponente x es:

$$f(x) = b^x$$

Cuando b=1, se obtiene la función constante $f(x)=1^x = 1$

Las propiedades de las funciones exponenciales son:

1.- El dominio consiste en todos los números reales x

2.- El rango consiste en todos los números positivos y

La función creciente (la curva sube) cuando $b > 1$, y es decreciente (la curva baja) cuando $0 < b < 1$

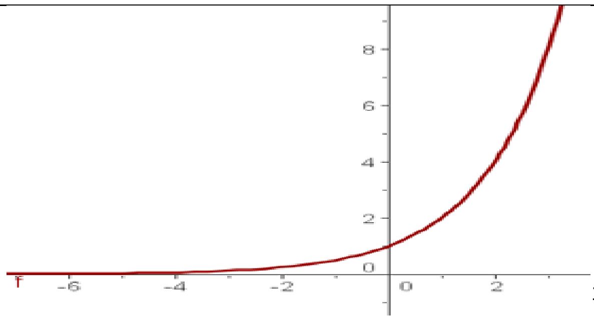
3.- El eje x es una asíntota horizontal a la curva, hacia la izquierda cuando $b>1$ y hacia la derecha cuando $0 < b < 1$

4.- Cumple con la ley de los exponentes.

Para obtener la gráfica de una función exponencial, sólo se sustituye el valor del dominio en la función.

Ejemplo: Realizar la gráfica correspondiente, si $y = b^x$, considerando $b=2$

x	$f(x) = 2^x$
-3	$f(-3)= 2^{-3} = 1/8$
-2	$f(-2)= 2^{-2} = 1/4$
-1	$f(-1)= 2^{-1} = 1/2$
0	$f(0)= 2^{0} = 1$
1	$f(1)= 2^{1} = 2$
2	$f(2)= 2^{2} = 4$
3	$f(3)= 2^{3} = 8$


[16]

Caso 1: Derivada de la función exponencial a^u

$$\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx} \quad \text{……XIX}$$

Ejemplo: Derivar $y = 17^{4x+x3}$

$u = 4x + x^3$

$u' = 4 + 3x^2$

Al sustituir en la fórmula:

$y' = 7^{4x+x3} \ln 7(4+3x^2)$

Por lo tanto, $y' = (4+3x^2)\, 7^{4x+x3} \ln 7$

Caso 2: Derivada de la función exponencial e^u

$$\underline{d}\ e^n = e^n\ \underline{d}\ (u)$$

[16] http://www.vitutor.com/fun/2/c_13.html

dx dx	….XX

Ejemplo 1: Derivar $y = e^{x3}$

$u = x^3$

$u' = 3x^2$

Sustituyendo en la fórmula:

$y' = e^{x3}\,(3x^2)$

Por lo tanto, $y' = 3x^2\,e^{x3}$

Ejemplo 2: Derivar $y = e^{-x/2}$

$u = -\dfrac{x}{2}$

$u' = -\dfrac{1}{2}$

Sustituyendo en la fórmula:

$y' = e^{-x/2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

Por lo tanto, $y' = -\dfrac{e^{-x/2}}{2}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- En una hoja milimétrica, elabora la gráfica para $y = e^x$ para $-2 \le x \le 2$

2.-Demuestra que para:

a) $y = 4^u$, si $u=x^{-2}$ entonces $y' = (-2x^{-3})\,4^{x-2}\ln 4$

b) $y = e^u$, si $u = \cos^2 3x$ entonces $y' = -6\,\mathrm{sen}3x\cos 3x\,e^{\cos^2 3x}$

4.8 Función Log. (Base A)

En ocasiones, las operaciones que se realizan en matemáticas son sumamente complicadas, y el uso de logaritmos facilita y simplifica estas operaciones; mediante la aplicación de logaritmos se pueden transformar multiplicaciones en adiciones, divisiones en restas, potencias en multiplicaciones y raíces en divisiones.

La forma matemática de expresar un algoritmo es:

$$\log_a x = b$$

Que se lee: el logaritmo en base a del número x es b

Cuando en un algoritmo la base es 10, el algoritmo recibe el nombre de algoritmo vulgar o común, pues es el que se utiliza de manera ordinaria.

Cuando en un algoritmo la base no aparece, automáticamente se deducirá que se trata de base 10, es decir: log 100 = $\log_{10}$

En los logaritmos comunes o vulgares de números que son potencia de la base, la cantidad de ceros es el valor del logaritmo, por ejemplo: log 100 =2

Debido a que el algoritmo es la función inversa de la exponencial, y la gráfica de $y = a^x$ toca el eje x, se puede indicar que no existe el algoritmo de cero o de un número negativo, en cualquier base.

$$\text{Log}_a \text{ (número negativo)} = \text{no existe}$$

Las propiedades de los logaritmos son:

1) $\log_a 1 = 0$

2) $\log_a a = 1$

3) $\log_a a^x = x$

4) $a^{\log ax} = x$

5) $\log_a (u\, v) = \log_a u + \log_a v$

6) $\log_a (u^n) = n \log_a u$

7) $\log_a (u / v) = \log_a u - \log_a v$

8) $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$

Ejemplo: Derivar $y = \frac{e^{x2}}{e^{x3-7}}$

Como el logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:

$y = \ln e^{x2} - \ln (e^{x3-7})$

$u = e^{x2}$ $\quad v = e^{x3-7}$

$u' = 2x\, e^{x2}$ $\quad v' = 3x^2\, e^{x3-7}$

Sustituyendo en la fórmula XVIII

$y' = \frac{2xe^{x2}}{e^{x2}} - \frac{3x^2e^{x3}}{e^{x3-7}}$ Por lo tanto, $y' = 2x - \frac{3x^2e^{x3}}{e^{x3-7}}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que para:

a) $y = \ln ((e^{x2+4})(e^{7x3-8})$; $y' = 2x+21x^2$

AUTOEVALUACION

Subraya la respuesta correcta:

1.- La función inversa se denota por la expresión matemática:

a) $-f$ b) $-f^1$ c) $\Delta f(x)$ d) f^{-1}

2.- Obtén el resultado de la derivada de función inversa, si $y = 3x^2$

a) $dy/dx = -6x$ b) $dy/dx = 6x$ c) $dx/dy = 6x$ d) $dx/dy\ 3x^2$

3.- La función circular que trata del coseno, está dada por la expresión matemática:

a) $y = \text{sen } x$ b) $f(x) = \cos x$ c) $f(x) = \cos^{-1} x$ d) $f(x) = x \cos$

4.- El $\lim_{x \to 0}$ sen x / x es igual a:

a) Indeterminado b) -1 c) 0 d) 1

5.- La derivada de $y = \text{sen}(3x^2 - 1)$

a) $6x \cos(3x^2-1)$ b) $\cos 18x^3 - 6x$ c) $-6x \cos(3x^2-1)$ d) $6x$

6.- La derivada de $y = \cos^3 x$

a) $-3\text{sen } x \cos^2 x$ b) $3 \text{ sen } x \cos^2 x$ c) $3 \text{ sen}^2 x \cos x$ d) $3 \cos^2 x$

7.- La derivada de $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{sen}^{-1} x$

a) $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)}}$ b) $y' = \dfrac{-x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2)}}$ c) $y' = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-x^2)}}$ d) $y' = \dfrac{x}{1} - \dfrac{1}{x}$

8.- La derivada de $y = \sqrt{(7 - x^2)}$

a) $-2x$ b) $\dfrac{-x}{7-2x}$ c) $\dfrac{x}{7-2x}$ d) $\dfrac{x}{-7+2x}$

9.- La derivada de $y = a^{4x2}$

a) $8x\ a^{4x2}$ b) a^{8x} c) $-8x\ a^{4x2} \ln a$ d) $8x\ a^{4x2} \ln a$

10.- ¿Cuál de las siguientes propiedades de los logaritmos no es válida?

a) $\log_a (u / v) = \log_a u - \log_a v$

b) $\log_a 1 = 0$

c) $\log_a a = 0$

d) $\log_a (u v) = \log_a u + \log_a v$

RESPUESTAS

1.- d

2.- b

3.- b

4.- d

5.- a

6.- b

7.- c

8.- b

9.- d

10.- c

UNIDAD 5

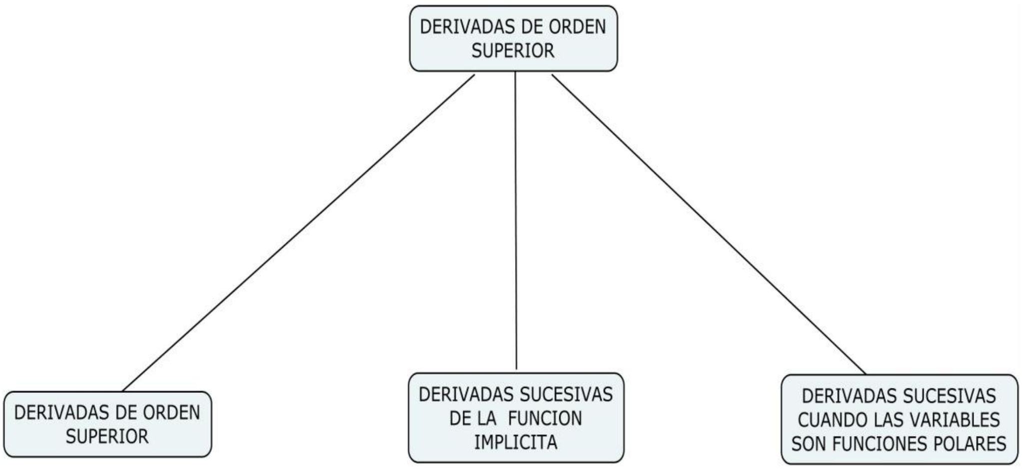
DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

OBJETIVO

El alumno aplicará los conocimientos adquiridos de derivadas y uso de fórmulas para resolver problemas de derivadas de orden superior, de funciones explícitas, implícitas o ecuaciones polares.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Hasta este momento se ha practicado el procedimiento para obtener la derivada de una función; esta derivada de la función original, también es una función, ya que está presente la variable independiente. Generalmente sucede que esta nueva función también sea derivable; en este caso, al resultado de esta nueva derivación se le denomina segunda derivada; a su vez, si esta segunda derivada se deriva, se obtendrá la tercera derivada y así sucesivamente. Las derivadas de orden son importantes para el desarrollo de funciones en serie, las cuales se estudiarán posteriormente.

Las derivadas de orden superior se aplican para funciones implícitas y explícitas.

Esta unidad tiene como finalidad que el alumno desarrolle la función hasta obtener el grado de derivada solicitado.

5.1 DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Las derivadas de orden superior son el resultado de derivar una función derivada anteriormente, y se nombran en el orden numérico de su desarrollo.

La forma de representar la primera derivada es de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

La notación para las derivadas posteriores se muestra a continuación:

Segunda derivada	*Tercera derivada*	*Cuarta derivada*
$\frac{d^2y}{dx} = y'' = f''(x)$	$\frac{d^3y}{dx} = y''' = f'''(x)$	$\frac{d^4y}{dx} = y'''' = f''''(x)$

Y así sucesivamente hasta el grado de orden superior de la derivada.

Caso 1: Si $y = 2x^4$ derivar hasta la quinta derivada.

$y = 2x^4$

$y' = 8x^3$

$y'' = 24x^2$

$y''' = 48x$

$y^{IV} = 48$

$y^{V} = 0$

Caso 2: Si $y = 2x^5 – 3x^2 + 6x$ calcular hasta la cuarta derivada.

$y = 2x^5 – 3x^2 + 6x$

$y' = 10x^4 – 6x + 6$

$y'' = 40x^3 - 6$

$y''' = 120x^2$

$y^{IV} = 240x$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Con tus palabras, indica cómo se puede diferenciar una función original de una derivada de orden superior.

2.- Demuestra que para:

a) $y = \sqrt[3]{(4 - 9x)}$ entonces $y''' = -270 / \sqrt[3]{(4 - 9x)^8}$

5.2 Derivadas sucesivas de la función implícita

Como ya se estudió, cuando es sumamente difícil o no es posible despejar la variable independiente, es necesario derivar mediante función implícita; la derivada sucesiva de ésta, se realiza con el mismo procedimiento que se describió en el tema anterior, y así obtener la segunda derivada, la tercera derivada, la cuarta derivada, etc.

En el siguiente ejercicio, se considera la ecuación de la hipérbola y se procede a obtener la derivada superior de segundo orden:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ desarrollando $\frac{b^2x^2 - y^2a^2}{a^2b^2} = 1$ por lo tanto, $b^2x^2 - y^2a^2 = a^2b^2$

Aplicando la derivación para una función implícita:

$2b^2x - 2a^2y\frac{dy}{dx} = 0$ despejando $\frac{dy}{dx} = \frac{2b^2x}{2a^2y}$ por lo tanto, $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$

Realizando nuevamente la derivación, considerando que y es función de x, da como resultado:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2y)\frac{d}{dx}(b^2x) - (b^2x)\frac{d}{dx}(a^2y)}{(a^2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(a^2y)\,b^2(1) - (b^2x)\left(a^2\frac{d}{dx}y + y\frac{d}{dx}a^2\right)}{a^4y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x\frac{d}{dx}}{a^4y^2}$$

Remplazando el valor de la primera derivada, se obtiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2b^2y - a^2b^2x\frac{(b^2x)}{(a^2y)}}{a^4y^2} = \frac{\frac{a^2b^2y^2 - b^4x^2}{y}}{a^4y^2} = \frac{a^2b^2y^2 - b^4x^2}{a^4y^3} = \frac{b^2(a^2y^2 - b^2x^2)}{a^4y^3}$$

Al multiplicar por -1: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b^2(b^2x^2 - a^2y^2)}{a^4y^3}$

Se observa que $b^2x^2 - y^2a^2 = a^2b^2$ de la ecuación original, así entonces,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2(a^2b^2)}{a^4y^3} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que para:

a) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ entonces $y''' = -3b^6x / a^4y^5$

5.3 Derivadas sucesivas cuando las variables son funciones polares

Cuando se desea conocer el comportamiento de un gráfico, generalmente se utiliza el plano en una sola línea o el plano cartesiano, aparte de las coordenadas polares. A continuación se desarrollan, a partir de las fórmulas de las derivadas ya establecidas, ejemplos que serán de utilidad:

Caso 1: Derivada de la función cotangente

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \frac{d}{dx}(u)} \quad \text{..... XXI}$$

Ejemplo: Derivar $f(x) = 2 \cot x / 3$

Si $u = \frac{x}{3}$ entonces, $\frac{du}{dx} = \frac{\frac{d(x)}{dx}}{3}$ por lo tanto, $u' = \frac{1}{3}$

Sustituyendo en la fórmula:

$$y' = 2(-\csc^2 u)\left(\frac{1}{3}\right)$$

Por lo tanto,

$$y' = -\frac{2}{3}\csc^2 \frac{x}{3}$$

Caso 2: Derivada de la función secante

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u \frac{d}{dx}(u)} \quad \text{.. XXII}$$

Ejemplo: Derivar $y = 6 \sec x / 3$

Si $u = \frac{x}{3}$ entonces, $\frac{du}{dx} = \frac{\frac{d(x)}{dx}}{3}$ por lo tanto, $u' = \frac{1}{3}$

Sustituyendo en la fórmula:

$$y' = 6 \left(\tan \frac{x}{3} \right) \left(\sec \frac{x}{3} \right) \left(\frac{1}{3} \right)$$

Por lo tanto,

$$y' = 2 \left(\tan \frac{x}{3} \right) \left(\sec \frac{x}{3} \right)$$

Caso 3: Derivada de la función cosecante

$$\boxed{\frac{d}{dx} (\csc u) = - \cot u \csc u \frac{d}{dx}(u)} \quad . \text{XXIII}$$

Ejemplo: Derivar $y = x^2 \csc 3x$

Este caso es del tipo $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

Así entonces,

$u = x^2$	$v = \csc 3x$
$u' = 2x$	$v' = - (\cot 3x) (\csc 3x) (3)$
	$v' = -3 (\cot 3x) (\csc 3x)$

Sustituyendo en la fórmula:

$$y' = (x^2) (- \cot 3x) (\csc 3x) (3) + (\csc 3x) (2x)$$

Por lo tanto,

$$y' = - 3x^2 (\cot 3x) (\csc 3x) + 2x (\csc 3x)$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que:

a) Si $y = \frac{1}{4} \cot 7x$ entonces, $y' = - \frac{7}{4} \csc^2 7x$

b) Si $y = \sec \sqrt{x+2}$ entonces, $y' = \frac{\tan \sqrt{x+2} \sec \sqrt{x+2}}{2 \sqrt{x+2}}$

AUTOEVALUACION

Subraya la respuesta correcta:

1.- ¿Cuál expresión no es una representación de notación de derivada de orden superior?

a) y’’’ b) f’(y) c) $\frac{d^3y}{dx}$ d) f’’(x)

2.- Si $y = 1 / x^3$ el resultado de la tercera derivada es:

a) $y''' = 1 / 3x^2$ b) $y''' = 60 / x^6$ c) $y''' = -60 / x^6$ d) $y''' = 60x^6$

3.- Si $s = 2t^4$ el resultado de la cuarta derivada es:

a) $s^{IV} = 48$ a) $s^{IV} = 0$ a) $s^{IV} = 48x$ a) $s^{IV} = 8t^2$

4.- ¿Cuál es un ejemplo de función implícita?

a) $s = \sqrt{a} + bt$ b) $y^2 = 4ax$ c) $y = 2 / x$ d) $x^3+y^3 = 1$

5.- Si: $4ax - y^2 = 0$ el resultado de la segunda derivada es:

a) $4a^2 / y^3$ b) $- 4a^2 / y^3$ c) $- 4y^3 / a^2$ d) $y^2 = 4ax$

6.- Si: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ la segunda derivada es:

a) $- 3b^6x / a^4y^5$ b) $- b^4 / a^2y^3$ c) $x^2+y^2 = 0$ d) b^4 / a^2y^3

7.- Si $x^2+y^2 = 0$ ¿cuál es la derivada?

a) Sin solución b) $-x / \sqrt{x^2}$ c) $x / \sqrt{x^2}$ d) $y = \sqrt{x}$

8.- La derivada resultante $- \cot u \csc u \frac{du}{dx}$ es producto de:

a) $\frac{d}{dx}$ (cot u) b) $\frac{d}{dx}$ (sec u) c) $\frac{d}{dx}$ (csc u) d) No es derivada

9.- Si f(x) = a csc 5x, su derivada es:

a) No tiene solución	b) y’ = - 5a csc 5x cot 5x
c) y’ = 5a csc 5x cot 5x	d) y’ = a csc x cot x

10.- tan u sec u du/dx es la derivada de la función:

a) secante b) cosecante c) cotangente d) seno

RESPUESTAS

1.- b

2.- c

3.- a

4.- d

5.- b

6.- b

7.- a

8.- c

9.- b

10.- a

UNIDAD 6

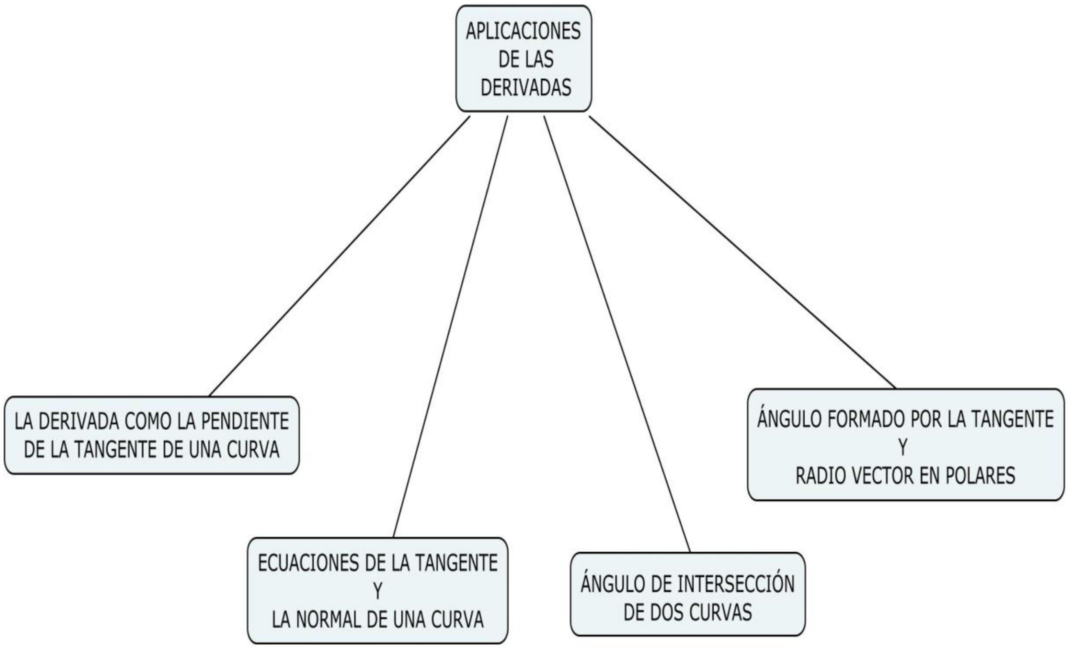
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

OBJETIVO

El alumno reconocerá funciones en las que aplicará los conocimientos adquiridos sobre derivadas y uso de fórmulas, para obtener ecuaciones, rectas y ángulos, que se relacionen con curvas.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCION

De acuerdo con los ejercicios que se realizaron previamente, se debieron haber adquirido conocimientos acerca de los procedimientos de solución de funciones, mediante fórmulas de derivación. En este sentido, son conocidos los términos de función explícita e implícita, así como la manera de obtener la derivada de la función implícita. El concepto y uso de derivadas de orden superior será trascendente para el desarrollo de esta unidad.

Todos los conocimientos adquiridos se plasman para obtener datos que son útiles en distintas ramas como la química, la física, la administración, la economía o la ingeniería, donde sea necesario saber el comportamiento de un evento. Mediante el conocimiento en el uso y manejo de las derivadas, se podrá conocer la pendiente de una curva, la ecuación de la tangente y la normal que genera, así como la curvatura o la longitud del radio de la derivada.

Se emplearán términos que se usan comúnmente en la geometría como pendiente, punto pendiente, tangente, normal; y se hará referencia a las expresiones matemáticas de cada una, pero sin profundizar, por lo que se recomienda el apoyo de apuntes de geometría analítica, para una mejor comprensión de los temas.

6.1 LA DERIVADA COMO LA PENDIENTE DE LA TANGENTE DE UNA CURVA

El valor de una derivada en un punto cualquiera de una curva, es el mismo de la pendiente que produce la tangente, a la curva en ese mismo punto. La expresión matemática resultante es:

$$m = \tan \alpha = \tan \theta_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Este análisis es muy útil para conocer el ángulo o grado de inclinación que genera un punto bien definido y una ecuación matemática.

Ejemplo: Calcular el valor de la pendiente m de la ecuación $y = x^3 - 4$ en el punto cuyas coordenadas son: (1, -3)

Solución:

Se requiere derivar para conocer la pendiente en cualquiera de los puntos.

$y' = 3x^2$

Como se requiere saber la pendiente en un punto en el punto específico x=1, se sustituye:

$m = 3x^2 = 3(1)^2 = 3$

Para saber el valor del ángulo que genera la pendiente se requieren tablas de valores naturales de las funciones trigonométricas o una calculadora, así entonces:

$\tan \alpha = 3$

$$\alpha = \frac{3}{\tan} = \tan^{-1} 3$$

Por lo tanto, α = 71.565º

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que:

a) $x^2 + y^2 = 13$ en el punto (2, 3) tiene como pendiente $m = -2/3$

b) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(16 - x^2)}}$ cuando x = 2 tiene como pendiente $m = \sqrt{3} / 36$

6.2 Ecuaciones de la tangente y la normal de una curva

Para obtener la ecuación de la tangente en un punto especifico, dada la ecuación de una curva cualquiera, es fundamental recordar la relación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Ejemplo: Determinar la ecuación de la tangente a la curva $y = x^3 - 5x$ en el punto de abscisa $x = 2$

Solución:

Se obtiene la pendiente:

$y' = 3x^2 - 5.$

Se calcula el valor de la pendiente para el punto específico $x = 2$

$f`(-2) = 3(2)^2 - 5 = 3(4) - 5 = 7.$

Por lo tanto, $m = 7$

Como el problema no proporciona el valor de la ordenada, se calcula:

$f(2) = (2)^3 - 5(2) = 8 - 10 = -2$

Por lo tanto, $y = -2$

Considerando que los valores de abscisa y ordenada pertenecen a un punto determinado, es necesario aclarar que: $x_1 = 2$, $y_1 = -2$.

Sustituyen los valores en la relación punto pendiente:

$y - (-2) = 7\,(x - (2))$

$y + 2 = 7x - 14$

$0 = 7x - y - 14 - 2$

La ecuación de la recta tangente es: $7x - y - 16 = 0$

Para obtener la ecuación de la normal, nuevamente es necesario recurrir a conceptos de geometría analítica, los cuales indican que la pendiente de una recta perpendicular a ella es:

$$-\frac{1}{m}$$

Sustituyendo en la relación punto-pendiente:

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

Continuando con el ejemplo, para obtener la ecuación de la normal a la curva:

$$y - (-2) = -\frac{1}{7}(x - (2))$$

$$y + 2 = -\frac{x}{7} + \frac{2}{7}$$

Se multiplica toda la igualdad por 7

$7y + 14 = -x + 2$

$7y + x + 14 - 2 = 0$

La ecuación de la recta normal es: $x + 7y + 12 = 0$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Grafica la curva, la recta tangente y la recta de la normal del ejemplo descrito en este tema.

2.- Si la ecuación de la curva es: $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 3$, considerando el punto (1, 2), demuestra que:

a) La ecuación tangente es: $4x - y - 2 = 0$

b) La ecuación normal es: $x + 4y - 9 = 0$

6.3 Ángulo de intersección de dos curvas

Cuando las tangentes de dos curvas cruzan en un mismo punto, generan lo que se denomina *ángulo de intersección de dos curvas*. Para calcular este ángulo es necesario realizar los siguientes pasos:

1) Obtener las coordenadas de los puntos de intersección que existen entre las dos ecuaciones.
2) Debido a que pueden ser varios los puntos donde cruzan las tangentes, es necesario definir cuál se utilizará.
3) Utilizando las derivadas de las ecuaciones, se obtienen las dos pendientes, m_1 y m_2
4) Se calcula el ángulo mediante la siguiente relación de geometría analítica:

$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

El orden de las pendientes en el denominador no altera el resultado, pero en el numerador si lo altera, por lo que es necesario determinar cuál es la pendiente m_1 y cuál es la pendiente m_2; de esta forma, se debe considerar lo siguiente:

1) m_2 es la pendiente de la recta que forma el ángulo mayor con sentido positivo respecto al eje de las abscisas.
2) m_1 es la pendiente de la recta que forma el ángulo menor respecto al eje de las abscisas.
3) Debido a que el valor de función tangente puede ser positivo o negativo, considerar que:
   a) m_2 es mayor y m_1 es menor, si las dos pendientes son positivas.
   b) Si las pendientes tienen diferente signo, m_2 es la pendiente negativa y m_1 la pendiente positiva.
   c) Si las pendientes son negativas, m_2 es la mayor en valor absoluto.

Ejemplo: Calcular el ángulo que forman las curvas $x^2 + 3y^2 = 7$ con $2x^2 - y^2 = 7$

Paso 1

Como el problema no indica la coordenada de intersección, se puede utilizar cualquier método para encontrar este punto; para este ejemplo se utiliza el método de reducción (suma y resta).

$x^2 + 3y^2 = 7$…..Ec1 Se multiplica por -2

$2x^2 - y^2 = 7$…..Ec2

$-2x^2 - 6y^2 = -14$

$\underline{2x^2 - y^2 = \quad 7}$

$-7y^2 = -7$

$y = \sqrt{(7 / 7)}$. El resultado de y=1

Sustituyendo este valor en la ecuación 1

$x^2 + 3(1)^2 = 7$

$x = \sqrt{(7 - 3)}$. El resultado de x=2

Paso 2

Debido a que sólo hay un punto, se usan las coordenadas (2, 1).

Paso 3

$x^2 + 3y^2 = 7$	$2x^2 - y^2 = 7$
$x^2 + 3y^2 - 7 = 0$	$2x^2 - y^2 - 7 = 0$
Derivando	Derivando
$2x + 6y \frac{dy}{dx} = 0$	$4x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$
$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{6y}$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{-2y} = \frac{2x}{y}$
$m = -\frac{1(2)}{3(1)} = -\frac{2}{3}$	$m = \frac{2(2)}{(1)} = 4$

Paso 4

Considerando el inciso 3-b, se dan valores a las pendientes $m_1 = 4$, $m_2 = -2/3$

$$\tan \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

$$\tan \theta = \frac{\left(\frac{-2}{3}\right) - (4)}{1 + (4)\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{-\frac{14}{3}}{-\frac{5}{3}} = \frac{14}{5}$$

$\Theta = \tan^{-1} (14 / 5)$

Por lo tanto, el ángulo de intersección es: 70.3461º

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Grafica la curva, la recta tangente y la recta de la normal de cada ecuación del ejemplo descrito en este tema.

2.- Demuestra que el ángulo que forman las curvas $x^2 + y^2 = 16$ con $x - y = 4$ es de 45º (se sugiere encontrar las coordenadas por el método de sustitución).

6.4 ÁNGULO FORMADO POR LA TANGENTE Y RADIO VECTOR EN POLARES

La curvatura en un punto (P) cualquiera de una curva, tiene su representación con la letra K, y ésta a su vez es igual a la variación de la inclinación (r) de la tangente en el punto, entre la unidad de longitud cuyo arco se representa con la literal s, la expresión matemática es:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} = \frac{dr}{ds}$$

Δr representa el ángulo y se mide en radianes, mientras que la longitud del arco se mide en unidades de longitud, así entonces, la unidad de la curvatura en un punto, es un radian por unidad de longitud.

La fórmula para obtener la curvatura en coordenadas rectangulares es:

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

No se considera el signo de K, sólo el valor absoluto.

La fórmula para obtener la longitud del radio de curvatura es:

$$R = \frac{1}{K} = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''} \qquad (\text{Con } K \neq 0)$$

Ejemplo: Determinar la curvatura y la longitud del radio de curvatura de la parábola $y^2 = 12x$ en el punto (3, 6)

Solución:

Obtener la primer derivada	Obtener la segunda derivada
$2y \frac{dy}{dx} = 12$	$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{6}{y}\right) = \frac{y(0) - 6\frac{dy}{dx}}{y2}$
$\frac{dy}{dx} = \frac{12}{2y} = \frac{6}{y}$	Se sustituye el valor de dy/dx
$y' = 6 / y$	$y'' = - 6 \left(\frac{6}{\ }\right)$

$$\frac{y}{y^2}$$

$$y'' = -\frac{36}{y^3}$$

Sustituir los valores en la fórmula de la curvatura:

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

$$K = \frac{-\frac{36}{y^3}}{\left[1 + \left(\frac{6}{y}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Como se tiene el punto (3, 6), entonces y=6

$$K = \frac{-\frac{36}{6^3}}{\left[1 + \left(\frac{6}{6}\right)^2\right]^{3/2}} = -\frac{1}{6\,[1+1]^{3/2}} = -\frac{1}{6\sqrt{2}^3} = -\frac{1}{6 \cdot 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{12\sqrt{2}} = -\frac{1\sqrt{2}}{12\sqrt{2}\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}.}{12(2)}$$

La curvatura es: $K = -\frac{\sqrt{2}}{24}$

Sustituir en la fórmula para calcular la longitud del radio de curvatura:

$$R = \frac{1}{K} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{24}} = \frac{24}{-\sqrt{2}} = \frac{24\sqrt{2}}{-\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{24\sqrt{2}}{-2}$$

El radio de la curvatura es: $R = -\frac{6.}{\sqrt{2}}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que la curvatura y longitud del radio de curvatura de:

a) $2y = x^2$ en (2, 2) es $K = 1 / (5\sqrt{5})$, $R = 5\sqrt{5}$

b) $y = x^2$ en (2, 4) es $K = 2 / (17\sqrt{17})$, $R = 17\sqrt{17} / 2$

AUTOEVALUACION

Subraya la respuesta correcta:

1.- Dado el punto (3, 9), ¿qué ecuación da como resultado una pendiente m = 6?

a) $x = y^2$ b) $y' = 2x$ c) $y = x^2$ d) $y = 6$

2.- La ecuación $x^2 + y^2 + 3x = 9$ en el punto (2, 1) tiene una pendiente:

a) $m = 11$ b) $m = -7/2$ c) $m = 2/7$ d) $m = 7/2$

3.- Con la abscisa ½ y la ecuación $y = x^3 - 2x + 1$, se genera la pendiente:

a) $m = 1/6$ b) $m = -5/4$ c) $m = 5/4$ d) $m = -4/5$

4.- Es la ecuación de la relación punto-pendiente, útil para encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva:

a) $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ b) $-\frac{1}{m}$

c) $y + y_1 = m(x + x_1)$ d) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$

5.- La ecuación de la tangente a la curva $y=2x^3-x^2+2x-12$ en el punto (2, 4) es:

a) $22x - y - 40=0$ b) $22x + y + 40=0$ c) $6x^2 - 2x + 2 =0$ d) $22x - y - 48 =0$

6.- La ecuación normal a la curva $xy=9$ en el punto de abscisa $x=3$ es:

a) $x - y = 0$ b) $x + y = 0$ c) $-x + y = 0$ $y = 9/x$

7.- La pendiente m_2 es la mayor en valor absoluto si:

a) $m = -\frac{1}{m}$ d) Las pendientes son positivas c) Las pendientes tienen diferente signo d) Las pendientes son negativas

8.- El ángulo de intersección que forma la curva $x^2+2y^2 = 3$ con $3x^2 - y^2 = 2$ en el punto (1, 1) es:

a) $\theta = 18.31º$ b) $\theta = 81.31º$ c) $\theta = 31.81º$ d) $\theta = - 81.31º$

9.- La fórmula para obtener la longitud del radio de curvatura, tiene como excepción que:

a) $K = P$ b) $K = 1$ c) $K \neq 0$ d) $K = 0$

10.- La curvatura de la función $xy = 9$ en el punto (3, 3) es:

a) $K = - 1 / 3\sqrt{2}$ b) $K = 3\sqrt{2}$ c) $K = 1 / \sqrt{2}$ d) $P = 9$

RESPUESTAS

1.- c

2.- d

3.- b

4.- d

5.- a

6.- a

7.- d

8.- b

9.- c

10.- c

UNIDAD 7

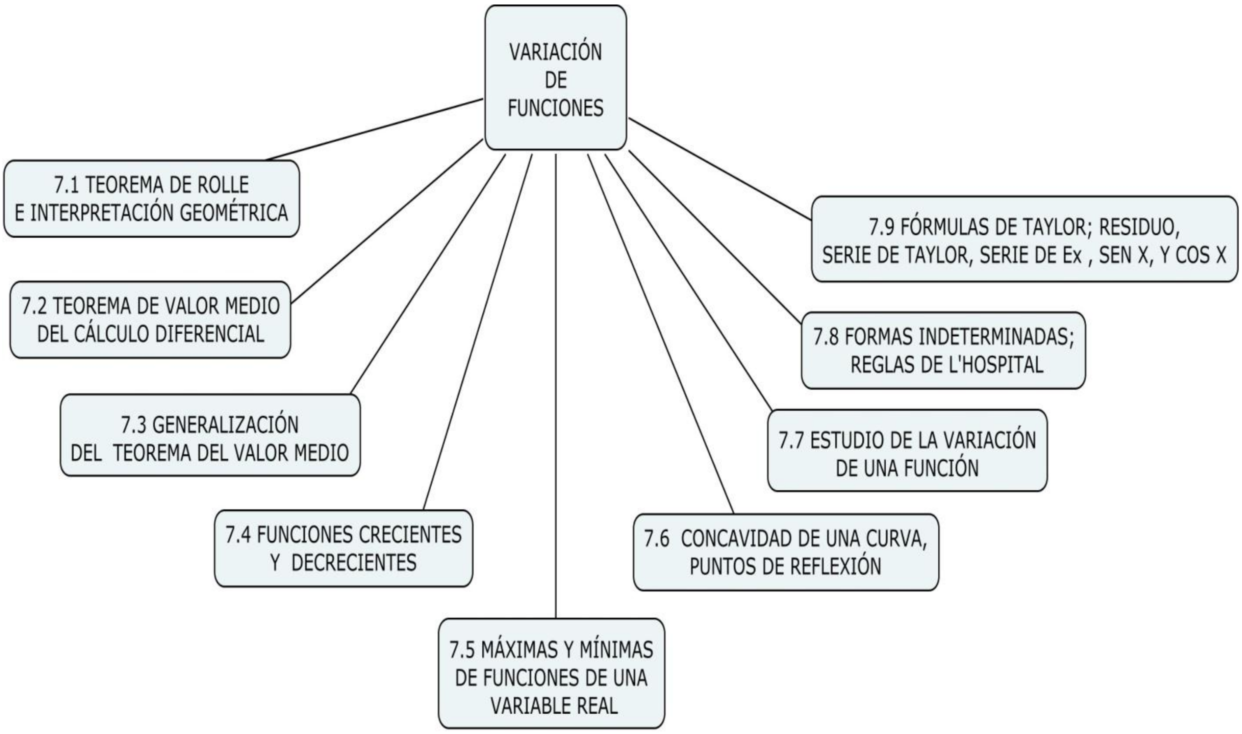
VARIACIÓN DE FUNCIONES

OBJETIVO

El alumno interpretará teoremas, en los que aplicará los conocimientos adquiridos sobre derivadas y el uso de fórmulas, para obtener y justificar resultados.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCION

En esta última unidad se desarrollarán todos los conocimientos adquiridos para comprobar teoremas, algunos de ellos facilitan la obtención de indeterminaciones matemáticas, como lo muestra el teorema de L'Hospital. Los teoremas de Rolle o de Lagrange son de utilidad para localizar los puntos dentro de la curva, que forman una tangente paralela al eje de las abscisas. Además, se examinan los conceptos de máximos y mínimos relativos, y la concavidad de las curvas, así como su procedimiento, con ejemplos claros que guían hacia la obtención de las coordenadas de estos puntos, al igual que de los puntos de inflexión.

Esta unidad retoma conceptos que se abordaron desde las primeras unidades, como intervalos abiertos y cerrados, límites, discontinuidades matemáticas, entre otros; por ello, sería bastante útil un repaso para obtener un conocimiento significativo de los temas de esta unidad.

7.1 TEOREMA DE ROLLE E INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

El teorema de Roll es fundamental en el desarrollo teórico del cálculo infinitesimal. Para que se cumpla el teorema de Rolle, se deben satisfacer los siguientes puntos:

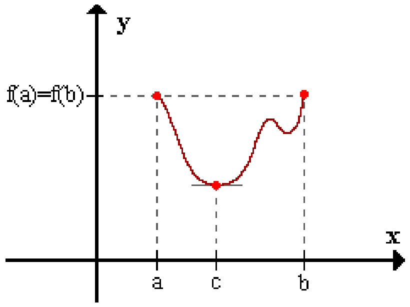
a) Debe ser una función continua en un intervalo cerrado de a hacia b: [a, b]

b) Debe ser derivable en un intervalo abierto entre los mismos valores: (a, b)

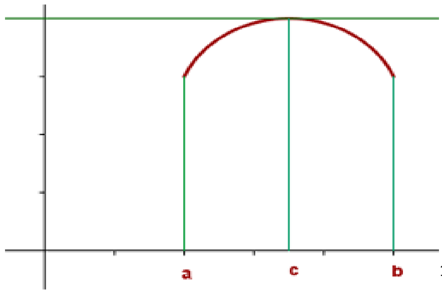
c) La función en ambos intervalos debe ser la misma: f(a) = f(b)

Entonces, existe un valor (c) dentro de este intervalo, cuya derivada dé como resultado cero: c ε (a, b) / f'(c) = 0

Gráficamente, lo que indica el teorema de Rolle, es que hay un punto en la curva, en donde la tangente es paralela al eje de las abscisas.



[17]



[18]

Ejemplo: Comprobar que la función $f'(x) = x^3 - 4x + 3$ cumple con el teorema de Rolle en el intervalo [0, 2]

Solución:

$f(0) = (0)^3 – 4(0) + 3 = 3$

$f(2) = (2)^3 – 4(2) + 3 = 3$. Se cumple con la condición de f(a) = f(b)

Si $y = x^3 - 4x + 3$. Derivando: $y' = 3x^2 – 4$

La derivada se iguala con cero, y se despeja x:

$3x^2 – 4 = 0$ quedando: $x = \pm\sqrt{4/3}$

[17] http://matematica.wikia.com/wiki/Archivo:Rolle.gif
[18] http://www.vitutor.com/fun/6/teorema_rolle.html

Como el intervalo va de 0 a 2, el valor de x para encontrar una tangente paralela al eje de las abscisas es: $x = \sqrt{4/3}$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Observa el video en: http://www.youtube.com/watch?v=PRXh_HmsjaY y grafica el ejemplo que ahí se expone para comprobar el teorema de Rolle.

7.2 TEOREMA DE VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Este teorema también se conoce como teorema de valor medio de Langrange o teorema de los incrementos finitos; este teorema más que resolver problemas matemáticos, tiene como principal finalidad demostrar otros teoremas.

Para que se pueda considerar el teorema del valor medio, es necesario que la función cumpla con algunas condiciones, éstas son:

a) La función debe ser continua en un intervalo cerrado: [a, b]
b) La función debe ser derivable en el intervalo abierto: (a, b)

Si se cumplen estas dos condiciones, entonces existe un punto c, localizado entre los intervalos a y b, matemáticamente se expresa:

$$c \in (a, b) \,/\, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ejemplo: Localizar el punto donde se cumple el teorema de valor medio

Si $f(x) = -\frac{2}{x}$ [1, 4]

Solución:

$f(b) = f(4) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$f(a) = f(1) = -\frac{2}{1} = -2$

Por lo tanto, la función es continua en el intervalo.

$$f'(x) = -2x^{-1} = -2(-1)x^{-1-1} = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$$

La función si es derivable, entonces:

$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{b - a} = \frac{-\frac{1}{2} - (-2)}{4 - 1} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{4}{2}}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$

Si f'(x) = f'(c), y considerando el teorema de valor medio:

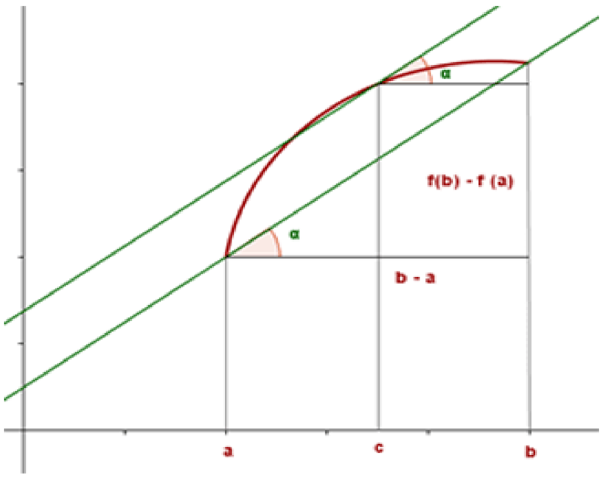
$\frac{2}{c^2} = \frac{1}{3}$ despejando c, para encontrar el valor buscado: c = √6

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que $f(x) = x^{2/3}$ en el intervalo cerrado [0, 1] cumple con el teorema del valor medio en el punto c = 8 / 27

7.3 Generalización del teorema del valor medio

Se aplica el teorema del valor medio, si existe una función delimitada entre un intervalo inicial "a" y un intervalo final "b", y cumple con una continuidad; además de que se puedan diferenciar los puntos dentro de estos intervalos; entonces, existirá un punto en la circunferencia (c), que genere una tangente paralela a la línea que se forma entre los intervalos originales; observa la gráfica.



[19]

Ejemplo: Si $f(x) = x^2$; a=2, b=4, encontrar la coordenada donde se genere la tangente paralela con la recta A, B

[19] http://www.vitutor.com/fun/6/teorema_lagrange.html

Solución:

$f(b) = f(4) = (4)^2 = 16$

$f(a) = f\ (2) = (2)^2 = 4$

$f'(x) = 2x$

Por analogía, $f'(c) = 2c$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$2c = \frac{16 - 4}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$, despejando $c = \frac{6}{2} = 3$

Se sustituye la coordenada de c en la función original: $f(3) = (3)^2 = 9$

La secante, puntos (2, 4), (4, 16), es paralela con la tangente, punto: (3,9).

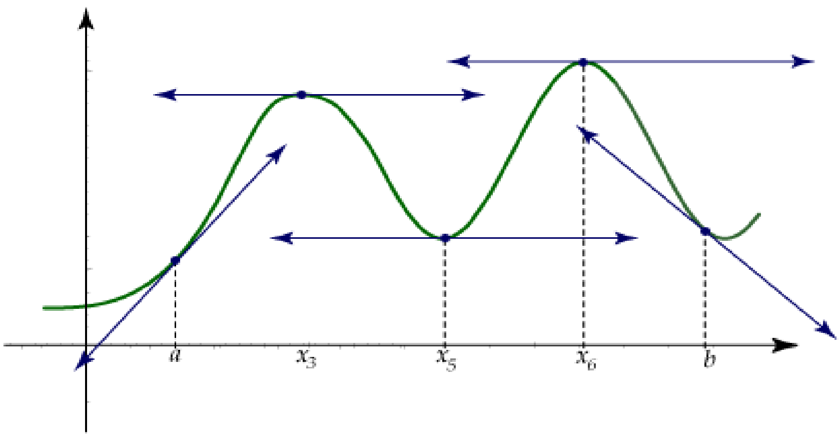
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Graficar el ejemplo descrito en este tema.

2.- Observa el video en: http://www.youtube.com/watch?v=mX2OPpof2bg Grafica el ejemplo que se expone en ese sitio para comprobar el teorema del valor medio.

7.4 FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Una función es creciente si a medida que el valor de x aumenta, el valor de f(x) disminuye. La función es decreciente si a medida que el valor de x aumenta, el valor de f(x) disminuye.



[20]

[20] http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesderivada/html/node2.html

Aplicando las derivadas, se puede afirmar que un punto en particular, pertenece a una función creciente, si el valor de la primera derivada es positivo; y es decreciente si es negativo.

Ejemplo: Si $f(x) = x^3 - 3x + 2$, determinar los intervalos para los cuales la función es creciente y aquellos para los que la función es decreciente.

Solución:

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Se obtiene el valor de x; para ello, se iguala con cero la primera derivada.

$3x^2 - 3 = 0$

$x = \sqrt{\left(\frac{3}{3}\right)}.$

Por ser una raíz, los valores son: $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$

Se crea una tabla para $f'(x) = 3x^2 - 3$, y así determinar los intervalos de la función, donde es creciente y decreciente.

$f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 3(4) - 3 = 12 - 3 = 9$ Como $9 > 0$ es creciente

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 3 = 3(1) - 3 = 3 - 3 = 0$ No es creciente ni decreciente

$f'(0) = 3(0)^2 - 3 = 3(0) - 3 = 0 - 3 = -3$ Como $-3 < 0$ es decreciente

$f'(1) = 3(1)^2 - 3 = 3(1) - 3 = 3 - 3 = 0$ No es creciente ni decreciente

$f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 3(4) - 3 = 12 - 3 = 9$ Como $9 > 0$ es creciente

Cuando se elabora una tabla contemplando solamente el signo, ésta queda:

X	- 2	-1	0	1	2
f'(x)	+	0	-	0	+

Como se observa, la tabla muestra que:

- La función es creciente para valores de $x < -1$
- La función es decreciente para valores de $-1 < x < 1$
- La función es creciente para valores de $x > 1$

Se puede comprobar esta conclusión, al sustituir en la función, los mismos valores que se asignaron a la variable independiente para la primera derivada:

$f(-2) = x^3 – 3x + 2 = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = - 8 + 6 + 2 = 0$; la coordenada es (-2, 0)
$f(-1) = x^3 – 3x + 2 = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = - 1 + 3 + 2 = 4$; la coordenada es (-1, 4)
$f(0) = x^3 – 3x + 2 = (0)^3 - 3(0) + 2 = 0 + 0 + 2 = 2$; la coordenada es (0, 2)
$f(1) = x^3 – 3x + 2 = (1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$; la coordenada es (1, 0)
$f(2) = x^3 – 3x + 2 = (2)^3 - 3(2) + 2 = 8 - 6 + 2 = 4$; la coordenada es (2, 4)

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Grafica el ejemplo descrito en este tema.
2.- Demuestra de manera analítica y gráfica, que $f(x) = 6x^3 – 4x^2 – 5x + 1$ es:

a) Decreciente en $x = - 1/3$
b) Decreciente en $x = ½$
c) Creciente en $x = 2$

7.5 MÁXIMAS Y MÍNIMAS DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

Cuando una función tiene un comportamiento creciente y llega a un punto donde no es creciente ni decreciente, entonces está en su punto máximo relativo; si al contrario, tiene un comportamiento decreciente y llega a un punto donde no es creciente ni decreciente, está en su punto mínimo relativo. Se dice que son máximos o mínimos relativos, ya que no necesariamente son los puntos mayor y menor de una función. Los valores de x, donde exista un punto máximo relativo o mínimo relativo, se denominan valores críticos.

Un procedimiento para obtener los máximos y mínimos relativos se conoce como criterio de la primera derivada, y consta de los siguientes pasos:

a) Calcular la primera derivada de la función.

b) La derivada obtenida se iguala con cero y se despeja la variable independiente, con lo que se obtiene la raíz de x. Estos valores son el punto crítico máximo, mínimo o ninguno de los dos.

c) Primero, se da un valor menor a la raíz encontrada, y se sustituye en la derivada; se da un valor mayor a la raíz encontrada, y se sustituye en la derivada. Se analiza f’(x), si la función pasa de negativa a positiva, entonces tiene un mínimo.

d) Si al analizar la derivada, cambia de positiva a positiva, o de negativa a negativa, no es posible señalar si en ese punto tiene un máximo o un mínimo relativo.

e) La coordenada del máximo o mínimo relativo se obtiene al calcular el valor de f(x) con el valor de la raíz encontrada.

Ejemplo: Calcular los máximos o mínimos relativos de $y = x^2 + 4x + 2$

a) $y' = 2x + 4$

b) $2x + 4 = 0$; $x = -4 / 2$; $x = -2$

c) Valor menor de la raíz encontrada: $x = -3$; $y'(-3) = 2(-3) + 4 = -6 + 4 = -2$

Valor mayor de la raíz encontrada: $x = -1$; $y'(-1) = 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2$

d) Como cambia de negativo a positivo, se trata de un punto mínimo.

e) $f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$

Por lo tanto, la función $y = x^2 + 4x + 2$ tiene un punto mínimo en (-2, -2).

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que $y = x^3 - x^2 - 5x + 7$ tiene:

a) Un punto máximo en (-1, 10)

b) Un punto mínimo en (5/3, 14/27)

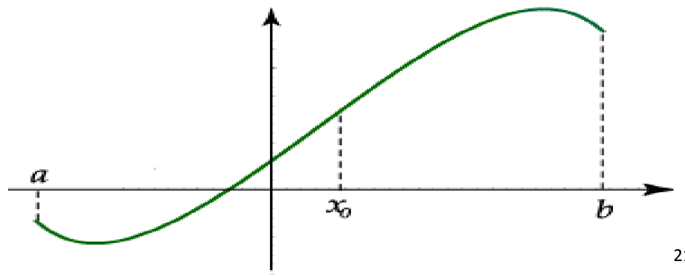
7.6 Concavidad de una curva, puntos de reflexión

En el tema anterior, se indicó que una función tiene su punto máximo y/o mínimo relativo, y que varía dependiendo del comportamiento que presente la función; de igual forma, la curva puede ser cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo, y puede o no, tener su punto de inflexión.

La parte interna de una circunferencia es definida geométricamente como cóncava; haciendo la analogía con base en los gráficos elaborados, se concluye que:

- Cuando en una función, la tangente queda por debajo de la curva, el arco es cóncavo hacia arriba.
- Cuando en una función, la tangente queda por encima de la curvatura, el arco es cóncavo hacia abajo.

El punto de inflexión es el punto donde la curva cambia de concavidad.



[21]

En la figura se observa una curva, donde xo es el punto de inflexión; del intervalo a, hasta el punto de inflexión, la curva es cóncava hacia arriba, mientras que del punto de inflexión al intervalo b, la curva es cóncava hacia abajo.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Ejemplifica tres gráficas de funciones donde indiques el punto de inflexión. Marca con azul la(s) parte(s) cóncavas hacia arriba y con rojo la(s) parte(s) cóncavas hacia abajo.

7.7 ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN

[21] http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/CALCULODIFERENCIAL/curso-elsie/aplicacionesderivada/html/node5.html

Un criterio para obtener el punto de inflexión, es el de la segunda derivada, los pasos son:

a) Hacer el cálculo de la primera y la segunda derivada.

b) Igualar la segunda derivada con cero y obtener las raíces.

c) En la segunda derivada, se sustituyen un valor menor y un valor mayor a la raíz encontrada. Se analizan los valores obtenidos, si el signo es negativo, la curva es cóncava hacia abajo, si es positivo es cóncava hacia arriba. Si existe cambio de signo, hay un punto de inflexión, si no hay variación en los signos, no existe punto de inflexión.

d) Se realiza el mismo procedimiento del inciso anterior con todas las raíces obtenidas.

e) Para obtener las coordenadas del punto de inflexión, se sustituye el valor de la raíz en la función original.

Ejemplo: Calcular los puntos de inflexión de la función $y = (- x + 2)^3$

A) $y = - x^3 + 6x^2 – 12x + 8$

$y' = - 3x2 + 12x – 12$

$y'' = - 6x + 12$

B) $- 6x + 12 = 0$

$6x -12 = 0$

$x = \frac{12}{6}$ Por lo tanto, $x = 2$

C) Se da un valor menor a la raíz encontrada: $x = 1$

$f''(1) = - 6 (1) + 12 = - 6 + 12 = 6$ (cóncava hacia arriba)

Se da un valor mayor a la raíz encontrada: $x = 3$

$f''(3) = - 6 (3) + 12 = - 18 + 12 = - 6$ (cóncava hacia abajo)

D) Como sólo hay una raíz, no se hacen más cálculos.

E) $f(2) = - (2)^3 + 6(2)^2 – 12(2) + 8$

$= - 8 + 24 – 24 + 8$

$= 0$

Por lo tanto, las coordenadas del punto de inflexión son: (2, 0)

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Observa el video en: http://www.youtube.com/watch?v=OoKdlZkDGQk y grafica el ejemplo que se muestra en ese sitio.

2.- Demuestra que la función $y = x^4 + 2x^3 - 7$ tiene que las coordenadas de los puntos de inflexión son: (0, -7) y (-1, - 8)

7.8 Formas indeterminadas; reglas de L'Hospital

En la segunda unidad, se expusieron temas relacionados con la continuidad de una función y su indeterminación; se indicó que se podía encontrar el punto de ruptura por medio de los límites, sin embargo, el procedimiento es laborioso. Se debe recordar, que una indeterminación matemática se presenta cuando en un cociente, el denominador da como resultado cero.

La regla de L'Hospital permite obtener un resultado del límite de una forma muy simple; el procedimiento consiste en derivar de forma independiente, el numerador y el denominador; cuando se obtiene la derivada, se sustituye el valor de la variable independiente, si después de este paso sigue presentándose una indeterminación matemática, se deriva nuevamente de forma independiente numerador y denominador, y así sucesivamente hasta encontrar un resultado; matemáticamente se expresa:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f''(x)}{g''(x)}$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x}$

Sustituyendo de forma directa:

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \frac{(0)^2 - 2(0)}{(0)} = \frac{0}{0}$ (indeterminación matemática)

Aplicando la regla de L'Hospital:

$\lim_{x \to 0} \frac{2x - 2}{1} = \frac{2(0)^2 - 2}{1} = \frac{0 - 2}{1} = -2$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que:

a) $\lim_{x \to 1} = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{3}{2}$

b) $\lim_{x \to 1} = \dfrac{x^2 - 16 + 2}{x^2 + x - 20} = \dfrac{8}{9}$

7.9 Fórmulas de Taylor; residuo, serie de Taylor, serie de E^X, Sen x, y cos x

Las fórmulas o serie de Taylor tienen infinidad de aplicaciones, como: estimación de números irracionales acotando su error, estimación de integrales, estudio de orden y parámetro principal de infinitésimos, estudio de puntos estacionarios en funciones, etc. La expresión matemática que describe la serie de Taylor de forma desarrollada es:

$$f(x) = f(a) + \frac{f`(a)(x-a)}{1!} + \frac{f``(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$ [22]

Ejemplo: Evaluar el polinomio $f(x) = 7x^3 + x^2 + 8$ y a sus tres primeras derivadas en potencias de $(x – 1)$.

Solución:

$x - 1 = 0$, al despejar $x = 1$

$f(x) = 7x^3 + x^2 + 8$	$f(1)=7(1)^3 + (1)^2 + 8 = 16$
$f'(x) = 21x^2 + 2x$	$f'(1) = 21(1)^2 + 2(1) = 23$
$f''(x)=42x + 2$	$f''(1)=42(1) + 2 = 44$
$f'''(x)=42$	$f''(1)=42$

Sustituyendo los valores en la serie:

$$f(x) = 16 + \frac{23(x-1)}{1!} + \frac{44(x-1)^2}{2!} + \frac{42(x-1)^3}{3!}$$

$$f(x) = 16 + \frac{23(x-1)}{1} + \frac{44(x-1)^2}{1(2)} + \frac{42(x-1)^3}{1(2)(3)}$$

$$f(x) = 16 + 23(x-1) + 22(x-1)^2 + 7(x-1)^3$$

[22] Granville, William Anthony, Cálculo diferencial e integral, p.450

Se puede comprobar igualando la función original, con la función encontrada:

$7x^3 + x^2 + 8 = 16 + 23(x – 1) + 22(x – 1)^2 + 7(x – 1)^3$

$7(1)^3 + (1)^2 + 8 = 16 + 23(1-1) + 22(1-1)^2 + 7(1-1)^3$

$16 = 16$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1.- Demuestra que en potencias de (x – 1) para la tercera derivada de:

$\ln x = x – 1 – \frac{1}{2} (x – 1)^2 + 1/3 (x – 1)^3$

AUTOEVALUACION

Subraya la respuesta correcta:

1.- La función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ cumple el teorema de Rolle en las coordenadas:

a) [x, y]	b) [-1, 3]	c) [1, 3]	d) [1, -3]

2.- La función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ [0, 1]

a) Cumple con el teorema de Rolle en x = - 3	b) No cumple con el teorema de Rolle	c) Cumple con el teorema de Rolle en x = 3	d) No es función

3.- La función $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en el intervalo cerrado [0, 1] cumple con el teorema del valor medio de Lagrange en el punto:

a) $c = -2$	b) $c = \frac{1}{2}$	c) $c = 2$	d) $c = 3$

4.- Se cumple el teorema del valor medio si: existe un punto c, perteneciente a la curva, entre a y b, en donde la recta tangente es _________ a la recta que pasa por a y b.

a) Paralela	b) Perpendicular	c) Simétrica	d) Tangente

5.- La función $y = 2x^3 - 6x + 1$, ni crece ni decrece en el punto:

a) $x = -1$	b) $x = 0$	c) $x = 1$	d) $x = 2$

6.- La función $y = -3x^2$ se caracteriza por tener:

a) Ningún punto crítico	b) Mínimo en (0, 0)	d) Mínimo en (-2, -2)	d) Máximo en (0, 0)

7.- Cuando en una función, la tangente queda por encima de la curvatura, el arco es:

a) Cóncavo hacia abajo.	b) Cóncavo hacia un lado.	c) Punto de inflexión.	b) Cóncavo hacia arriba.

8.- La función y = 5 – 2x – x^2 tiene como punto de inflexión las coordenadas:

a) (-2, 0)	b) No hay	c) (0, -2)	d) - 2

9.- Si f(x) = x^2 – 4 / (x – 2), el resultado de $\lim_{x \to 2}$ es:

a) – 4	b) 4	c) 0	d) 2

10.- El primer término que se emplea en la serie de Taylor es

a) f'(a)	b) f'''(a)	c) f(y)	d) f(a)

RESPUESTAS

1.- c

2.- b

3.- b

4.- a

5.- c

6.- d

7.- a

8.- b

9.- b

10.- d

BIBLIOGRAFIA

Conamat, *Matemáticas simplificadas,* México, Pearson, 2009.

Fuenlabrada de la Vega Trucios, Samuel, *Cálculo diferencial*, México, McGraw-Hill, 2006.

Granville, William Anthony, *Cálculo diferencial e integral*, México, Limusa, 2009.

GLOSARIO

Cociente: Resultado de la división de dos números.

Conjunto: Colección de números.

Contradominio: Variable ubicada en el eje de las ordenadas (y).

Denominador: Cantidad en la que se divide un entero; es la parte que se encuentra debajo de una fracción.

Dominio: Variable ubicada en el eje de las abscisas (x).

Función explícita: Función en donde la variable está despajada.

Función implícita: Función en donde la variable no está despejada.

Función: Correspondencia entre dos conjuntos, con la condición de que para cada elemento de uno sólo corresponda uno del otro conjunto.

Incremento: Diferencia absoluta que existe entre un valor inicial y un valor final.

Intervalo: Conjunto de números comprendidos, entre un valor menor y un valor mayor.

Límite: Cantidad fija a la que se acercan cada vez más los valores de secuencia infinita.

Numerador: Cantidad de partes que se toman de un total que se define por el denominador. Es el número que se encuentra en la parte superior de una fracción.

Relación: Correspondencia entre dos conjuntos.

Variable: Literal que representa un número, el cual se desconoce.

Variable dependiente: Es una literal, la cual tomará un valor en función de las operaciones realizadas con la variable dependiente.

Variable independiente: Es una literal, que puede adquirir el valor que se le asigne, de forma aleatoria o sistemática.