UNIDAD 5

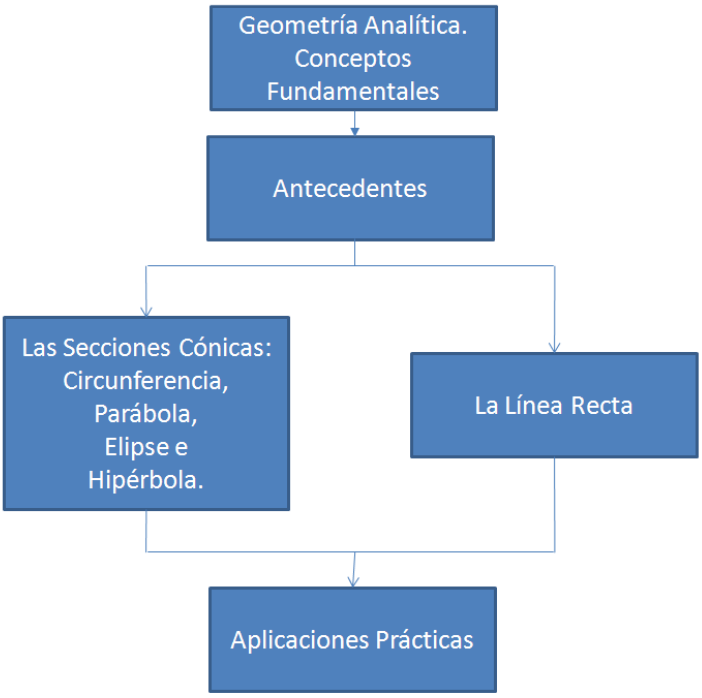
GEOMETRÍA ANÁLITICA

OBJETIVO

El estudiante identificará las bases de la geometría analítica como un método de estudio de la geometría por medio de un sistema de coordenadas y el algebra asociada a este sistema. De esta manera los problemas centrales que deberá resolver son dada una ecuación encontrar su grafica y por otro lado dada una grafica encontrar su ecuación algebraica.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

La geometría analítica, también llamada geometría cartesiana, es el estudio de la geometría con los principios del álgebra. El sistema cartesiano se aplica generalmente para manipular las ecuaciones, es decir; definir formas geométricas de una manera numérica y extraer la información numérica de esa representación. A esto es lo que se llama los dos problemas fundamentales de la Geometría Analítica.

Al llegar a este tema es necesario tener las bases de los conceptos de números reales, operaciones con expresiones algebraicas, conocimientos básicos de geometría plana y trigonometría para un buen desempeño y habilidad en la asimilación del nuevo conocimiento.

Establecidos los conceptos básicos y el plano euclidiano, se conocerá la ecuación de la recta en sus diversas formas, así como la distancia entre dos entidades básicas de la geometría. De manera particular se conocerá la ecuación de las cónicas identificando a cada una de ellas.

5.1 Conceptos Fundamentales

Toca el punto de revisar los conceptos básicos de la geometría euclidiana, la cual estudia las propiedades del plano y el espacio tridimensional. Se subdivide en plana y espacial.

La geometría plana es la parte de la geometría que trata de los elementos o entidades que están contenidos en un plano.

La geometría del espacio o de sólidos es la rama de la geometría que se ocupa de las propiedades y medidas de las figuras geométricas en el espacio tridimensional. Entre estos sólidos o cuerpos geométricos se encuentran el cono, el cubo, el cilindro, la pirámide, la esfera y el prisma por citar solo algunos. Esta geometría del espacio apuntala las proposiciones de la geometría plana, y es la base de la trigonometría esférica, la geometría descriptiva, la geometría analítica del espacio, entre otras de las matemáticas. Se usa en ingeniería, en ciencias naturales y, desde luego, en matemáticas.

La geometría plana también denominada analítica es el estudio de la geometría mediante un sistema de coordenadas que lleva asociada un algebra. Esta materia es el motivo de estudio de la presente unidad.

Los problemas fundamentales que resuelve la geometría analítica son los siguientes:

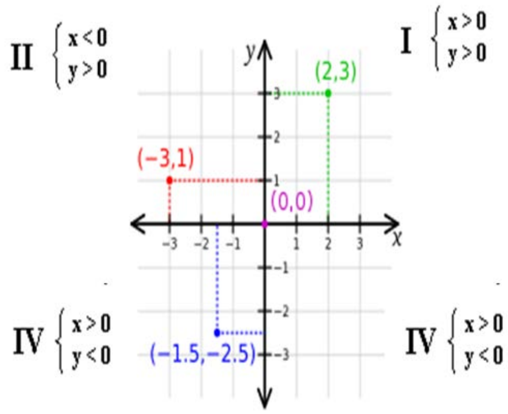
i. Dada una ecuación representarla geométricamente como un conjunto de puntos en el plano.
ii. Dado un conjunto de puntos en el plano geométricamente relacionados, determinar una ecuación cuya representación grafica corresponda.

Dentro de las bases de la geometría en el plano, que es el motivo de estudio de esta unidad es necesario precisar los conceptos de: ejes coordenados o plano cartesiano, la longitud de un segmento, segmentos dirigidos y división de un segmento en una razón dada entre otros. Veamos estos en la siguiente sección.

5.2 Antecedentes

En base al inciso *i* de la sección anterior donde se prevé la representación geométrica de un conjunto de puntos en el plano debemos ir invariablemente a la definición de lo que es el plano, concretamente el plano cartesiano que nos permitirá la representación grafica de ese conjunto de puntos.

Llamamos Sistema de Coordenadas Rectangulares o Cartesianas al sistema referente que se forma por la intersección de un par de rectas denominadas ejes (uno vertical denotada por *Y* llamado eje de las ordenada y otro horizontal denotada por *X* llamada eje de las abscisas), que se cruzan de forma perpendicular formando cuatro cuadrantes que se enumeran en sentido retrogrado del I al IV romano. Al punto de intersección de las rectas le llamamos origen de coordenadas denotada por “O”. La siguiente figura nos ilustra la definición en el plano.



.

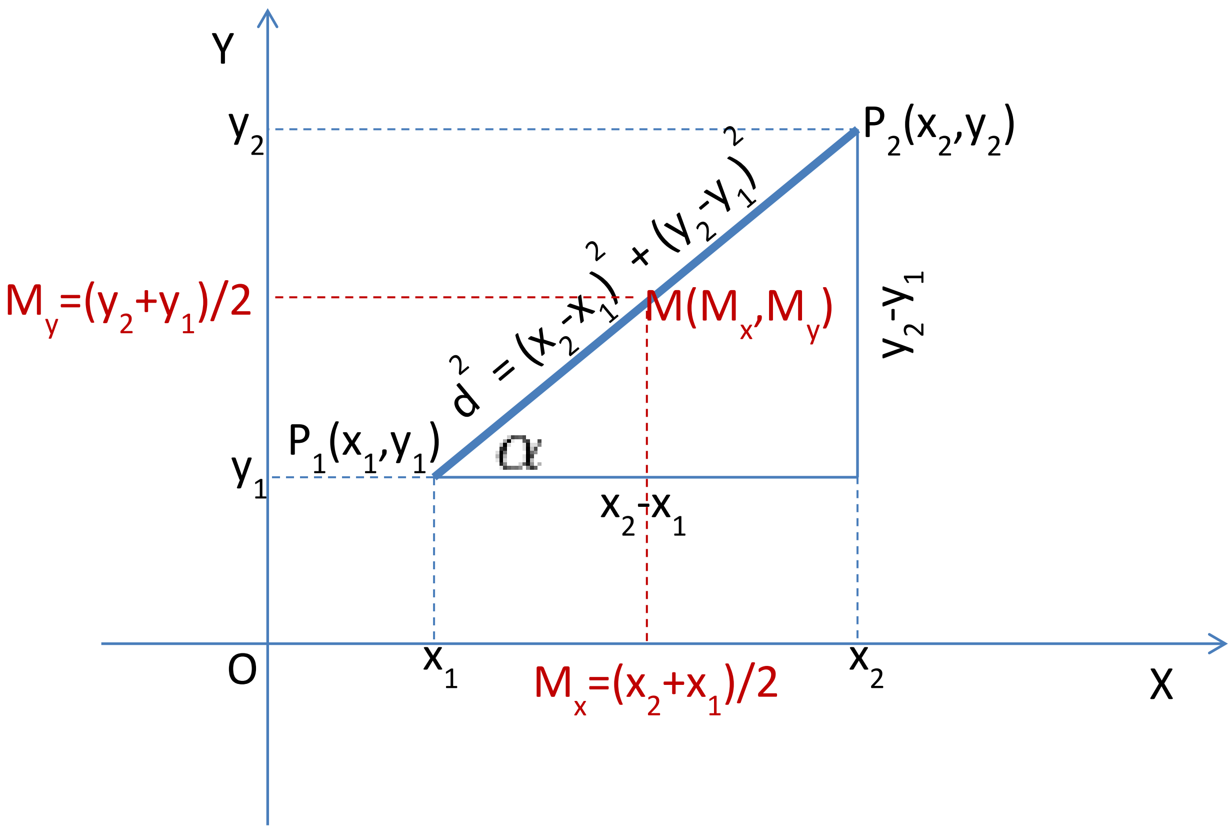
Como se observa en la figura sobre los ejes se marcan divisiones (para efectos de visualización equidistantes), siendo el origen el punto cero que es la intersección de esos ejes. Para indicar la dirección de tales ejes, cada eje es una recta numérica que incluye todos los números reales en modo creciente de izquierda a derecha en el eje de las abscisas y de abajo a arriba en el eje de las ordenadas a partir del O, es decir todos los números positivos están a la derecha y arriba del origen, entanto que los negativos a la izquierda y abajo del mismo origen.

Por último, para la localización de un punto en el plano se considera la distancia a los ejes que son sus coordenadas, es decir; que las coordenadas de un punto P son P(x, y), en este orden, las cuales se anotan como parejas ordenadas dentro de un paréntesis y separadas por una coma, tal es el caso del punto (0,0) u origen como bien se aprecia en la figura.

Bajo este sistema de referencia, estamos en condiciones de graficar y determinar métricas cualitativas a los objetos del plano, en particular determinemos la distancia *d* entre dos puntos cualesquiera denotados por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. En principio, la distancia entre dos puntos del plano equivale a la longitud del segmento de recta que los une, expresado numéricamente. En la figura siguiente, es evidente que por el teorema de Pitágoras la distancia *d* está dada por la diferencia de las abscisas y la correspondiente de las ordenadas:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2}$$



Procediendo con un análisis similar las coordenadas del punto medio *M* del segmento (fragmento de recta que está comprendido entre dos puntos) puede hallarse promediando las coordenadas *x* y *y* de los dos puntos extremos, respectivamente. Algebraicamente tenemos la fórmula del punto medio como se ilustra también en la figura anterior:

$$M\ (M_x, M_y) = \left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$$

Las fórmulas que generalizan este concepto para hallar los valores de las coordenadas del punto P(*x*, *y*) que divide un segmento en una razón dada r = (P_1M / MP_2) son:

$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1+r}, \frac{y_1 + ry_2}{1+r}\right)$$

donde M ya es cualquier punto entre P_1 y P_2 sobre el segmento que estos determinan, vea la figura anterior. Es conveniente aclarar que P_1M y MP_2 denotan los segmentos de recta entre los puntos que se indica.

Ejemplo: dividir el segmento de recta formado por los puntos P(1,1) y T(5,5) en cuatro parte equidistantes.

Solución. Sean P(1,1), Q, R, S y T(5,5) los puntos.

Para el punto Q primer cuarto las coordenadas son la proporción 1:3 por lo tanto r = 1/3:

$Q(x,y) = (\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}) = (\frac{1+5/3}{1+1/3}, \frac{1+5/3}{1+1/3}) = (\frac{8/3}{4/3}, \frac{8/3}{4/3}) = (2, 2).$

Para el punto R segundo cuarto las coordenadas son la proporción 2:2 por lo tanto r = 2/2 = 1 (ecuación del punto medio):

$Q(x,y) = (\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}) = (\frac{1+5}{1+1}, \frac{1+5}{1+1}) = (\frac{6}{2}, \frac{6}{2}) = (3, 3).$

Para el punto S tercer cuarto las coordenadas son la proporción 3:1 por lo tanto r=3/1= 3:

$Q(x,y) = (\frac{x_1+rx_2}{1+r}, \frac{y_1+ry_2}{1+r}) = (\frac{1+15}{1+3}, \frac{1+15}{1+ 3}) = (\frac{16}{4}, \frac{16}{4}) = (4, 4).$

El siguiente y último punto de esta sección de antecedentes o preliminares es el concepto de la pendiente de una recta, denotada por la letra *m*. Para esto remitámonos una vez más a la figura anterior, centrémonos en los puntos extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Se trata de hallar el grado de inclinación que tiene el segmento P_1P_2 con la horizontal paralela al eje X. De entrada si α = 0º o α = 180º la pendiente del segmento debe ser cero.

En este momento vale la pena recordar la definición dada en la unidad anterior en este curso de la función tangente dentro del triangulo rectángulo, entonces para la figura citada de manera más que natural tenemos a la tangente del ángulo α como el cociente entre el cateto opuesto $(y_2 - y_1)$ sobre el cateto adyacente $(x_2 - x_1)$, así: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. La cuestión es simple, a esta expresión es lo que llamaremos la pendiente.

Formalmente decimos que para un segmento P_1P_2 formado por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, la pendiente *m* del segmento P_1P_2 está dado por:

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ x_2 \neq x_1$$

Si $x_2 = x_1$ se dice que el segmento no tiene pendiente.

Es conveniente observar que se define analíticamente como la diferencia de ordenadas entre la correspondiente diferencia de abscisas. Además, las rectas paralelas entre sí tienen la misma pendiente y las rectas perpendiculares entre sí tienen sus pendientes reciprocas y de signo contrario.

Por último, la formulas anteriores no dependen del cuadrante donde se encuentren los puntos, y estos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ pueden ser tomados en cualquier orden.

Del concepto de segmento, pasamos en la siguiente sección en forma simple al concepto de la recta en el plano, la idea es prolongar en forma indefinida los extremos del segmento, observando que el concepto de pendiente no varía y el ángulo ahora se mide con respecto al eje X.

5.3 LA LÍNEA RECTA

Sin mayor preámbulo, pasemos a la definición formal de la recta.

Se denomina línea recta, al lugar geométrico de los puntos P(x, y) del plano, tales que tomados dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, el valor de las pendientes de los segmentos PP_1, PP_2 y P_1P_2 son el mismo. Esta condición se puede expresar algebraicamente con la siguiente secuencia de igualdades:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; para \; x_2 \neq x_1$$

Cabe aquí citar el hecho de que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente y dos rectas que se cortan perpendicularmente tienen sus pendientes reciprocas y de signo contrario.

Una recta se representa analíticamente o algebraicamente como una ecuación lineal con dos variables y se determina si se conocen dos condiciones que la definen (dos puntos por donde pasa, la pendiente y uno que pertenece a ella, por citar un par de ejemplos). Así, existen varias maneras de representar la ecuación de una recta. Veamos los siguientes casos.

Ecuación de la recta en forma punto pendiente. De la formula anterior tomemos solo a la primera identidad $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$; expresemos términos como se señala:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

Llegamos así a la ecuación de la recta conocido un punto $P_1(x_1, y_1)$ y la pendiente m.

Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada al origen. Si en el caso anterior, el punto que se conoce es de la forma (0, b) el problema se reduce aun más ya que $P_1(x_1, y_1) = P_1(0, b)$ y la ecuación quedaría:

$$(y - y_1) = m(x - x_1); \quad (y - b) = m(x - 0); \quad y = mx + b$$

Esta última ecuación es la recta de pendiente m y ordenada al origen b.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Ahora tomemos el segundo y cuarto termino de la identidad de la definición de la recta, obtenemos: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; expresemos algebraicamente como sigue:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Esta es la llamada ecuación de la recta dados dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

Forma general de la ecuación de la recta. Es una expresión de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

en la que x e y son las variables y $A, B\ y\ C$ son constantes arbitrarias dentro de los números reales. La pendiente de esta recta es $m = -\frac{A}{B}$ y la ordenada al origen es $b = -\frac{C}{B}$.

Ejemplo: tomar el segmento de recta determinado por los puntos $P_1(x_1, y_1) = P_1(1, 1)$ y $P_2(x_2, y_2) = P_2(5, 5)$ hallar la ecuación su mediatriz. Recordar que la mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a otra y que pasa por el punto medio de ella.

Solución. La secuencia de pasos y su solución es:

i. En primera instancia se determina el punto medio del segmento P_1P_2.
Punto medio es M(x, y) =M(3, 3) resultado del ejemplo de la sección anterior.

ii. Calcular la pendiente del segmento P_1P_2.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{5-1} = \frac{4}{4} = 1.$$

iii. La mediatriz es perpendicular a la del segmento P_1P_2, por lo tanto la pendiente de la mediatriz es numéricamente reciproca y de signo contrario.

$$m_M = -1 / m_{P1P2} = -1/1 = -1.$$

iv. Conocidos un punto y la pendiente (punto i M(3, 3) y la pendiente iii $m_M = -1$) calcular la ecuación de la mediatriz.

$$(y - y_1) = m(x - x_1);\ (y - 3) = -1(x - 3);\ y = -x + 6.$$

El ángulo α comprendido entre las rectas de pendientes m_1 y m_2 puede calcularse con la siguiente formula:

$$\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2\, m_1}$$

Como aplicación inmediata, para calcular la distancia d de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a una recta expresada esta última en su forma general $Ax + By + C = 0$ tenemos la formula:

$$d = |\ Ax_1 + By_1 + C\ |\ /\ \sqrt{A^2 + B^2}$$

Si la ecuación de la recta está representada en su forma reducida $y = mx + b$, d es:

$$d = |\ mx_1 - y_1 + b\ |\ /\ \sqrt{m^2 + 1}$$

Ejemplo: hallar la distancia del punto $P_1(x_1, y_1) = P_1(-2, -4)$ a la recta: $6x - 8y + 5 = 0$

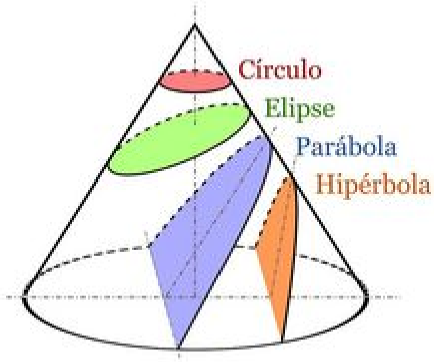
Solución. Por aplicación directa de la formula:

$d = |\ Ax_1 + By_1 + C\ |\ /\ \sqrt{A^2 + B^2}$; $d = |\ 6(-2) + (-8)(-4) + 5\ |\ /\ \sqrt{6^2 + (-8)^2}$

$d = |\ (-12) + 32 + 5\ |\ /\ \sqrt{36 + 64}$; $d = |\ 25\ |\ /\ \sqrt{100}$; $d = 2.5$

5.4 LAS SECCIONES CÓNICAS

Pasemos ahora a los conceptos básicos de las llamadas secciones cónicas en geometría analítica, por costumbre se dice que estas secciones cónicas son: la Circunferencia, la parábola, la Elipse y la Hipérbola. No obstante la recta y el punto ya vistos en esta unidad son también secciones cónicas. La siguiente imagen nos da un apoyo visual a la identificación de las secciones cónicas.



Como se aprecia en la imagen, las cónicas se refieren a la intersección de un plano determinado sobre un volumen denominado cono, de aquí el nombre genérico de cónicas.

5.4.1 Circunferencia

La circunferencia es el punto geométrico del conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Se le denomina radio a la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro. Y se le nombra diámetro al segmento de recta formado por dos radios alineados, y es la distancia mayor que puede darse entre dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

La ecuación de la circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio r consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

De esta ecuación se deduce la ecuación general de la circunferencia:

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

donde se considera:

$$D = -2h; \qquad E = -2k; \qquad F = h^2 + k^2 - r^2$$

Particularmente, si se conoces los puntos extremos de un diámetro $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ la ecuación de la circunferencia es:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

El caso particular de centro el origen (h, k) = (0, 0), la ecuación en su forma reducida se simplifica a la expresión:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Ejemplo: la siguiente ecuación $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ representa una circunferencia en su forma general, hallar los valores del centro y su radio.

Solución. Expresemos esta ecuación en su forma general $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ con $D=-2h$; $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$.

Así: $2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$ dividiendo por 2 y homologando: $x^2 + y^2 - 3x + 5y + \frac{7}{2} = 0$.

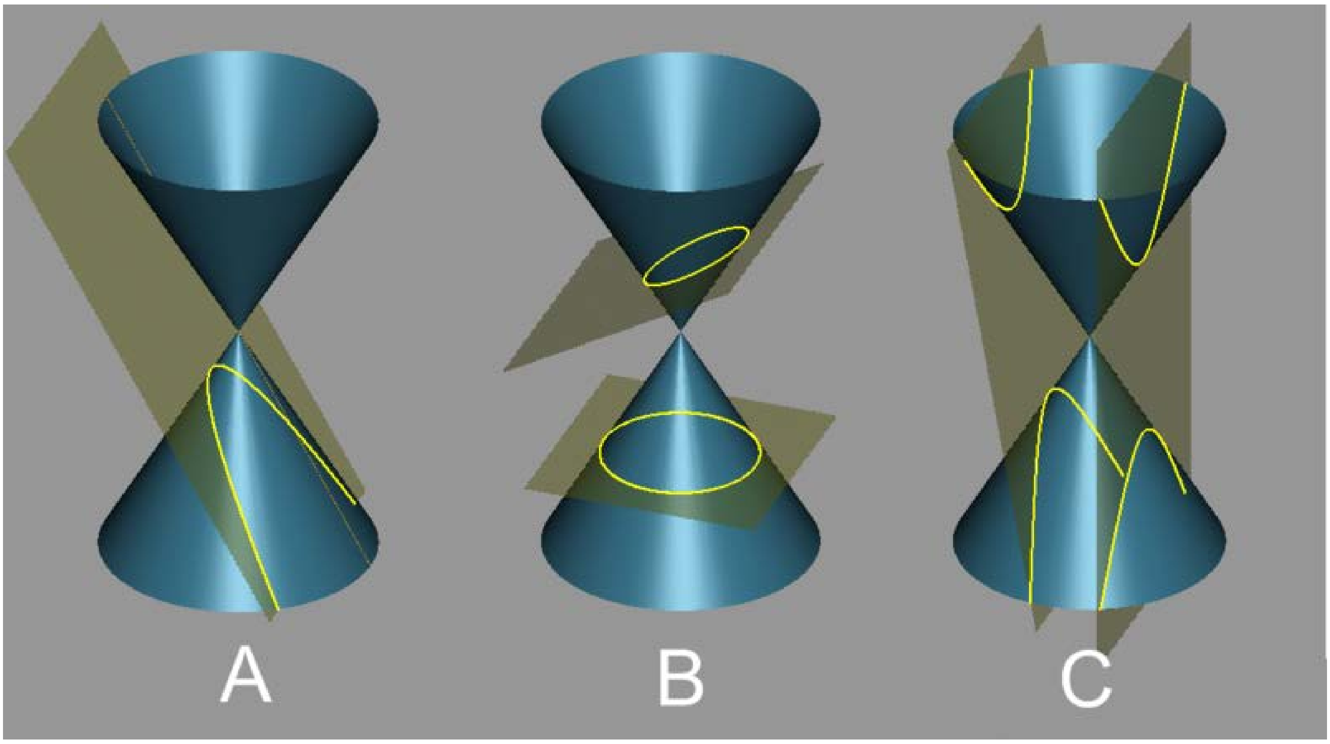
$D = -3 = -2h$ entonces $h = \frac{3}{2}$

$E = 5 = -2k$ entonces $k = -\frac{5}{2}$

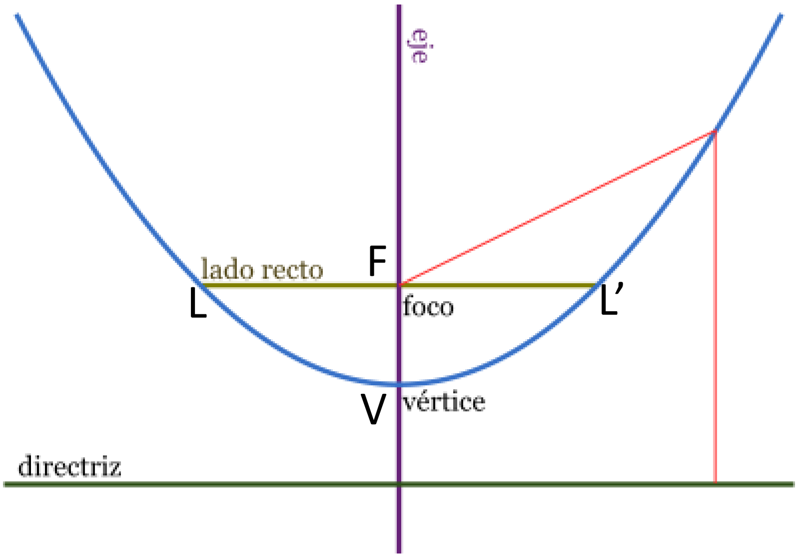
$F = \frac{7}{2} = h^2 + k^2 - r^2$ entonces $r^2 = \frac{7}{2} - h^2 - k^2 = \frac{7}{2} - (\frac{3}{2})^2 - (-\frac{5}{2})^2 = 5$ por lo tanto $r = \sqrt{5}$.

5.4.2 Parábola

Para el resto de las cónicas, vale la pena apoyarnos en las siguientes figuras, donde el corte de la figura A genera una Parábola, el corte B una Elipse y el corte C una Hipérbola.



La parábola. (Figura A) Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz, es decir, que se mueven de manera que las distancias desde un punto cualquiera de la curva a un punto fijo llamado foco y a una recta y fija llamada directriz son iguales. A la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz, se llama eje de simetría de la parábola. La siguiente figura nos permite visualizar específicamente esto elementos de la parábola.



Al segmento de recta LL’ que pasa por el foco F y es paralelo a la directriz, se le denomina lado recto. La longitud del lado recto es cuatro veces la distancia focal, esta última corresponde al segmento FV de la figura.

Partiendo de la definición, sean P(x, y) el punto genérico, M la línea directriz y F el foco de coordenadas (h, k). Sin pérdida de generalidad consideremos F(h, k) = F(0, p) y vértice V(0, 0) en el origen, esta será una parábola vertical hacia arriba. Analíticamente la definición de parábola indica que:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Desarrollando la distancia de ambos segmentos llegamos a la ecuación de la parábola con estas características:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = (y+p)$$

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 + p^2 - 2yp = y^2 + p^2 + 2yp$$

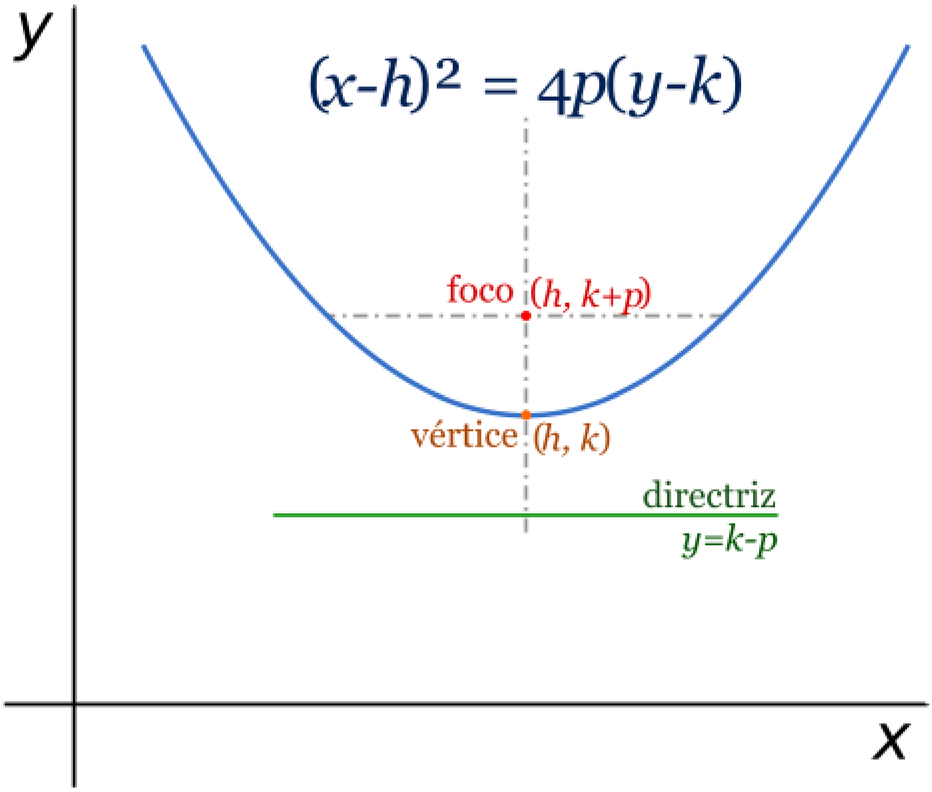
$$x^2 = 4py$$

Para estas condiciones, pero con apertura hacia la abajo la ecuación es:

$$x^2 = -4py$$

De manera genérica la ecuación de una parábola vertical hacia arriba (como la que se aprecia en la siguiente figura) con vértice en (h, k) y foco en (h, k+p) es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$



Si la parábola abre hacia abajo:

$$(x-h)^2 = -4p(y-k)$$

De manera análoga para las parábolas con apertura hacia la derecha e izquierda las ecuaciones respectivas son:

$$y^2 = 4px$$

$$y^2 = -4px$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

Hasta aquí hemos descrito parábolas con sus ejes paralelos a alguno de los ejes de coordenadas, por lo cual las fórmulas son funciones de *x* o de *y*. Pero una parábola puede tener su eje inclinado con respecto a un par de ejes de coordenadas ortogonales lo que nos lleva a presentar la ecuación genérica de una parábola:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

donde se tienen condiciones especificas para los coeficiente.

La homologando de esta ecuación a las anteriores nos lleva a determinar:

$$D = -4p; \qquad E = -2k; \qquad F = k^2 + 4ph$$

Para las parábolas que abren horizontalmente la ecuación general será:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Y para las parábolas que abren verticalmente:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Ejemplo: expresar la ecuación general de la parábola $2x^2 - 8x - 8y = 8$ en su forma ordinaria y especificar las coordenadas del vértice, foco, magnitud del lado recto y ecuación de directriz.

Solución: Se debe llevar la expresión: $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ a la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ mediante tratamiento algebraico para completar el trinomio cuadrado perfecto para de esta ultima observar los valores requeridos.

$$2x^2 - 8x - 8y = 8;\ x^2 - 4x - 4y = 4;\ x^2 - 4x = 4y + 4;\ x^2 - 4x + 4 - 4 = 4y + 4;$$

$$(x-2)^2 - 4 = 4y + 4;\ (x-2)^2 = 4y + 8;\ (x-2)^2 = 4(y+2)$$

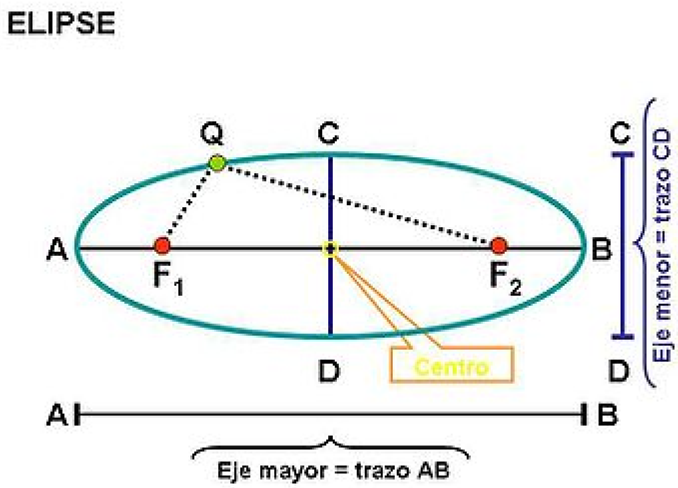
De esta última ecuación y su comparación a la formula reducida:

$(x-2)^2 = 4(y+2)$ vs $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ tenemos *h = 2; k = -2; p= 1; 4p = 4*.

Con estos valores: V(*h, k*) = V(2,-2), F(*h, k*+*p*) = F(2,-2+1) = F(2,-1, Lado Recto = 4*p* = 4. La ecuación de la directriz *y*=*k*-*p* = -2-1 = -3.

5.4.3 Elipse

La Elipse. (figura B). La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos del mismo plano llamados focos es siempre la misma, constante positiva y equivalente al diámetro mayor o igual a la distancia entre los vértices. Gráficamente:



Los elementos de una elipse son: eje mayor segmento $\overline{AB}$, un eje menor segmento $\overline{CD}$. Sobre el eje mayor existen dos puntos F_1 y F_2 que se llaman focos. El punto Q es un punto cualquiera que pertenezca a la elipse.

Sea $P_1(x_2, y_1)$ el centro de la elipse, la ecuación de este conjunto de puntos esta dado por la formula:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$$

para *a* > 0 y *b* > 0, y además *a* es la mitad del eje mayor y *b* es la mitad del eje menor (estas mitades también se les llama semiejes y *a* corresponde al eje de las abscisas, *b* al eje de las ordenadas). El origen O es la mitad del segmento $\overline{F1F2}$. La distancia entre los focos $\overline{F1F2}$ se llama distancia focal y vale *2ea*, siendo *e* la excentricidad y *a* el semieje mayor.

La excentricidad denotada por *e* de una elipse es la razón entre su distancia focal denominada por la letra *c* donde $c=\sqrt{a^2-b^2}$ y su semieje mayor *a*. Su valor se encuentra entre cero y uno:

$e=\frac{c}{a}$, con (0 ≤ **e** ≤ 1)

Por último, obsérvese que si a = b, el resultado es una circunferencia. Por otro lado, si el centro es el origen la ecuación se reduce:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

5.4.4 Hipérbola.

La Hipérbola. (Figura C) es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre igual, constante positiva y equivale a la distancia entre los vértices. Además de los focos, los elementos en la hipérbola son los siguientes: Centro, Vértices, Distancia entre los vértices, Distancia entre los focos y Las asíntotas.

La ecuación de este conjunto de puntos y análogamente a la elipse las hipérbolas de centro en el origen (y en general) pueden abrirse a la derecha e izquierda, hacia arriba y abajo. Sus ecuaciones son:

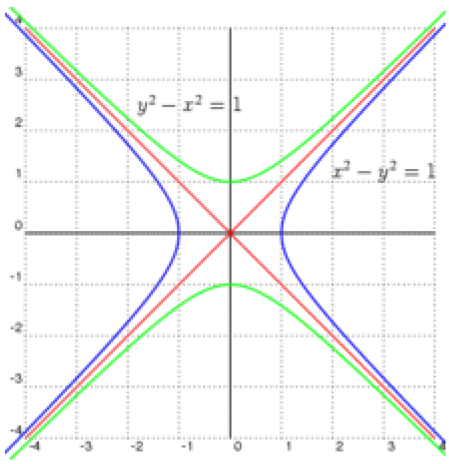
Derecha e izquierda centro (0, 0): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Arriba y abajo centro (0, 0): $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$.

Derecha e izquierda centro (h, k): $(x-h)^2/a^2 - (y-k)^2/b^2 = 1$.

Arriba y abajo centro (h, k): $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

Las hipérbolas tienen dos rectas cuyas distancias a la curva tienden a cero cuando la curva se aleja hacia el infinito llamadas asíntotas. Las hipérbolas cuyas asíntotas son perpendiculares se llaman hipérbolas equiláteras. Como ejemplo las hipérbolas de este tipo tenemos las ecuaciones $y^2 - x^2 = 1$ y $x^2 - y^2 = 1$ que se visualizan en la siguiente grafica.



5.5 Aplicaciones prácticas

Para la parábola en lo particular se tienen diversas aplicaciones. Por ejemplo las antenas satelitales y radiotelescopios se sirven del principio de concentración de señales recibidas desde un emisor en un receptor colocado en la posición del foco de la parábola.

De igual manera la concentración de la radiación solar en un punto (foco), mediante un reflector parabólico tiene su aplicación para la capitación de energía solar. Por el contrario, una fuente emisora colocada en el foco de una parábola enviará un haz de rayos paralelos al eje.

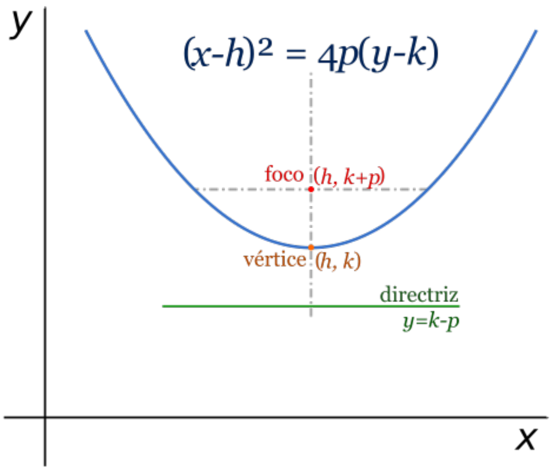
En el diseño arquitectura el uso de las cónicas es común, ya que las construcciones en general presentan este tipo de figuras.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. La intersección significa que dos líneas o cuerpos se cortan entre si. Particularmente para las rectas significa que ambas tienen un punto en común. Para hallar la intersección de un par de rectas expresadas de la forma general:

   $$Ax_1 + By_1 + C_1 = 0$$
   $$Ax_2 + By_2 + C_2 = 0$$

   Se dice que se resuelve el sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado con dos incógnitas. Investigue por lo menos un método para esta solución: igualación, sustitución, suma y resta, grafico.
2. Analice los casos particulares de rectas: y= mx, y=constante, x=constante, rectas paralelas, rectas perpendiculares. Apóyese gráficamente y determine analíticamente.
3. Mediante procesos algebraicos pase de la expresión general de la recta Ax+By+C = 0 a la expresión reducida y = mx + b concluyendo que la pendiente de esta recta es $m = -\frac{A}{B}$ y la ordenada al origen es $b = -\frac{C}{B}$.
4. Deducir la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ a partir de la definición de parábola siguiendo el desarrollo de la identidad: $\overline{PF} = \overline{PD}$. La siguiente figura le ayuda a visualizar y guíese por el desarrollo de la ecuación $x^2 = 4py$ de la sección 5.4.2.



5. Investigue las obras arquitectónicas de mayor renombre que presentan en su diseño aspectos de las cónicas como concepto general. Puede tomar de ejemplo las obras de Oscar Niemeyer, Vladímir Shújov, entre otros. Específicamente el Gran Teatro Nacional de China, en fin la lista sería innumerable. Las de México no deben faltar.

AUTOEVALUACIÓN

1. [5]Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos (-2, 3) y (6, -3).
   R. ($2/3$, 1), ($10/3$, -1), (2, 0).
2. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento P_1P_2 dado por los puntos $P_1(x_1, y_1) = P_1(-3, 2)$ y $P_2(x_2, y_2) = P_2(1, 6)$ **R**. $x + y - 3 = 0$.
3. Determinar el punto de intersección de las rectas $4y - 2x = 8$; $2y + 4x = 14$. R. (2, 3).
4. La longitud ℓ de una circunferencia está dada por la formula $\ell = \pi \cdot 2r$ donde r es el radio. Calcular la longitud de la circunferencia cuya ecuación es:
   $25x^2 + 25y^2 + 30x - 20y - 62 = 0$. **R**. $\ell = \pi \cdot 2r = \pi \cdot 2\sqrt{3}$.
5. Hallar las coordenadas del vértice, foco, ecuación de directriz y eje, magnitud del lado recto para la parábola: $2y^2 - 48x - 20y = 71$. **R**. $(y-\frac{5}{2})^2 = 12(x+2)$. $V(-2, \frac{5}{2})$. $F(1, \frac{5}{2})$.
   $x=-5$. $y=\frac{5}{2}$. Lado recto = 12.

[5] Lehmann, CH. *Geometría Analítica*, pp. 15, 64, 109, 160.

UNIDAD 6

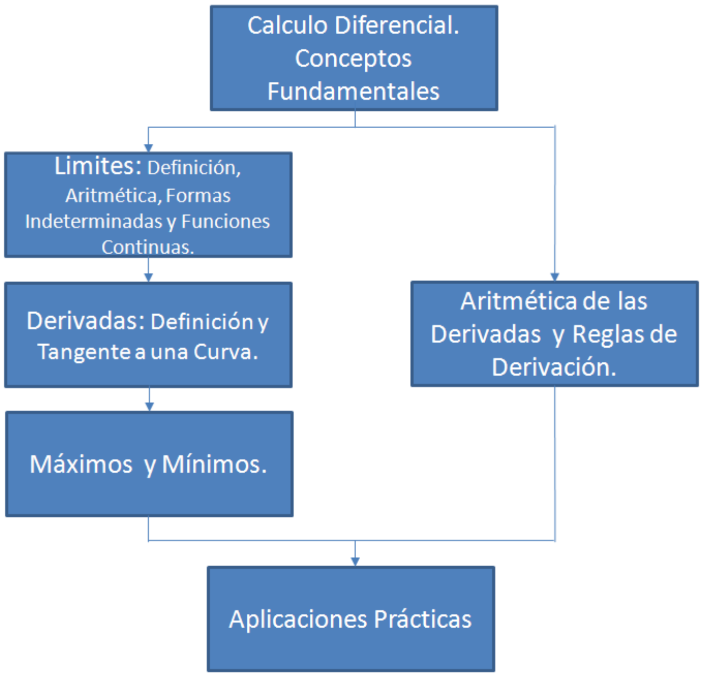
CÁLCULO DIFERENCIAL

OBJETIVO

En esta unidad el estudiante tomará como punto de partida los problemas irresolubles de la geometría analítica, permitiéndole el estudio del cálculo de una manera natural. Identificará los límites como una herramienta para resolver problemas geométricos llegando así a la determinación de la derivada, de rectas tangentes y normales, calculo de máximos y mínimos. Concluyendo con la solución de problemas prácticos.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

El valor que la Geometría Analítica aporta al análisis y la interpretación de las gráficas resulta insuficiente para dar respuesta a situaciones específicas como la continuidad de una función, existencia de valores máximos y mínimos y determinar si una función es creciente o decreciente. Con esta situación en puerta nuestro siguiente paso en el estudio de las matemáticas es el Cálculo entre otras razones para dar respuesta a estas interrogantes. Específicamente, los dos problemas irresolubles de la geometría analítica y que son atacados por el Cálculo son:

i. Dada una función y un punto de su dominio, determinar la recta pendiente tangente a la grafica en ese punto.
ii. Dada una función y dos puntos de su dominio, calcular el área de la región acotada por la función misma y esos puntos.

En la presente unidad mediante el estudio del Calculo Diferencial daremos respuesta entre otras muchas cosas al primer inciso. Por otro lado tocará a la unidad siguiente el dar respuesta en particular al segundo inciso en la unidad 7.

Con lo anterior, esta unidad tiene como punto de partida los problemas irresolubles de la geometría analítica, permitiendo el estudio del cálculo de una menare natural. Se introducen los límites como una herramienta para resolver problemas geométricos llegando a la determinación de las derivadas, la recta tangente y normal a la curva, cerrando con el problema de máximos y mínimos. Además, en esta unidad se hace un mayor énfasis en el estudio de los límites, pues son base teórica de varias ramas de la matemática, en particular los cálculos diferencial e integral.

6.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

De nuestro primer capítulo retomemos el concepto de relación entre dos conjuntos. Lo que nos permitirá definir el de función como la relación entre dos conjuntos A y B tales que a cada elemento de A le haremos corresponde exactamente un elemento de B. No obstante que varios conceptos ya fueron definidos y usados en capítulos anteriores, convine en este momento hacer una recapitulación o definición de los conceptos fundaméntales del cálculo diferencial.

Constante. Elementos de un conjunto cuyo valor no cambia.

Variable. Junto con las contantes forman la totalidad de los elementos del conjunto.

Dominio de una Variable. Es el conjunto de valores que puede tomar una variable. Normalmente se encuentra acotado por dos valores que se llaman extremos, pero puede no ser el caso.

Variable Independiente. Son aquellas a las que se les asigna cualquier valor de su dominio escogido en forma arbitraria.

Variable Dependiente. Son aquellas para las que su valor depende de otra variable.

Notación. Denotamos por x los valores de una variable independiente, por y los valores de una variable dependiente. Si a cada valor de x le corresponde uno o más de y, diremos que y es función de x y lo denotamos de diversas maneras:

$$y = f(x), \quad y=F(x), \quad f : x \to y, \quad f : x \to f(x), \quad f : X \to Y.$$

Específicamente, al conjunto de valores de x le llamamos dominio y al conjunto de valores que puede tomar y le llamamos contradominio o rango del la función f. Esta notación por necesidad ya se utilizó en la Unidad anterior de Geometría Analítica, donde, entre otras cosas, se realizó la gráfica de la función f definida como el conjunto de pares ordenados que representan a la función en el plano.

Formalmente, dados dos conjuntos X y Y, una regla que asigna a cada elemento de X exactamente un elemento de Y se llama una *función* de X en Y. Decimos que f envía x_0 a $f(x_0)$ si f es una función de X en Y ($f : X \to Y$) y para $x_0 \in X$ el elemento asignado a x_0 mediante la función f y se representa por $f(x_0)$.

Existen muy diversas tipos de funciones en relación con el contexto en que estemos situados, las cuales conforme avancemos serán descritas. Una clasificación general es:

$$Funciones\begin{cases} Algebraicas\begin{cases} Polinomicas \\ Racionales \\ Irracionales \end{cases} \\ Trasendetes\begin{cases} Exponenciales \\ Logaritmicas \\ Trigonometricas \end{cases} \end{cases}$$

Una función puede definirse mediante una expresión verbal, una tabla, una fórmula o una gráfica. En general trabajaremos con funciones expresadas mediante fórmulas o expresiones analíticas y su gráfica.

Ejemplos:

i. La regla que asocia a cada número real su exponente cubico es una función cuyo dominio es **R** (números reales).

ii. La función dada por los pares ordenados {(1,a), (2,d), (3,c)} y representada por la regla:

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x = 1 \\ d, & \text{si } x = 2 \\ c, & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

iii. Explícitamente la función ***P: R** → **R*** llamada función polinomial dada por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Función uno a uno. Una función f es Uno a Uno si para cualesquiera dos elementos del dominio x_0 y x_1 ($x_0 \neq x_1$) se cumple $f(x_0) \neq f(x_1)$.

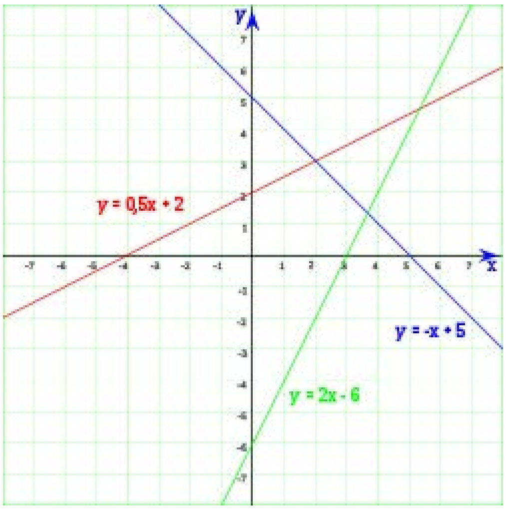
Función Monótona Creciente. Si f es una función real tal que para cualesquiera dos elementos del dominio x_0 y x_1 con $x_0 < x_1$ se cumple $f(x_0) < f(x_1)$.

Monótona Decreciente. Si f es una función real tal que para cualesquiera dos elementos del dominio x_0 y x_1 con $x_0 < x_1$ se cumple $f(x_0) > f(x_1)$.

Función Continua. Intuitivamente diremos que una función es continua dentro de ciertos límites si para valores del dominio X digamos x_0 corresponde siempre un valor $f(x_0)$, y cualquier cambio en x_0 digamos $x_0 + \Delta x_0$, por pequeño que sea tendrá un correspondiente cambio en $f(x_0 + \Delta x_0)$. "Δx_0 denota el pequeño cambio".

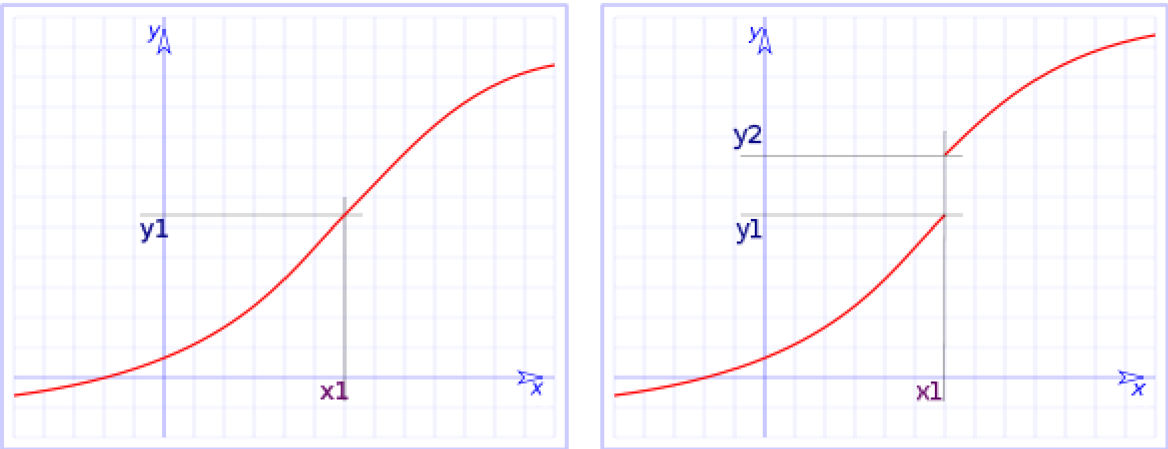
Función Discontinua. Esta fácil, porque es aquella que no es continúa.

Ejemplo. De la clase de Geometría Analítica tenemos las siguientes rectas: y = 0.5x+2 (color rojo), y=2x-6 (color verde) y y=-x+5 (color azul).

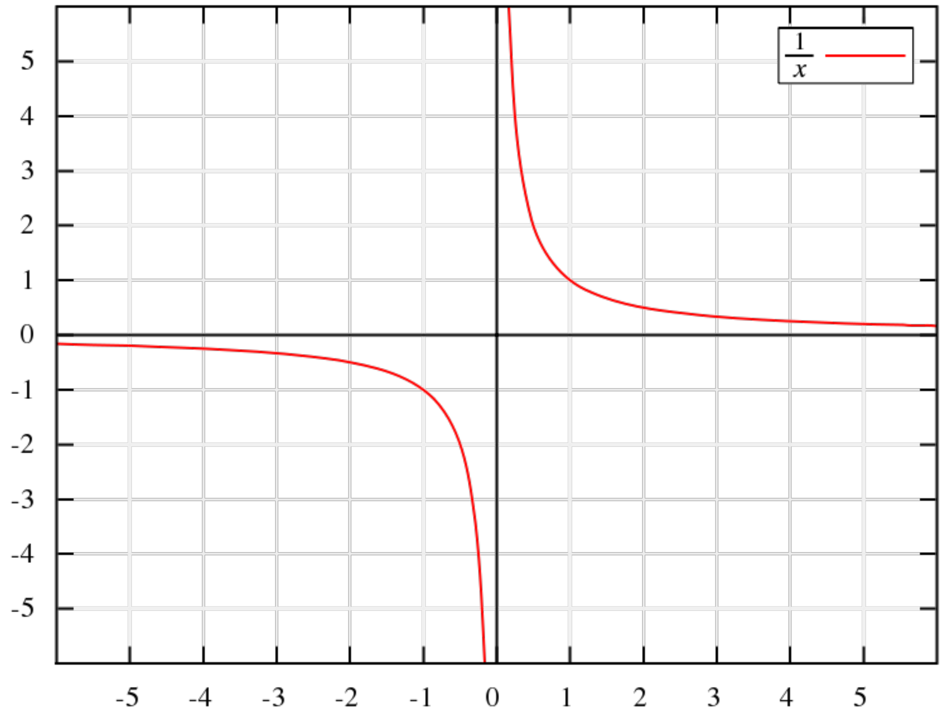


Para las rectas y=0.5x+2 (color rojo) y y=2x-6 (color verde) son Continuas y Crecientes. Para la recta y=-x+5 (color azul) es Continua y Decreciente.

Reforzando visualmente el concepto de discontinuidad de una función, la siguiente figura nos muestra la grafica de una función cualquiera primero continua y enseguida discontinua en el punto x_1.



En general si la gráfica de una función (es decir la función) f(x) tiene una asíntota en x_0 entonces la función es discontinua en x_0. Por ejemplo las función $f(x) = \frac{1}{x}$ presenta asíntotas horizontal y vertical en los ejes X e Y respectivamente para $x_0 = 0$, por lo tanto es discontinua en este punto.



Observemos que cuando x se hace muy grande, $\frac{1}{x}$ se hace muy pequeña, más y más cercano a cero. Sin el concepto de límite es muy difícil hablar de este hecho, porque $\frac{1}{x}$ nunca llega realmente a ser cero. El lenguaje de los límites nos permite hablar acerca del comportamiento de una función cuando ésta se aproxima a algo, concibiendo el hecho de que nunca llegará allí –ésta es la idea central de límite. Por lo tanto, pasemos al tema de los límites de funciones, base del cálculo diferencial.

6.2 LÍMITES

Antes de definir formalmente el concepto de límite de una función, continuemos con el ejemplo de la sección anterior con la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Sin perder de vista la gráfica de esta función, tabulemos su comportamiento en cuatro vertientes: 1. Números positivos muy grandes de x. 2. Números negativos muy grandes de x. 3. Números positivos muy cercanos al cero y 4. Números negativos muy cercanos al cero. La siguiente tabla detalla una muestra de los valores propuestos:

$\boldsymbol{x}$	$\frac{1}{x}$ **para números positivos de x muy grandes.**	$\frac{1}{x}$ **para números negativos de x muy grandes.**	$\frac{1}{x}$ **para números positivos de x muy cercanos a cero.**	$\frac{1}{x}$ **para números negativos de x muy cercanos a cero.**
1	1			
10	0.1			
100	0.01			
1000	0.001			
10000	0.0001			
…	…			
$\to +\infty$	$\to 0$			
-1		-1		
-10		-0.1		
-100		-0.01		
-1000		-0.001		
-10000		-0.0001		
…		…		
$\to -\infty$		$\to 0$		
1			1	
0.1			10	
0.01			100	
0.001			1000	
0.0001			10000	
…			…	
$\to 0$			$+\infty$	
-1				-1
-0.1				-10
-0.01				-100
-0.001				-1000
-0.0001				-10000
…				…
$\to 0$				$-\infty$

Empecemos diciendo que x tiende a c (denotado $x \to c$) cuando a x se le dan valores cada vez más próximos a c. Así, en el primer caso ($\frac{1}{x}$ para números positivos de x muy grandes) se dice que la función tiende a 0, de igual manera en el segundo caso ($\frac{1}{x}$ para números negativos de x muy grandes) la función tiende a cero. Estos hechos se denotan: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ = 0 y $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$ = 0, respectivamente. Para el tercer caso ($\frac{1}{x}$ para números positivos de x muy cercanos a cero) se tiene que la sucesión o secuencia de valores de *f(x)* llegara a ser un numero positivo tan grande como se quiera (símbolo +∞), ya con la notación introducida se tiene: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$= +∞ y para el cuarto y último caso ($\frac{1}{x}$ para números negativos de x muy cercanos a cero) se tiene que la sucesión de valores de f(x) llegara a ser un numero negativo tan grande como se quiera (símbolo -∞), resultando que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$= - ∞.

Estrictamente, y usando los casos 3 y 4 conviene anotar el hecho de que la función tiende al símbolo predicho +∞ cuando x tiende a 0 por la derecha y tiende al símbolo -∞ cuando x tiende a 0 por la izquierda, respectivamente. Además debe quedar claro que en estas situaciones la función $\frac{1}{x}$ no tiene ningún límite pero se dice que tiende a ∞.

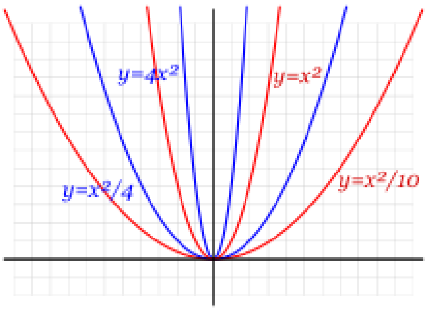
Decimos que x tiende a c por la izquierda (denotado $x \to c^-$) cuando a x se le dan valores cada vez más próximos a c, pero menores que c. Análogamente decimos que x tiende a c por la derecha (denotado $x \to c^+$) cuando a x se le dan valores cada vez más próximos a c pero mayores que c.

Concluimos este ejemplo reiterando la frase: El lenguaje de los límites nos permite hablar acerca del comportamiento de una función cuando ésta se aproxima a algo, concibiendo el hecho de que nunca llegará allí, este hecho nos permite expresar:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0,\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0,\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)= +\infty,\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)= -\infty.$$

Otro ejemplo ilustrativo del hecho de los límites de funciones que nos permitirá la comprensión del concepto es para la función:

Veamos un ejemplo más. Consideremos el siguiente juego de parábolas:



Las funciones aquí representadas son continuas y decrecientes en el intervalo de menos infinito a cero, continuas y crecientes en el intervalo de cero al infinito. Situemos la función $f(x) = x^2$ para el siguiente ejercicio de límites, tomemos $x_0=3$ y vemos que $f(x_0) = 3^2 = 9$. Además de nuestra intuición de límite:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x^2 = 9$$

Este límite se entiende como el valor más próximo y debemos dejar en claro que si en ocasiones resulta ser el valor de la función en el punto prescrito no siempre pasa esto, podemos afirmar que este es el mejor de los casos en el cálculo de límites. Tomemos el siguiente replanteamiento:

$$f(x) = x^2 = x^2 \frac{(x-3)}{(x-3)}.$$

Algebraicamente esta nueva función es la misma pero ya no es continua en $x_0= 3$ pues en este valor se genera la indeterminación de dividir por cero. Ahora la función tiene un hueco en $x_0= 3$ y en el resto de los valores del dominio es igual a la función original x^2. ¿Pero, y que pasa con el límite en la nueva función cuando $x\to 3$? Nuevamente de nuestro planteamiento intuitivo de límite, obtenemos que cuando x se acerca más a 3, entonces f(x) se acerca más a 9. La expresión del límite es:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} x^2 \frac{(x-3)}{(x-3)} = 9$$

No importa qué valor tome o no tome f(x) en x=3, la idea central del límite es que se puede determinar cómo se comporta una función cuando se hace más y más cercana a un valor dado, sin hablar de cómo se comporta en ese valor. Por fin, demos la definición formal de límite que no varía en la idea intuitiva que ya tenemos, solo precisa los conceptos.

6.2.1 Definición y aritmética de los límites

Definición de Límite de una Función. El límite de una función f(x) cuando x tiende al valor x_0 ($x \to x_0$) es igual a una contante ℓ, si existe un valor $\xi>0$ tan pequeño como se quiera tal que el valor absoluto de la diferencia entre la función f(x) y el limite ℓ es igual a ξ para todo valor de x lo suficientemente próximo a x_0 con excepción del propio valor x_0.

Las operaciones de los límites obedecen a teoremas fundaméntelas de la aritméticos por lo que para hacer operaciones con los límites es necesario detallar las siguientes reglas. Consideremos f y g un par de funciones cualesquiera para las cuales existe el límite en el valor c y k una constante, se cumplen las siguientes reglas:

i. El límite de una constante es la misma constante.

$$\lim_{x\to c} k = k$$

ii. El límite de x cuando x tiende al valor c es c.

$$\lim_{x\to c} x = c$$

iii. El límite del producto de f por g es igual al producto de los límites.

$$\lim_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = [\lim_{x\to c} f(x)]\cdot[\lim_{x\to c} g(x)]$$

iv. Caso particular, el límite del producto de una constante por una función es igual producto de la constante por el límite de la función.

$$\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$$

v. El límite de una suma o diferencia entre f y g es igual a la suma de los límites.

$$\lim_{x\to c}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to c} f(x)\pm \lim_{x\to c} g(x)$$

vi. El límite de un cociente entre f y g es igual al cociente de los límites, siempre y cuando el denominador g evaluado en el límite no sea cero.

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$$, siempre y cuando $\lim_{x\to c} g(x)\neq 0$

vii. Sea n un número entero. El límite de la potencia de una función f es igual a la potencia n-ésima del límite de la función.

$$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim_{x\to c} f(x)]^n$$

viii. Sea n un número entero. El límite de un radical n-ésimo de una función f es igual al radical n-ésimo del límite de la función.

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$$

Adicional, vale la pena tener en mente los siguientes resultados sobre límites:

$$\lim_{x\to\infty} x\ \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 2\pi$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{\tan x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{\operatorname{sen}x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$$

Ejemplos.

Como caso particular, el límite $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ cuando $x \to c$ es:

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c)$$

Calcular el limite cuando $x \to 1$ de la función $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+3x-1}{x^2+1}}$.

Aplicando la regla viii y el caso anterior; $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{2x^2+3x-1}{x^2+1}} = \sqrt{\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3x-1}{x^2+1}} = \sqrt{\lim_{x\to 1}\frac{2+3-1}{1+1}} = \sqrt{2}.$

6.2.2. Formas indeterminadas

Es posible que al hacer operaciones con los límites, el resultado sea una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$, o alguna otra por lo que es necesario visualizar la problemática y su solución. Primero recordemos que expresiones de este tipo no son validas en los reales pero para efectos del algebra de límites se conviene en ser aceptadas. Consideremos k elemento de los reales.

Limite cuando $x \to \infty$.

$\infty \pm k = \infty$

$k \cdot \infty = \infty$

$k / \infty = 0$

$\infty / k = \infty$ para $k \neq 0$.

$0 / k = 0$ para $k \neq 0$.

$k / 0 = \infty$

$\infty^k = \begin{cases} \infty & k > 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$

$r^\infty = \begin{cases} \infty & r > 1 \\ 0 & r < 1 \end{cases}$

Para cuestiones como: $\infty - \infty;\ 0 \cdot \infty;\ \infty/\infty, 0/0,\ \infty^0$ y 1^∞ las recomendación para funciones polinomiales y cocientes son:

Las indeterminaciones que se presentan se resuelven teniendo en cuenta solamente los términos de mayor grado de cada polinomio (se divide numerador y denominador por la potencia más grande). Además, si el grado del numerador es menor que el del denominador la fracción tiende a infinito. Si el grado del numerador es menor que el del denominador la fracción tiene limite cero. Si el grado del numerador y del denominador son iguales, la fracción tiene un límite distinto de cero.

Para calcular el límite de la diferencia de dos fracciones que tienden a infinito se hace primero la resta.

Si la expresión es entera, no tiene límite pero tiende a infinito.

Limite cuando $x \to c$.

Caso Inmediato: Se aplica la definición sustituyendo la x por el valor c.

Límites infinitos: Si al calcular el límite de una fracción por el procedimiento anterior, si el denominador es cero y el numerador es distinto de cero (tipo k/0), el límite es infinito.

Límites indeterminados: Si al calcular el límite de un cociente de polinomios resulta que, tanto el numerador como el denominador tienden a cero (indeterminación del tipo 0/0), puede resolverse esta indeterminación dividiendo numerador y denominador por x – c, es decir, factorizando y eliminado el factor común.

En caso de funciones trigonométricas se recomienda el uso de identidades trigonométricas.

Ejemplo. Calcular el limite $x \to 0$ de la función $f(x) = \operatorname{sen}x\cos^2x$.

Solución. $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} sen\,x \cos x \cos x = \lim_{x\to 0} senx \lim_{x\to 0} cosx \lim_{x\to 0} cosx = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$.

Ejemplo. Calcular el limite $x \to \infty$ del cociente de los polinomios: $(x^2 + x - 4) / (4x^3 + 1)$.

Solución. En principio sería una forma indeterminada ∞/∞, por lo tanto se sugiere dividir por la potencia más grande que es x^3, además recordar que para cualquier n positivo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Así:

$$\lim_{x\to\infty} (x^2 + x - 4) / (4x^3 + 1) = \lim_{x\to\infty} (1/x + 1/x^2 - 4/x^3) / (4 + 1/x^3) = 0 / 4 = 0.$$

Ejemplo. Calcular el limite $x \to 1$del cociente de los polinomios: $(x^3 - 1) / (x - 1)$.

Solución. Ahora tenemos una forma indeterminada 0/0. Después de analizar vemos que una forma de solución es seguir la recomendación de dividir los polinomios tácitamente:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 1 & x - 1 \\ \hline
- x^3 + x^2 & x^2 + x + 1 \\
\text{-------------} & \\
x^2 - 1 & \\
- x^2 - x & \\
\text{---------} & \\
x - 1 & \\
- x + 1 & \\
\text{---------} & \\
0 &
\end{array}
$$

$$x^3 / x = x^2$$
$$x^2 / x = x$$
$$x / x = 1$$

Con lo que $\lim\limits_{x\to 1}(x^3 - 1) / (x - 1) = \lim\limits_{x\to 1} (x - 1)(x^2 + x +1) / (x - 1) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 + x +1= 3.$

A titulo de resumen y regla nemotécnica, una indeterminación del tipo $0/0$ es la que se da en los tres casos siguientes, y en cada caso después de simplificar y hacer las operaciones algebraicas necesarias, se obtiene un límite distinto:

$$\lim_{x\to 0}(x / x^2) = \frac{0}{0} \quad \text{simplificando} \quad \lim_{x\to 0}(1 / x) = \infty$$
$$\lim_{x\to 0}(x / x) = \frac{0}{0} \quad \text{simplificando} \quad \lim_{x\to 0}(1) = 1$$
$$\lim_{x\to 0}(x^2 / x) = \frac{0}{0} \quad \text{simplificando} \quad \lim_{x\to 0}(x) = 0$$

Hecho lo anterior es necesario pasar a otro de los conceptos fundamentales del cálculo y base para cualquier estudio posterior, la continuidad de una función.

6.2.3. Funciones continuas

Definición de continuidad de una función. Decimos que una función f(x) es continua en el punto $x = x_0$ si existe $f(x_0)$ y además el límite de f(x) cuando $x \to x_0$ es justamente $f(x_0)$, es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si no se cumplen las condiciones anteriores, la función f(x) es discontinua en x0.

Una función f(x) es continua en el interior de un intervalo I = [a, b] de x, si es continua para todos los valores de x dentro de I. En caso contrario es discontinua en I.

Como ya sabemos, la grafica de una función continua en un intervalo I se obtiene de un solo trazo para los valores de x dentro de I.

Una función f(x) continua en un intervalo I = [a, b] toma todos los valores entre f(a) y f(b). Si además f(a) y f(b) son de signo contrario entonces f(x) tiene una solución o raíz en I.

En general para f y g funciones continuas en los reales, las siguientes reglas se cumplen:

$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$ es continua en todos los reales.

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ es continua en todos los reales.

$(f / g)(x) = f(x) / g(x)$ es continua en los reales, siempre que g(x) sea diferente de 0.

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $\circ$ es la composición de funciones, es continua en los reales.

Pasemos ya a los conceptos de Derivadas e integrales (estas últimas en la siguiente unidad).

6.3 DERIVADAS

6.3.1 Tangente a una curva

En la sección 6.1 de esta unidad al enfrentar nuestra primer definición de función continua en un punto x_0 hablamos del concepto de cambio o incremento denotado por Δx_0. En lo sucesivo para la notación de incrementos en un punto x_0 se usara indistintamente Δx_0 o *h*.

Veremos el asunto de la deriva de una función a la par de la interpretación geométrica como curva tangente en un punto de la misma en base a lo aprendido de la geometría analítica, esto con el apoyo del concepto de incrementos y sobre todo de los límites.

Dado el punto x le aplicamos el incremento h llegando al punto x+h. Respectivamente los valores de la función y serán f(x) y f(x+h) y la longitud de este segmento es f(x+h)-f(x). Estos segmentos son los catetos de un triangulo rectángulo del ángulo α para la recta secante S_1 de la curva y=f(x). De la geometría analítica (ver el detalle en la siguiente figura) la pendiente de esta recta secante es la tangente del ángulo α y además el incremento de y entre el incremento de x (también denominado cociente diferencial) es:

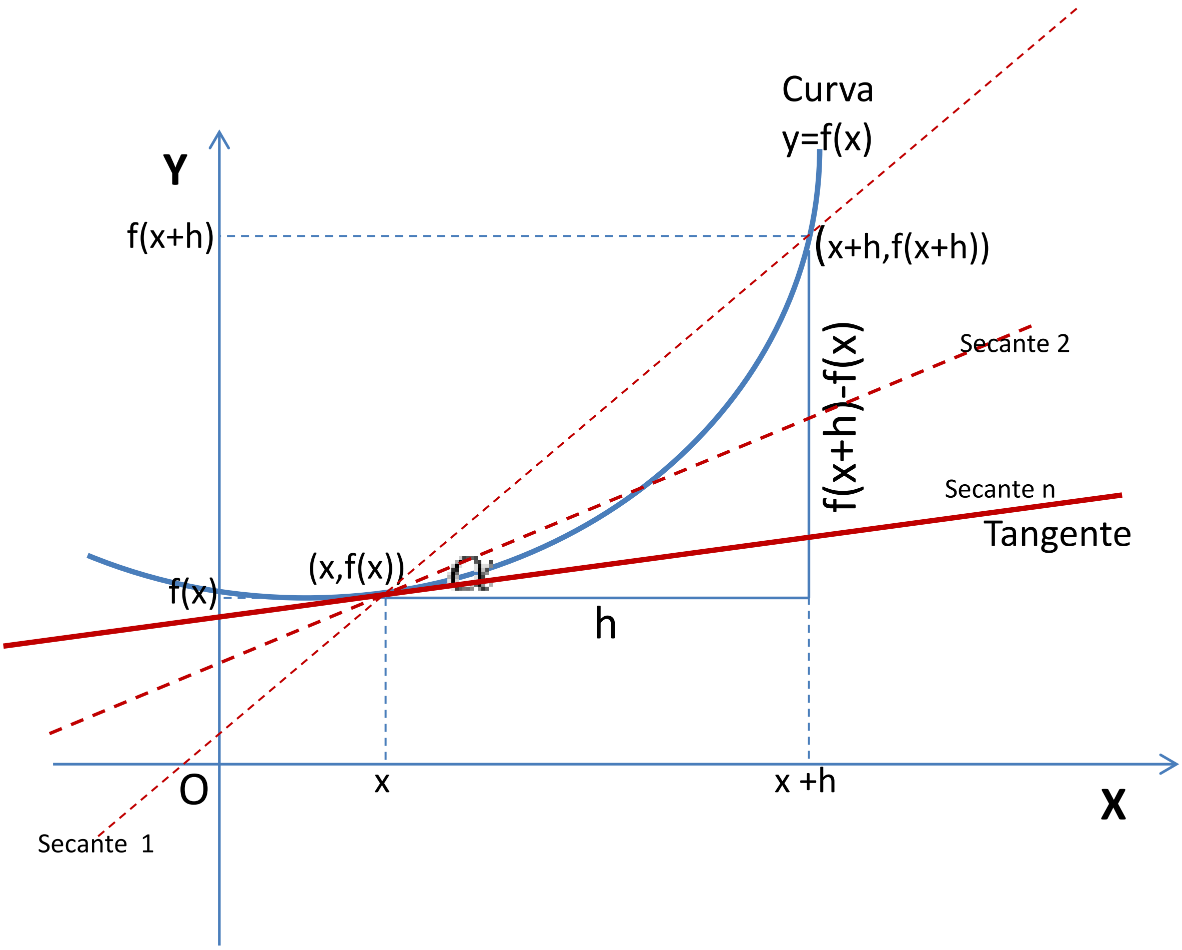
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Aplicamos esta misma idea a la recta secante S_2 y así sucesivamente hasta llegar a la recta secante S_n que coincide con la recta tangente a la curva y=f(x) en el punto x en la medida en que h tiende a cero. De esta forma aplicando el concepto de límites formalizamos la definición de Recta Tangente.

Se llama recta tangente a una curva en un punto x al límite de las posiciones de una secante, cuando el segundo punto de intersección de la secante coincide con el primero.

Para nuestro caso, la recta secante S_n es la tangente en el punto x a la función y=f(x). La expresión algebraica es:

$$m = \tan\alpha = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



6.3.2 *Definición de derivada*

Con el desarrollo anterior llegamos a la definición de derivada de manera formal. Sea y=f(x) definida en un dominio real. La derivada de la función y=f(x) en el punto x es el número real dado por el límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

del cociente de incrementos cuando este exista. En cuyo caso decimos que la función y=f(x) es derivable en el punto x. Si por el contrario este límite no existe, entonces la derivada de y=f(x) no existe en x. Definimos la función derivada de y=f(x) denotada por f ’(x) como la función dada por la regla:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si f(x) es derivable en todo punto de su dominio, entonces f(x) se llama función derivable y además el dominio de f(x) y el de mismo de la derivada f’(x) es el mismo.

Como acotamos, para la función cuyo valor en cada x es la derivada de f(x), se escribe f′(x). Existen muchas más formas de notación para la derivada, algunas son:

$$f', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d\,(f(x))}{dx}$$

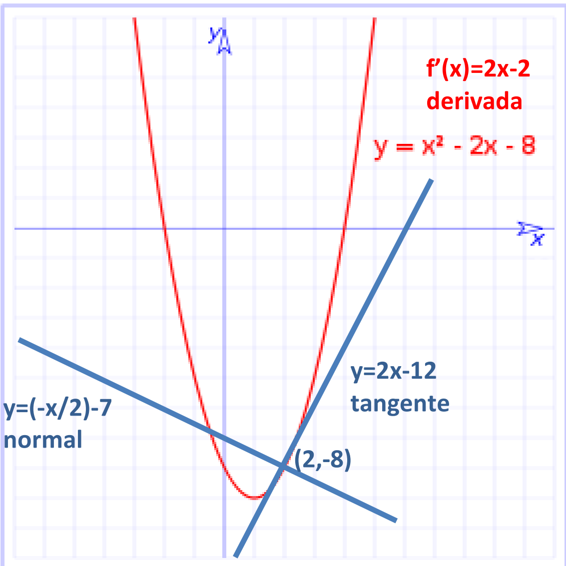
Se puede escribir la derivada de f en el punto x = a de la siguiente manera:

$$\left.\frac{d\,(f(x))}{dx}\right|_{x=a}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de la función y=f(x) = x^2 – 2x – 8, la ecuación de la recta tangente en el punto x=2 y la ecuación de la recta normal en el mismo punto.

Solución.

i. Vámonos por la definición de derivada, esto es debemos calcular el limite $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para y=f(x)=x^2 – 2x – 8. La grafica de la función es:



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} ((x+h)^2 - x^2 - 2(x+h) + 2x - 8 + 8)/\,h =$$

$$\lim_{h\to 0} (x^2 + 2xh + h^2 - x^2 - 2x - 2h + 2x - 8 + 8)\,/\,h =$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} (2xh + h^2 - 2h)/h = \lim_{h\to 0} (2x + h - 2)/h = 2x - 2.$$

ii. Por otro lado, en el punto x=2; $y = x^2 - 2x - 8 \big|_{x=2} = 4-4-8=-8$; el punto de tangencia es (2,-8). La pendiente en (2,-8) es $m = f'(x) \big|_{x=2} = 2x-2\big|_{x=2} = 2$. Ahora conociendo un punto (2,-8) y la pendiente m=2 podemos conocer la recta tangente (de las clases de geometría analítica): $y - y_1 = m (x - x_1)$; $y - (-8) = 2(x - 2)$; $y= 2x-4-8$; $y=2x-12$.

iii. Finalmente la ecuación de la recta normal en el punto (2,-8) está dada por la expresión (igual de la clase de geometría analítica) $y - y_1 = - \frac{1}{m} (x - x_1)$; $y - (-8) = - \frac{1}{2}(x - 2)$; $y + 8 = - \frac{1}{2}x + 1$; $y = - \frac{1}{2}x - 7$

Para calcular las derivadas sería complicado aplicar el procedimiento de la definición a expresiones algebraicas complejas, por lo tanto aplicaremos la derivación mediante reglas prescritas.

6.4 Aritmética de las derivadas y reglas de derivación

Ahora calcularemos las derivadas de sumas, productos y cocientes de funciones mediante reglas de derivación. En primera instancia dentro del algebra de las funciones derivadas tenemos que la derivada de la suma o resta algebraica de un número finito defunciones derivables es igual a la suma o resta algebraica de las derivadas:

$$(f+g)' = f' + g'$$

La derivada que resulta del producto de una constante por una función, es igual al producto de la constante por la derivada de la función:

$$(cf)' = cf'$$

La derivada del producto de dos funciones es igual a la suma de los productos de cada función por la derivada de la otra:

$$(fg)' = f'g + fg'$$

La derivada del cociente de dos funciones es nuevamente un cociente donde el numerador es la diferencia de los productos del denominador original, multiplicada por la derivada del numerador original menos el numerador original por la derivada del denominador original, y el nuevo denominador es lo que resulte del cuadrado del denominador original. Desde luego el denominador debe ser distinto de la función 0.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \qquad g \neq 0$$

La derivada de la función composición (o regla de la cadena):

$$f\,(x) = g \circ h = g(h(x)); \qquad f'\,(x) = (g' \circ h) \cdot h' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Otra forma de expresar la regla de la cadena es y=h(x), f=g(y) entonces f=g(h(x)) = (g○h):

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx}.$$

Algunas reglas básicas para la derivación son las siguientes y para una relación completa consulte la bibliografía de la unidad:

Función	Derivada
$f\,(x) = a$	$f'\,(x) = 0$
$f\,(x) = x$	$f'\,(x) = 1$
$f\,(x) = ax$	$f'\,(x) = a$
$f\,(x) = ax + b$	$f'\,(x) = a$
$f\,(x) = x^n$	$f'\,(x) = nx^{n-1}$
$f\,(x) = \sqrt{x}$	$f'\,(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f\,(x) = e^x$	$f'\,(x) = e^x$
$f\,(x) = \ln(x)$	$f'\,(x) = \dfrac{1}{x}$
$f\,(x) = a^x (a > 0)$	$f'\,(x) = a^x \ln(a)$
$f\,(x) = \log_b(x)$	$f'\,(x) = \dfrac{1}{x\ln(b)}$
$f\,(x) = \dfrac{1}{x^n} = (x^n)^{-1} = x^{-n}$	$f'\,(x) = -nx^{-n-1} = -nx^{-(n+1)} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$f\,(x) = \text{sen}(x)$	$f'\,(x) = \cos(x)$
$f\,(x) = \cos(x)$	$f'\,(x) = -\text{sen}(x)$
$f\,(x) = \tan(x)$	$f'\,(x) = \sec^2(x) = \dfrac{1}{cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$f\,(x) = \csc(x)$	$f'\,(x) = -\csc(x)\cot(x)$
$f\,(x) = \sec(x)$	$f'\,(x) = \sec(x)\tan(x)$
$f\,(x) = \cot(x)$	$f'\,(x) = -\csc^2(x)$

$f(x)=\operatorname{arcsen}(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos(x)$	$f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arctan(x)$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

Ejemplo. En los puntos donde la función es válida, calcular la derivada de la función $f(x)=(1-\text{senx})(1+\text{senx})^{-1}$.

Solución. Apliquemos la fórmula del cociente expresando f(x) = (1-senx)/(1+senx), $[(h/g)'=(h'g-hg')/g^2]$ y al resultado aplicar la formula inmediata de derivación para sen(x) $f'(x)=\cos(x)$:

f(x) = (1-senx)/(1+senx) = h/g

$f'(x) = ((1-\text{senx})'(1+\text{senx}) – (1- \text{senx})(1+ \text{senx})') / (1+\text{senx})^2 =$

$f'(x) = ((-\text{cosx})(1+\text{senx}) – (1+\text{senx})(-\text{cosx})') / (1+\text{senx})^2 =$

$f'(x) = ((-\text{cosx} - \text{cosxsenx}) – \text{cosx} + \text{senxcosx}) / (1+\text{senx})^2 =$

$f'(x) = -2\text{cosx} / (1+\text{senx})^2$.

Ejemplo: Como ejercicio de aplicación de la regla de la cadena, calcular la derivada de la función $z=(2x+1)^2 +3(2x+1) - 7$.

Solución. La regla de la cadena dice: y=f(x), z=g(y) entonces z=(g○f)(x); $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$.

Tomando: y=2x+1 tenemos $z=y^2+3y-7$;

$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=[d(y^2+3y-7)/dy\bullet d(2x+1)/dx]=(2y+3)\bullet(2)=4y+6=4(2x+1)+6=8x+4+6=8x+10$.

6.5 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

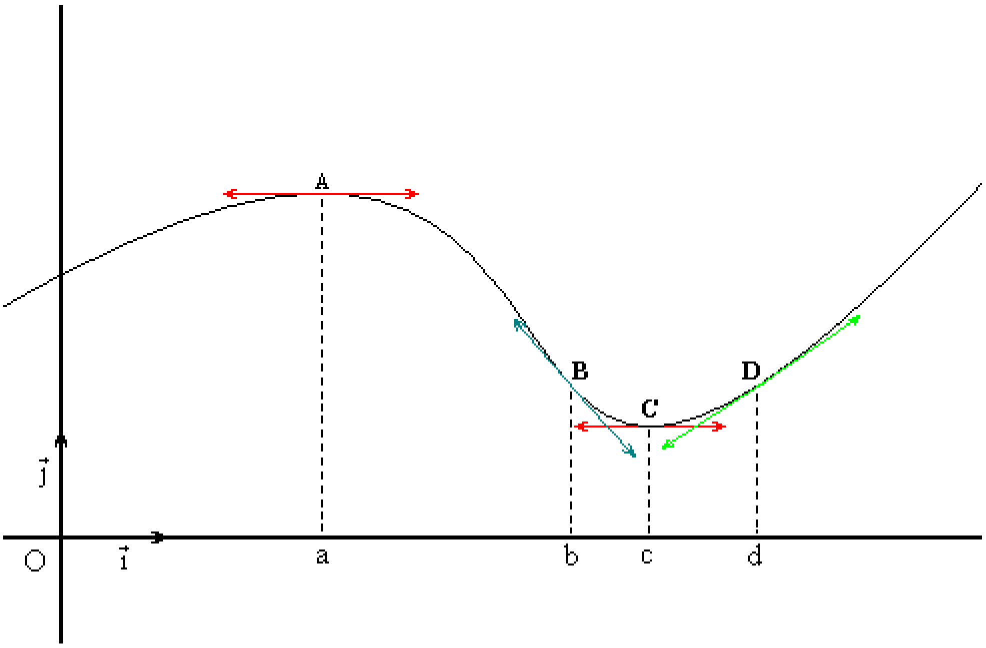
Pora finalizar la Unidad del cálculo diferencial, resta terminar dando respuesta concretas a las situaciones específicas como la continuidad de una función, existencia de valores máximos y mínimos y determinar si una función es creciente o decreciente.

Sea f una función definida en un intervalo cerrado I. Acotaremos el hecho de que f es una función es creciente (respectivamente decreciente) en un intervalo I si es creciente (respectivamente decreciente) en todo punto de I.

En la sección 6.3.1. determinamos que $m = \tan\alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Del simple concepto de m, si este número es positivo (respectivamente negativo) la función f es creciente (respectivamente decreciente) en x_0. Si se da el caso de m=0 no se puede afirmar que la función sea creciente o decreciente.

Un punto x_0 en I de la función f se dice Máximo (respectivamente Mínimo) si para todo punto $x \in I$ se cumple $f(x_0) \geq f(x)$ (respectivamente $f(x_0) \leq f(x)$).

La determinación analítica de un máximo o mínimo con el uso de la derivada viene dada también por el concepto de la pendiente, esto es; para el punto x_0 si la derivada de la función f es igual a cero y pasa de positiva a negativa en el intervalo I, entonces hablamos de un máximo. En un mínimo la función nuevamente la derivada de la función debe ser cero y pasar de negativa a positiva. Se debe aclarar que si derivada pasa de positiva a positiva o negativa a negativa no se puede afirmar nada respecto. Apoyemos visualmente los conceptos en la siguiente figura.



La concavidad (del gráfico de una función, es la condición geométrica de convexidad –hacia arriba o hacia abajo- de la región bajo una curva) de una función en un punto x_0. Si una curva dirige su concavidad hacia la parte negativa del eje Y *y* la derivada decrece entonces la segunda derivada es negativa. Por el contrario, si la concavidad es hacia la parte positiva y la primera derivada decrece entonces su derivada segunda es positiva.

El párrafo anterior nos da un criterio para determinar si un punto crítico es máximo o mínimo. En un máximo la concavidad es hacia abajo por lo que la segunda derivada será negativa. En un mínimo la concavidad será hacia arriba por lo que la segunda derivada será positiva. Siendo desde luego la primera derivada cero en el punto de análisis.

Por último, un punto de inflexión es aquel x_0 del dominio de f en donde la curva que cambia de sentido de su concavidad. Ahora, el cómo determinar los puntos de inflexión es inherente a toda la teoría ya desarrollada.

Para determinar las características de la grafica de una función f, se siguiere seguir los siguientes pasos.

i. Determinar el Dominio. Como ya sabemos el dominio de una función es el conjunto de valores donde la función está definida. Sobre todo, si fuera el caso se deben determinar los valores de x donde la función no está definida.

ii. Continuidad de la Función. Determinar cómo se comporta la función en el intervalo de los puntos donde no está definida. Calcular los límites laterales en los puntos de discontinuidad y en los extremos de los intervalos de discontinuidad. Si alguno de los límites laterales en un punto $x=x_0$ da infinito se dice que f tiene asíntota vertical de ecuación $x=x_0$.

iii. Análisis de posibles asíntotas. Recordar el cálculo de los límites de la función cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$, como se ha realizado en los primeros ejercicios de esta unidad.

iv. Cálculo de Máximos y Mínimos. Para calcular los máximos y mínimos debemos que tener en cuenta los valores que anulan a la primera derivada. Hay un mínimo en el punto en punto a cuando:

$$\left.\begin{array}{l} f'(a)=0 \\ f''(a)>0 \end{array}\right\}$$

Hay un máximo en el punto en punto a cuando:

$$\left.\begin{array}{l} f'(a)=0 \\ f''(a)<0 \end{array}\right\}$$

v. Puntos de Inflexión. Considerar:

$$\left.\begin{array}{l} f''(a)=0 \\ f'''(a)\neq 0 \end{array}\right\}$$

Esto es, se halla la segunda derivada y se calculan sus raíces. Enseguida se halla la tercera derivada y se sustituye en ella las raíces previas de la primera derivada.

Si las raíces no anulan la tercera derivada ($f'''(a) \neq 0$) tenemos un punto de inflexión.

Ejemplo: Determine un análisis total del polinomio: $y=f(x)=5x - x^5$.

Solución. Detallemos la secuencia.

i. El polinomio tiene por dominio todos los reales.

ii. El polinomio es continuo en todo punto.

iii. No existen puntos de discontinuidad por ende no hay asíntotas.

iv. Calculo de máximos y mínimos.

a. Se obtiene la derivada de la función.

$f'(x)=5 - 5x^4$

b. Se calculan las raíces del polinomio derivada.

$5 - 5x^4 = 0$, entonces $5x^4 = 5$; $x^4 = 1$ Las raíces son: $x_0=1$ y $x_1= -1$

Los puntos críticos son: $f(1)= 5(1) - (1)^5 = 4$ y $f(-1)= 5(-1) - (-1)^5 = -5+1 = -4$

$P_1(1,4)$ y $P_2(-1,-4)$.

c. Cálculo y evaluación de la segunda derivada.

$f''(x)= - 20x^3$. Entonces $f''(1) = -20 < 0$; $f''(-1)= 20>0$.

Con todo lo anterior hay un máximo en $P_1(1,4)$ y $P_2(-1,-4)$ un mínimo.

v. Puntos de inflexión.

a. La segunda derivada se hace igual a cero.

$f''(x) = -20x^3 = 0$

b. Resolver la ecuación.

$x=0$.

c. Calcular la tercera derivada.

$f'''(x) = -60x^2$

d. Evaluar las raíces de la segunda derivada en este tercera derivada:

$f'''(0) = -60(0)^2 = 0$.

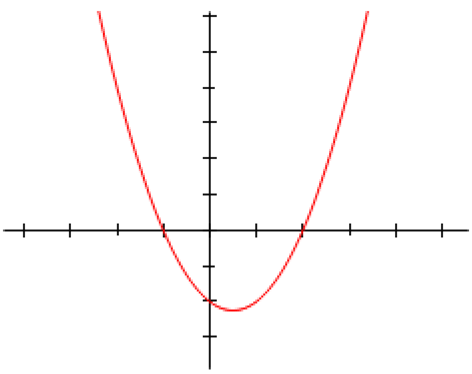
Conclusión, no tenemos puntos de inflexión.

6.6 Aplicaciones prácticas

De manera particular, el análisis para la determinación de los valores que optimizan (calcular el mínimo o máximo) a una o varias funciones tienen muy diversas aplicaciones prácticas. Por otro lado, de forma general, es factible que en los diseños y sobre todo en las construcciones sea necesario el cálculo de ciertas figuras especiales, no necesariamente asequibles por métodos tradicionales, que se requiera entonces de cálculos especiales que no se pueden obtener por operaciones geométricas sencillas. En la arquitectura se es muy dado al diseño de figuras paraboloides o sencillamente superficies totalmente irregulares obtenidas de la imaginación o de la representación de algún fenómeno de cualquier ciencia de estudio. La cubicación de este tipo de figuras o volúmenes es realizada por las técnicas del cálculo diferencial e integral, visto aquí ya como la operación contraria al cálculo diferencial que hemos estudiado en esta unidad y en la próxima estudiaremos el cálculo integral.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Recordemos que el límite de una función f(x) cuando x tiende al valor x_0 ($x \to x_0$) es igual a una contante ℓ, si existe un valor ξ>0 tan pequeño como se quiera tal que el valor absoluto de la diferencia entre la función f(x) y el limite ℓ es igual a ξ para todo valor de x lo suficientemente próximo a x_0 con excepción del propio valor x_0.
   ¿Por qué es necesario excluir el valor x_0 en la definición de limite?
2. Recordemos que para una función f(x) continua en un intervalo I = [a, b] que toma todos los valores entre f(a) y f(b). Si f(a) y f(b) son de signo contrario entonces f(x) tiene una solución o raíz en I.
   Considere la función $f(x) = x^2 - x – 2$ cuya grafica se muestra:

   Tomar los intervalos [-2,0] y [0,3], verificar que se cumple la condición de cambio de signo en los extremos y calcular las raíces.
3. Demostrar aplicando la definición de derivada la derivada de la función indicada:

i. Lineal y=mx+b (recta de pendiente m y ordenada al origen b) es la función constante m. $\frac{d(mx+b)}{dx} = m$.

ii. Derivada de una función constante y=c. $\frac{d(c)}{dx} = 0$.

iii. Derivada de una monomio $f(x)= x^n$. $f'(x)=nx^{n-1}$.

4. La derivada del producto de dos funciones es igual a la suma de los productos de cada función por la derivada de la otra: $(fg)' = f'g + fg'$.
   Generalice esta derivada para el producto de un número finito de funciones y concluya que la derivada de un producto de un número finito de funciones es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando la derivada de cada función por las restantes funciones. Por ejemplo: (fgh)'(x)=g(x)h(x)f'(x) + g(x)h'(x)f(x) + g'(x)h(x)f(x).
5. Como se aclaró en la sección 6.6 aplicaciones prácticas las técnicas del cálculo de valores extremos (máximos o mínimos), se aplican a una gran variedad de problemas. Para resolver un problema de este tipo se recomienda (y es lo que puede resultar más difícil) construir y expresar matemáticamente la función que modele el problema identificando de manera precisa a la variable a la que se le aplicará el cálculo del valor extremo. Hecho lo anterior, para la solución del problema se siguen las recomendaciones de la sección 6.5 máximos y mínimos.

   Con base en lo expuesto, la actividad consiste en concluir que la figura plana de mayor área con un perímetro fijo es un cuadrado. En particular, verificar que las dimensiones de un rectángulo de perímetro 100m son 25m por lado para obtener un área máxima de $625m^2$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Evaluar el limite $\lim_{x \to -2}(x^2 + x - 2 / x^2 - 4)$. **R**. 3/4.
2. Evaluar el limite $\lim_{x \to -\infty}(4x^3 - 2x^2 - 1 / 6x^3 + 5x + 2)$. **R**. 2/3.
3. Dada la función $y=f(x) = 3x^2 -5x + 6$ hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal en el valor de abscisa x=2. **R**. $y = -7x + 6$, $x = -7y + 58$.
4. Calcular la derivada del cociente $f(x)=\frac{2x+5}{3x-2}$. **R**. $f'(x) = -19/(3x-2)^2$.
5. Usar la regla de la cadena para calcular $\frac{dy}{dx}$ para $y=(u^2 / u^2 +1)$, $u=2x+1$. **R**. $6x(x^2+1)^2$.
6. Para la función y =f(x)= (senx-xcosx)/cosx calcular f'(x). **R**. $\tan^2 x$.
7. Calcular los máximo y mínimos y puntos de inflexión del polinomio $p(x)=x^3-9x^2+24x-7$. **R.** min (4,9) y max (2,13).

UNIDAD 7

CÁLCULO INTEGRAL

OBJETIVO

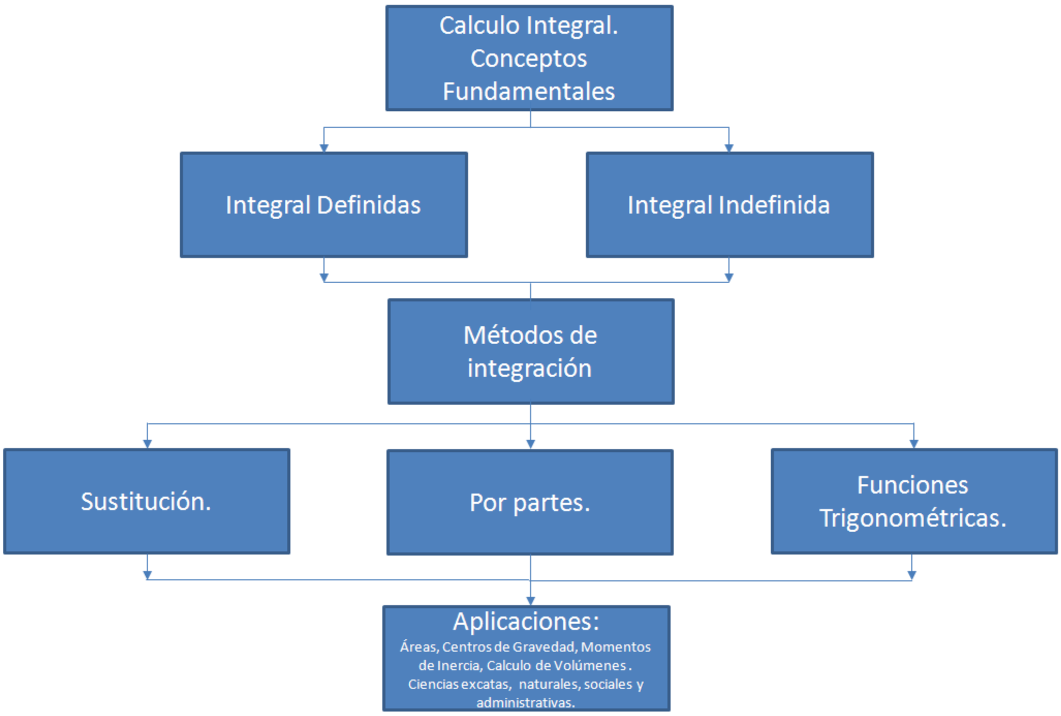
El alumno identificará los elementos y conceptos del cálculo integral desde un carácter intuitivo, trabajando con una visión geométrica basándonos en el concepto del área y dando continuidad a la unidad del cálculo diferencial y la serie de problemas irresolubles de la geometría analítica. Distinguirá y relacionará la integral definida e indefinida de una función.

Sabrá integrar numéricamente conociendo las técnicas elementales del cálculo de primitivas.

Comprenderá los elementos del cálculo integral aplicándolos a problemas propios de la ingeniería y la arquitectura resolviéndolos de manera analítica.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudian los elementos y conceptos del cálculo integral como base fundamental para la resolución de problemas de ingeniería y arquitectura tales como el cálculo de áreas y volúmenes, cálculo de centros de gravedad de sólidos y cálculo de momentos de inercia entre otros muchos a partir de las teorías desarrolladas en los capítulos anteriores.

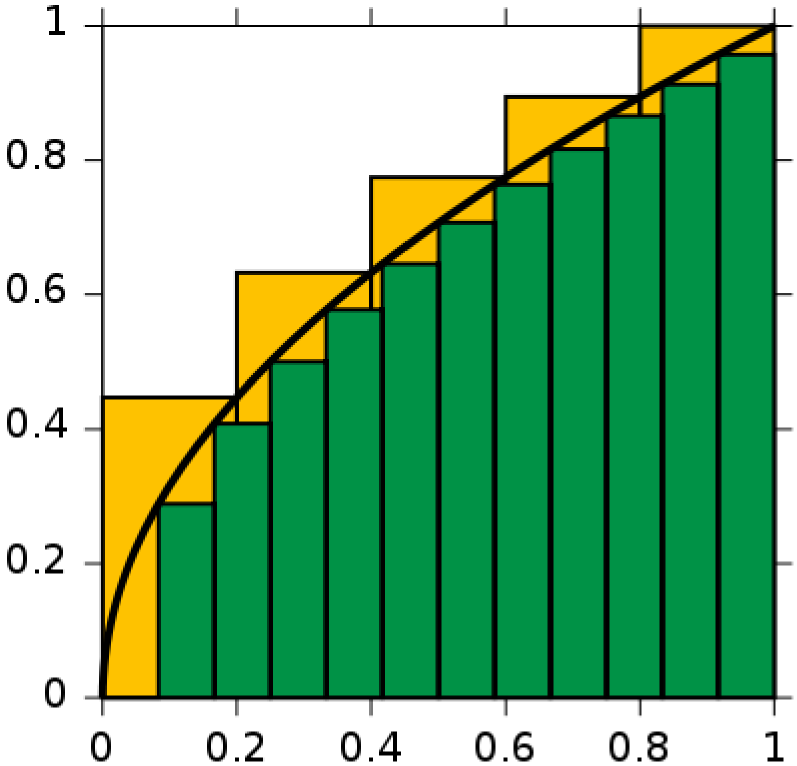
El cálculo diferencial e integral constituye el segundo gran desarrollo en la historia de las matemáticas después de la geometría euclidiana y integran la matemática moderna, por ende no cabe duda de su usabilidad en la vida cotidiana de nuestro siglo aunado al gran avance tecnológico que hoy nos rodea.

7.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Del capítulo cinco de la Geometría Analítica se tiene la propuesta de resolver el problema denominado de la cuadratura que consiste en calcular el área comprendida entre dos puntos y bajo la curva definida por una función. Es en esta etapa de las matemáticas que se da solución a este tipo de problemas.

7.1.1 Área bajo una curva

Sin pérdida de generalidad y sólo para efectos de presentación consideremos la función $y = \sqrt{x}$ limitada por las rectas x = 0 y x = 1. La idea central es usar el concepto de área de una figura regular como lo es el rectángulo y dividir el intervalo [0,1] sobre el eje X en n rectángulos no necesariamente iguales. La siguiente figura nos ha quedado *ad hoc* para visualizar el hecho.



Como se aprecia, una aproximación al área bajo la curva lo constituye la suma de las áreas de los rectángulos en color amarillo y una mejor aproximación es la suma de las áreas de los rectángulos en color verde. Por qué no proseguir con estas subdivisiones cada vez más pequeñas con las cuales se espera una mejor aproximación al área buscada. Demos cierto matiz de formalismo a la idea.

En general proponemos dividir el intervalo [*a, b*] en *n* rectángulos, no necesariamente iguales. Denotemos la longitud de la base del primer rectángulo por Δx_1, la del segundo por Δx_2, y así sucesivamente hasta el última, Δx_n. En cada rectángulo elegimos los números x_1, x_2, ..., x_n, y escribimos la suma de los n rectángulos como:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n \qquad \text{Ecuación. 7.1}$$

Donde el término S_n es igual a la suma de las áreas de los rectángulos de la figura ya que el área de cada rectángulo está dada por el producto de la base (Δx_i) por la altura que es el valor de la función $y=f(x)$ evaluada en el punto ξ_i es decir $f(\xi_i)$ que está contenido en el intervalo $\Delta x_i \leq \xi_i \leq \Delta x_{i+1}$. Ya hemos inducido que entre más fina sea la subdivisión del segmento [a, b], más próxima se hallará la suma S_n al área S bajo la curva, consideremos entonces una sucesión de tales valores por división del intervalo [a,b] en partes cada vez más pequeñas donde la suma S_n tenderá a S. En otras palabras, suponemos no sólo que *n* (subdivisión de intervalos) crece indefinidamente, sino también que la longitud del mayor Δx_i en la *n*-ésima subdivisión tiende a cero (lo más pequeña posible). Así:

$$S = \lim_{máx\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Con esta última fórmula, tenemos que el cálculo del área buscada se reduce a calcular el límite S. Con estos fundamentos estamos listos para pasar a la definición formal de la integral definida.

7.2 INTEGRAL DEFINIDA

En el apartado anterior partimos del hecho de un concepto gráfico y no formal de lo que debiéramos entender como el área bajo una curva, de este hecho no formal pasamos a una definición formal del área bajo la curva obteniendo así una definición matemática.

Consideremos una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, supongamos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces la gráfica de la función f, las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ y el eje X determinan una área llamada *región bajo la grafica de f desde a hasta b*. Además al límite S se le llama *la integral definida* de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$, así:

$$S = \lim_{máx\, \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \qquad \text{Ecuación. 7.2}$$

El termino $f(x)d(x)$ se le llama el integrando; a y b son los límites de integración siendo a el inferior y b el superior (en este orden). Con esto sabemos cómo calcular la integral definida, bosquejemos un ejemplo.

Ejemplo. Calcular el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

Solución. Preparemos los parámetros para la suma, dividimos el intervalo en n partes iguales por lo que la longitud de cada parte es $\Delta x = \frac{3}{n}$ y además, $\xi_1 = 0$, $\xi_1 = \Delta x$, $\xi_2 = 2\Delta x$, … , $\xi_n = n\Delta x = 3$. La suma de S_n en base a la ecuación 7.1 y aplicando operaciones algebraicas es:

$$S_n = (\Delta x_i)^3 (1+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2) = (\Delta x)^3 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \left(\frac{3}{n}\right)^3 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$$

$$\frac{9}{2}\left(\frac{(n+1)}{n}\right)\left(\frac{(2n+1)}{n}\right) = \frac{9}{2}\left(1+\frac{1)}{n}\right)\left(2+\frac{1)}{n}\right)$$

Ahora, apliquemos la ecuación 7.2 para calcular el límite:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{2}\left(1+\frac{1)}{n}\right)\left(2+\frac{1)}{n}\right) = 9.$$

Por lo tanto, el valor del área bajo la curva es de 9 u^2. Este método para calcular áreas a través de los límites resulta oneroso, por lo que es necesario recordar que el cálculo diferencial es la operación inversa del cálculo integral, lo que nos permite a través de las primitivas o diferenciales hallar la integral de una función de una manera más económica y no necesariamente con la definición de la integral.

Antes de concluir esta sección es conveniente acotar una serie de propiedades de la integral definida. Sean Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo de integración $[a, b]$, entonces se cumplen las siguientes proposiciones siendo c una constante y a < c < b en caso de ser requerida:

i. $\int_a^a f(x)dx = 0$

ii. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

iii. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$

iv. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

v. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

7.3 INTEGRAL INDEFINIDA

En los apartados anteriores partimos del hecho de un concepto gráfico y no formal de lo que debiéramos entender como el área bajo una curva, de este punto pasamos a una definición formal del área bajo la curva obteniendo así una definición matemática de la integral definida.

La palabra ”integral” también hace referencia a la noción de *primitiva que es* una función F, cuya derivada es la función dada f y en este caso se denomina la integral indefinida. Formalmente decimos que una primitiva arbitraria $F(x)$ de una función dada $f(x)$ es la *integral indefinida* de $f(x)$ y se escribe de la forma:

$$\int f(x)\,dx$$

Por otro lado, si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, la integral indefinida de $f(x)$ está dada por la formula:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Donde C es una constante arbitraria llamada *Constante de Integración*. Con todo lo anterior, queda claro que el cálculo integral se relaciona con el cálculo diferencial y entonces la integral definida de una función se puede calcular una vez que se conoce una antiderivada.

Retomando el caso de la integral definida y con el concepto de la función primitiva, tenemos que para el cálculo de la integral definida tenemos la fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

para $F(x)$ una primitiva de $f(x)$. Esta fórmula también se acostumbra denotar con la fórmula de Newton y Leibnitz, como sigue:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ecuación 7.3

Después de las definiciones y desarrollos anteriores, es necesario pasar a analizar y realizar las técnicas de integración, pero antes resolvamos el mismo ejemplo de la sección 7.2 anterior, ahora con las técnicas que ya conocemos.

Ejemplo. Calcular el área de la región limitada por la curva $y = x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 3$ mediante la técnica de la primitiva de la función.

Solución. La primitiva de la función $y = f(x) = x^2$ es $F(x) = (x^3 / 3)$ ya que la derivada de $F(x)$ es x^2, así aplicando la fórmula de integración de Newton y Leibnitz:

$$\int_0^a x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{a^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Evaluando el valor de a = 3 obtenemos como resultado 9 u^2 como ya sabíamos. Nótese la facilidad del cálculo en comparación del realizado en el ejemplo de la sección 7.2.

7.4 TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

Antes de entrar propiamente a las técnicas de integración, es necesario recordar la tabla fundamental de derivadas, pues de ésta puede obtenerse la tabla de integración correspondiente a partir de la función primitiva. Presentamos aquí sólo una docena de las fórmulas de integración inmediatas, para una colección completa, consultar la bibliografía de la unidad.

Reglas Básicas de Integración.	
Constante	$\int a dx = a\int dx = ax + C.$
Potencias	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si} \quad n \neq -1.$
Exponenciales	$\int e^x dx = e^x + C.$
Logarítmicas	$\int \frac{1}{x}dx = L\|x\| + C$
Constante elevada a función	$\int a^x dx = \frac{a^x}{La} + C$
Coseno	$\int \cos xdx = \operatorname{sen} x + C.$
Seno	$\int \operatorname{sen}xdx = -\cos x + C.$
Secante cuadrada	$\int \sec^2 xdx = \operatorname{tg}x + C.$
Secante por la tangente	$\int \sec x\operatorname{tg}xdx = \sec x + C.$
Cosecante por la cotangente	$\int \operatorname{cosec}x \operatorname{cotg}xdx = -\operatorname{cosec}x + C.$

Cosecante cuadrada	$\int \cos ec^2 xdx = -\cot gx + C.$
Arco tangente	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$
Arco seno	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsenx + C$

Ejemplo. Determinar la integral de la función $y = f(x) = 12x^3 + 3x^2 + 6x + 3$ en $[0, 1]$.
Solución. Aplicando la regla de suma de funciones seguida de la regla de potencias, tenemos:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (12x^3 + 3x^2 + 6x + 3)dx = \int_0^1 (12x^3)dx + \int_0^1 (3x^2)dx + \int_0^1 (6x)dx + \int_0^1 (3)dx$$

$$= (12x^4)/4 + (3x^3)/3 + (6x^2)/2 + 3x = F(b) - F(a) = F(1) - F(0) = 10.$$

Evaluando en $[a, b] = [0, 1]$ aplicando la ecuación 7.3 tenemos el valor 10.

Ejemplo. En la sección 7.1 se realizó el planteamiento de calcular el área bajo la curva de la función $y = \sqrt{x}$ limitada por las rectas $x = 0$ y $x = 1$, calcular el área por integración.

Solución. Este problema se traduce a calcular la integral: $\int \sqrt{x}dx$ para la cual aplicando la regla de las potencias de la tabla anterior:

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}\,dx = (x^{3/2} / 3/2) + C = 2/3 x^{3/2} = 2/3 \sqrt{x^3} + C$$

Ahora, el problema se circunscribe al intervalo dado por las rectas $x = 0$ y $x = 1$ por lo que debemos calcular esta integral ahora definida desde 0 a 1:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx = 2/3 \sqrt{x^3} = F(b) - F(a) = F(1) - F(0) = 2/3.$$

Es el momento de advertir que aunque se tenga una lista muy grande de integrales inmediatas, en general no existe un procedimiento concreto para la resolución de ciertas integrales o los problemas que las generaron; por lo tanto, se requiere de la habilidad, el análisis del alumno y desde luego de ciertos artificios matemáticos. Para soslayar en cierta situación, se tienen ciertas técnicas de integración que veremos enseguida, además se siguiere la realización diversos ejercicios.

7.4.1 Integración por sustitución o cambio de variable

En este método de integración la idea es equiparar la expresión algebraica del integrando por una expresión más cómoda o inmediata para integrar, al final se debe devolver a la variable original. En otras palabras, el problema trata de la solución de la integral de una función $f(x)$ que pueda ser expresada como el producto de funciones tales que $f(x)=g(h(x)h'(x))$ de la cual sabemos integrar $g(x)$ sustituyendo $u=h(x)$ y $du=h'(x)dx$ de tal manera que: $\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du$. Se calcula esta ultima integral y se restablece el valor de $h(x) = u$ en este ultimo valor para obtener el resultado de la integral original de $\int f(x)\,dx$.

Como se espera, este modo permite transformar muchas integrales en otras prácticamente inmediatas. Una idea que suele funcionar bien para encontrar un posible cambio es buscar dentro de la integral una función que su derivada (salvo constantes que aparezcan multiplicando) esté multiplicando el diferencial dx, si a esa función la llamamos u normalmente la integral queda más sencilla.

Ejemplo. Resolver la integral: $\int x\,(x+2)^{1/2}\,dx$.

Solución. Tomemos $u= x+2,\ du = dx;$ entonces $x= u-2,\ du = dx;$ sustituyendo en la integral:

$$\int x\,(x+2)^{1/2}\,dx = \int (u-2)\,(u)^{1/2}\,du = \int (u^{3/2} - 2u^{1/2})du = (u^{5/2} / 5/2) - (2\,u^{3/2} / 3/2) + C =$$

$$= 2/5\,u^{5/2} - 4/3\,u^{3/2} = 2/5\,(x+2)^{5/2} - 4/3(x+2)^{3/2} + C.$$

7.4.2 Integración por partes

Consideremos las funciones $u = f(x),\ v = g(x)$ de la fórmula de la diferencial de un producto de funciones, tendremos $d(uv) = udv + vdu,$ despejando $udv = d(uv) - vdu$ integrando en ambos miembros de esta última ecuación: $\int u\cdot dv = \int d(u\cdot v) - \int v\cdot du$ con lo que nos quedará la fórmula de la integración por partes:

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du.$$

Notar que para la función que escojamos como u hay que saber derivarla, pero la que escojamos como v hay que saber integrarla, en otras palabras; la integral $\int v\cdot du$ debe ser mucho más sencilla de calcular que la integral original original $\int u\cdot dv$. Bajo la premisa anterior y sobre todo la práctica se recomienda:

i. Una vez iniciado el método, si la nueva integral $\int v{\cdot}du$ es más complicada que la original, intercambiar los valores de v y du, volver a iniciar el método.

ii. Puede ser necesario aplicar el método de integración por partes más de una vez en el mismo ejercicio, a esto le llamaremos *integración sucesiva*.

iii. Es posible que al hacer integración sucesiva, se llegue como resultado una integral igual a la que origino el problema, se despeja la integral para obtener una primitiva.

iv. El método de integración por partes es especialmente útil en el cálculo de las siguientes integrales prototipo, donde $p(x)$ es un polinomio:

v. $\int p(x){\cdot}a^x\,dx, \int p(x){\cdot}e^x\,dx, \int p(x){\cdot}sen(x)\,dx, \int p(x){\cdot}cos(x)\,dx,$

vi. $\int a^x{\cdot}sen(x)\,dx, \int a^x{\cdot}cos(x)\,dx, \int e^x{\cdot}sen(x)\,dx, \int a^x{\cdot}cos(x)\,dx.$

vii. Lo menos recomendable para la función u son las funciones exponenciales y trigonométricas.

Ejemplo. Calcular la integral $\int 3\,x^2 \ln x\,dx.$

Solución. Tomar $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx$ de donde $du = \frac{dx}{x}$, $v = x^3/3$. El valor 3 se saca como una constante y se aplica al final. Aplicando la formula de integración por partes:

$$\int u{\cdot}dv = u{\cdot}v - \int v{\cdot}du = 3 \int \ln x\, x^2\,dx = 3\left((x^3/3)(\ln x) - \int x^3/3\ \frac{dx}{x}\right) = 3\left(\frac{\ln x}{3}x^3 - \frac{1}{3}\int x^2\,dx\right)$$

$$= x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 + C.$$

7.4.3 Integración de funciones trigonométricas

Ahora daremos ideas sobre la integración cuando se tienen funciones trigonométricas. En este caso se hará uso de identidades trigonométricas para llegar a expresiones con integrales inmediatas o por lo menos más simples para su solución. Las sugerencias pueden ser reducidas a:

i. La forma directa para expresiones como: $\int senax{\cdot}cosbx, \int senax{\cdot}senbx$ o $\int cosax{\cdot}cosbx$ es usar las identidades sen(ax)·cos(bx)= $\frac{1}{2}$(sen(a-b)x + sen(a+b)x), sen(ax)·sen(bx) = $\frac{1}{2}$(cos(a-b)x - cos(a+b)x), cos(ax)·cos(bx) = $\frac{1}{2}$(cos(a-b)x + cos(a+b)x).

ii. Integrar potencias impares de las funciones seno y coseno usando la identidad $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$,

iii. Integrar potencias pares del seno y coseno usando las identidades $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$,

iv. Integrar potencias de tanx y secx mediante la identidad $1+\tan^2 x = \sec^2 x$.

Ejemplo. Calcular $\int 2sen^2 x dx$.

Solución. Usando la identidad: $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ y desarrollando las integrales:

$$\int 2sen^2 xdx = 2\int sen^2 xdx = 2\int \tfrac{1}{2}(1-cos2x)dx = \int 1dx - \int cos2xdx = x - \tfrac{1}{2}\int cos2x2dx$$

$$= x - \tfrac{1}{2} sen2x + C.$$

7.5 APLICACIONES

Las aplicaciones del Cálculo Integral, en particular dentro de la arquitectura, permite determinar el área y el volumen de concreto para la construcción de una obra, esto por mencionar sólo un ejemplo. En realidad, esta rama de la matemática es tan solicitada en todas las áreas como las Ciencias Sociales, en la Física, Economía, en la industria en general, Ingeniería; en fin, tratar de enumerar todas las áreas de posible aplicación del cálculo integral sería absurdo. En su lugar hagamos ejercicios con aplicaciones prototipo de en para el área que nos ocupa.

7.5.1 Calculo de áreas de figuras planas

Ejemplo. Calcular el área limitada por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$ dentro del cuadrante positivo unitario.

Se trata de determinar el área comprendida entre las curvas, debemos visualizar que curva es mayor en todo punto del intervalo dado ($0 \le x \le 1$), para entonces determinar una función que sea diferencia de ambas curvas ($\sqrt{x} - x^2$). Por otro lado, también se deben calcular los puntos donde ambas curvas coinciden; en este caso son los puntos (0,1). Por consecuencia el valor del área esta dado por la integral:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 (\sqrt{x}\,)dx - \int_0^1 (x^2)dx = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}\,u^3.$$

7.5.2 Centros de gravedad de figuras planas

El centroide de una figura plana o de una área se refiere al punto que define el centro geométrico del área. Denotadas por $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, las coordenadas de este punto matemáticamente están dadas por las formulas: $\bar{x}_1 = \int_A x\, dA / A$ y $\bar{x}_2 = \int_A y\, dA / A$. El ejemplo ahora consiste en calcular el centroide de un rectángulo de base *b* y altura *h*.

Consideremos un rectángulo de base b y altura h, por lo tanto su Área $A = bh$, así $dA = hdx$, y en el otro sentido $A = bh$, así $dA = bdy$. Integrando ambos sentidos:

$$\int_A x\, dA = \int_A xh\, dx = \int_0^b xhdx = h\int_0^b (x\, dx) = h(x^2)/2 = F(b) - F(a) = hb^2/2.$$

$$\int_A y\, dA = \int_A yb\, dx = \int_0^h ybdy = b\int_0^h (y\, dy) = b(y^2)/2 = F(b) - F(a) = h^2b/2.$$

Por lo tanto, de la definición de $\bar{x}_1 = \int_A x\, dA / A = (hb^2/2) / bh = hb^2/2bh = b/2$. De manera análoga ocurre en la otra dirección $\bar{x}_2 = \int_A y\, dA / A = (h^2b/2) / bh = h^2b/2bh = h/2$. Con los resultados anteriores obtenemos que el centroide de la superficie esta dado por $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=(b/2,h/2)$.

7.5.3 Momentos de inercia

La integral $I_x = \int_A y^2\, dA$ representa el momento de inercia respecto al eje x.

Ejemplo. Calcular el momento de inercia de un rectángulo con relación a su base.

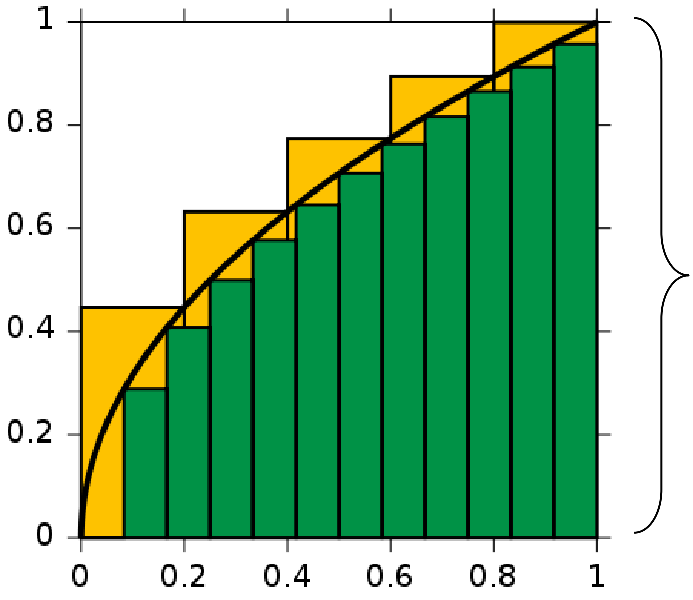
Situando el rectángulo de manera vertical denotemos por *b* la longitud de su base y por *h* la altura. Se toma una sección transversal del plano y en ella se define *dA* a partir del producto de *b* por *dy*, es decir: $dA = bdy$, entonces el momento de inercia está dado por:

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_0^h (y^2\, bdy) = b\int_0^h (y^2\, dy) = b(y^3)/3 = F(b) - F(a) = bh^3/3.$$

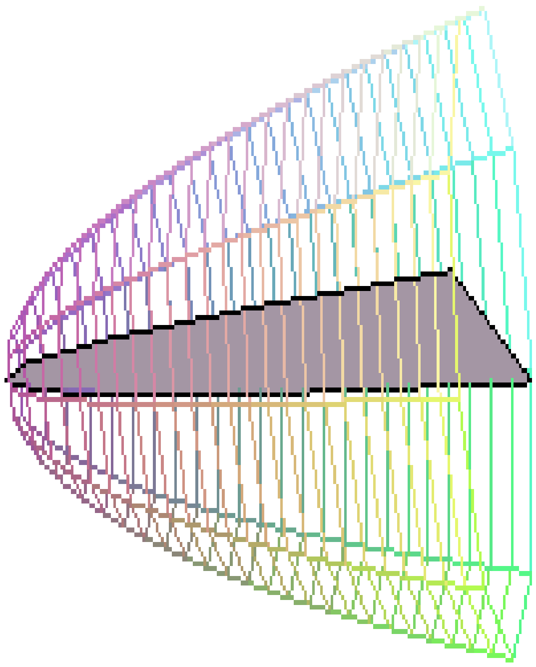
7.5.4 Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución

Los sólidos de revolución son secciones espaciales que se obtienen al hacer rotar una superficie entorno a un eje. Veamos un ejemplo para calcular mediante integrales el volumen de un sólido generado de esta manera.

Ejemplo. Recordando como iniciamos nuestra exposición del cálculo integral en esta unidad con la aproximación de área bajo la curva de la función $y = \sqrt{x}$ en el intervalo unitario del cuadrante positivo, ahora procedamos a calcular el volumen que se genera al hacer rotar esta la función y sobre el eje x. Las siguientes figuras ilustran el hecho.



Radio r
r = $\sqrt{x}$
Área = πr^2
A(x)= πr^2



Radio r
r = $\sqrt{x}$
Área = πr^2
A(x)= πr^2
Volumen = $\int A(x)dx$
$0 \leq x \leq 1$

Como se observa en las figuras, la distancia del centro del eje (eje X) a cada punto de la superficie del solido es la función y = $\sqrt{x}$ o sea que r = $\sqrt{x}$. Los limites de integración son el intervalo unitario $0 \leq x \leq 1$. Entonces el volumen esta dado por la función de área A(x) multiplicada por el diferencial. Integrando:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi r^2 dx = \int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2 dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi\ (x^2/2) = F(b) - F(a) = \pi/2.$$

Por lo tanto, el volumen del solido es $\pi/2$ u^3.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Desarrolle las siguientes actividades:

1. Volúmenes de Sólidos de Revolución.

   Existen diversos métodos para determinar el volumen de sólidos de revolución mediante integración: Método del Disco, Método de la Arandela y el Método de los casquillos cilíndricos.

   La actividad consiste seleccionar uno de los métodos, investigar y desarrollar los conceptos de integración del método y desarrollar por lo menos un ejercicio o ejemplo de integración de volúmenes por ese método.
2. Momento de Inercia.

   En las propiedades de los materiales, derivado o asociado al momento de inercia se tiene el concepto de Momento Polar de Inercia. Determine que el momento polar de Inercia para un círculo con respecto a su centro es $I_z = I_x + I_y = \pi r^4/2$. Desde luego desarrolle el proceso de integración necesario.
3. En el mercado de software existen diversos productos capaces de calcular integrales. Haga un análisis de los mismos determinando si alguno de ellos es capaz de realizar cálculos de integrales como los problemas que se han planteado y en caso afirmativo conteste la pregunta: ¿es necesario que yo aprenda a realizar cálculo integral si existe tal o cual programa que lo hace más rápido? Detalle su respuesta aun en el caso de que no existan tales programas.

AUTOEVALUACIÓN

Calcular la integral de las siguientes funciones:

1. $\int 2\,(2x + 3)^{2}\,dx$ **R**. $\frac{8}{3}x^{3} + 12x^{2} + 18x + C.$

2. $\int 5\,(\cos x - \frac{1}{2}sen\,x + 2\sec^{2}x + e^{x} - 10)\,dx$ **R**. $5\,sen\,x + \frac{5}{2}\cos x + 10\tan x + 5\,e^{x} - 50x + C.$

3. $\int 3(sen^{2}3x\cos 3x)dx$ **R**. $\frac{1}{3}sen^{3}\,3x + C.$ Sugerencia tomar $u = sen3x$ como sustitución.

4. $\int e^{x}\cos x\,dx$ **R**. $\frac{1}{2}e^{x}\,(sen\,x + \cos x) + C.$ Sugerencia tomar $u = e^{x}$, además las aplicar el método de integración por partes dos veces con la misma función u y se llega como resultado a una integral igual a la que origino el problema, se despeja la integral para obtener una primitiva.

5. $\int 3(sec^{4}3x)dx$ **R**. $tan\,3x + \frac{1}{3}tan^{3}\,3x + C.$ Considerar la identidad trigonométrica $1+tan^{2}x = sec^{2}x$.

UNIDAD 8

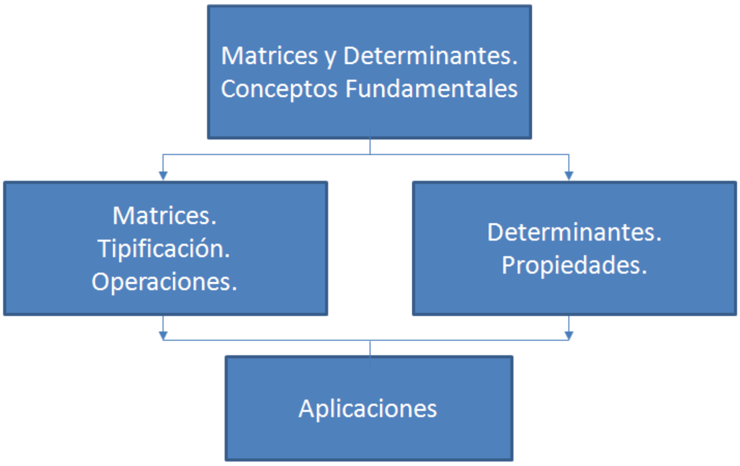
DETERMINANTES Y MATRICES

OBJETIVO

El estudiante identificará y aplicará los conceptos básicos de Matrices y Determinantes, sus propiedades y problemas que requieren de estas técnicas para su solución.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad vamos a hacer una presentación básica de los conceptos fundamentales para el conocimiento y uso de las Matrices y los Determinantes de cara a fundamentar el empleo de las mismas. Las matrices y los determinantes son herramientas del álgebra que facilitan el uso y tratamiento de datos.

8.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Es común que en muchas actividades de la vida cotidiana nos encontremos con arreglos rectangulares de números, para analizar y resolver una situación dada. En matemáticas a este tipo de arreglos se les llama Matriz. Por lo tanto, una Matriz es una entidad matemática equivalente a una tabla de valores de cualquier naturaleza en particular números cuya estructura está organizada en renglones y columna perfectamente definidas.

Más formalmente, se llama Matriz de m renglones y n columnas (matriz de orden o tamaño $m \times n$) al conjunto rectangular de datos (llamados los elementos o entradas de la matriz). Al elemento de una matriz que se encuentra en la fila i - ésima (líneas horizontales) y la columna j - ésima (líneas verticales) se le llama elemento i, j o elemento (i, j)-iésimo de la matriz. Se resuelve poner primero las filas y después las columnas en la notación de la entrada.

Reorganizando conceptos, se llama matriz A de orden $m \times n$ a todo conjunto rectangular de elementos a_{ij} dispuestos en m filas y n columnas de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Abreviadamente se denota esta matriz como:

A = (a_{ij}), con i =1, 2, ..., m, j =1, 2, ..., n.

Dada una matriz cuadrada (aquella en que $m = n$) se llama Determinante al conjunto de elementos ordenados y limitadas entre dos líneas verticales. Denotado por |A| o det (A), su representado está dada por:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Una matriz cuadrada permite utilizar todas las entradas para obtener una suma de productos que la representa, a este número se le llama el Determinante. Veremos la manera de calcular este número a la vez de cómo operar con estas dos nuevas entidades.

8.2 MATRICES

Como vimos en la secciona anterior, las matrices se denotan por las primeras letras mayúsculas del alfabeto: A, B, C.

Recordemos la notación de una matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A = (a_{ij}), con i, i =1, 2, ..., m, i, j =1, 2, ..., n

Identifiquemos los elementos de una matriz y sus tipos.

8.2.1 Tipos de matrices

Matriz Nula. Posee entradas nulas a_{ij} = 0 para todo i,j, ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz Fila. Sólo posee una fila, ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz Columna. Sólo posee una columna, ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Matriz Cuadrada. Como ya se ha dicho, tiene $m = n$, ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Diagonal Principal. La diagonal principal de una matriz de orden $m \times n$ son los elementos: a_{11}, a_{22}, a_{33}, ... , a_{nn}. Ejemplo de la matriz anterior: 1, 5, 9.

Traza de una Matriz. Suma de los elementos de la diagonal principal: $a_{11}+a_{22}+a_{33}+ \ldots +a_{nn}$. Ejemplo de la matriz anterior: 1+5+9 = 15.

Diagonal Secundaria. Es la formada por los elementos: $a_{1n}+a_{2n-1}+a_{3n-2}+ \ldots +a_{n1}$. Ejemplo de la matriz anterior: 3, 5, 3.

Matriz Triangular Superior. Si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son nulos. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior. Si todos los elementos por arriba de la diagonal principal son nulos. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz Diagonal. Si una matriz es a la vez triangular superior e inferior, sólo tiene elementos en la diagonal principal, es llamada Matriz Diagonal. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz Identidad. Si una matriz diagonal tiene en su diagonal principal sólo unos, se denomina matriz unidad o identidad. Se suelen representar por I_n donde n es el orden o tamaño de la matriz. Ejemplo:

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Traspuesta. Dada una matriz cualquiera A, se llama matriz traspuesta de A, y se representa por A^t a la matriz que resulta de intercambiar las filas y las columnas de A. Notar que si A es una matriz de tamaño $m \times n$, su traspuesta A^t tendrá tamaño $n \times m$. Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica, Es una matriz cuadrada para la que se cumple que $A^t = A$. Los elementos son simétricos respecto a la diagonal principal, es decir; es su eje de simetría. Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Antisimétrica. Es aquella para la que se cumple que $A^t = -A$. Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 3 \\ -10 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ya que: $A^t = -A$.

$$A^t = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -3 \\ 10 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix};\ -A = \begin{pmatrix} 0 & -10 & -3 \\ 10 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

8.2.2 Operaciones con matrices

Suma y Diferencia. Para sumar o restar matrices entre sí, es necesario que tengan el mismo número de columnas y renglones. Dadas dos o más matrices podemos realizar su suma o diferencia sumando o restando los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño. Sean A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) y C = (c_{ij}) tres matrices del mismo orden, entonces La suma C = A + B es en símbolos: (c_{ij}) = (a_{ij}) - (b_{ij}) y la diferencia C = A – B en símbolos: (c_{ij}) = (a_{ij}) + ($-\, b_{ij}$).

La operación de suma o diferencia de matrices obedece a las siguientes propiedades:

i. Conmutatividad: A + B = B + A.
ii. Asociatividad: A + (B + C) = (A + B) + C.
iii. Elemento neutro: La matriz nula del tamaño correspondiente.
iv. Elemento opuesto de A: La matriz -A, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

Ejemplo. A = $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$ la suma es:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+5 & -2+6 \\ 3+7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una Matriz por un escalar. Multiplicar el escalar por todas y cada una de las entradas. Sea A = (a_{ij}) y k un numero real. Entonces $k \cdot$ A = ($k \cdot a_{ij}$). Esta operación obedece a las siguientes propiedades:

i. Distributividad respecto de la suma de matrices: k·(A + B) = k·A + k·B.
ii. Distributividad respecto de la suma de números: (k + d)·A= k·A + d·A.
iii. Asociatividad: k·(d · A)=(k · d)·A.
iv. Elemento neutro, el número *1*: *1*·A=A.

Ejemplo. A = $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ k· = $\frac{1}{2}$, entonces

$$k \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 & \frac{1}{2}(-4) \\ \frac{1}{2} \cdot 6 & \frac{1}{2} \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de una Matriz por otra Matriz. Para efectuar esta operación algebraica se pide que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. Sean A = (a_{ij}) matriz de orden $m \times n$, B = (b_{ij}) matriz de orden $n \times p$ y C = (c_{ij}) esta será el producto y es de orden $m \times p$, entonces el producto C = A · B en la entrada c_{ij} se obtiene multiplicando uno a uno los elementos de la fila i de A por los elementos de la columna j de B y al final sumando los resultados. En fórmulas, la entrada c_{ij} de la matriz producto C de orden $m \times p$, queda definida por la expresión:

$$C_{mxp} = A_{mxn} \cdot B_{nxp} \; ; \; c_{ij} = \sum_{k=1,n} (a_{ij} \,.\, b_{ij}).$$

Ejemplo. Se pide realizar el producto de A ·B para: A = $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Primero comprobamos el orden de las matrices: $A_{2x3} \cdot B_{3x3} = C_{2x3}$.

$$A_{2x3} \cdot B_{3x3} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{2X3} . \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3X3} = C_{2x3} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}_{2X3}$$

Ahora, realicemos los cálculos para obtener las entradas de la matriz producto C.

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 5 \cdot 5 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot 4 + 8 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 5 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$C = \begin{pmatrix} 21 & 37 & 40 \\ 3 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

Las propiedades del producto de matrices son:

i. Asociatividad: A·(B·C) = (A·B)·C.
ii. Distributividad respecto de la suma:

   A · (B + C) = A · B + A · C.

   (B + C) · A = B · A + C · A

iii. Elemento neutro, la matriz identidad correspondiente, si A es $m \times n$:

   A · I_n = A

   I_m · A = A

iv. En general el producto de matrices no es conmutativo

   A · B ≠ B · A

v. El producto de dos matrices no nulas A y B puede dar lugar a una matriz nula.

La Matriz Inversa. Sea A una matriz cuadrada de tamaño $n \times n$. Se dice que A es invertible o que posee inversa si existe otra matriz del mismo orden denominada Matriz Inversa de A denotada por A^{-1} tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n \text{ y } A \cdot A^{-1} = I_n$$

Si A no tiene inversa, se dice que es singular o no invertible. Si una matriz tiene inversa, dicha matriz posee la propiedad de la unicidad.

8.3 DETERMINANTES

Dada una matriz cuadrada A de tamaño *n*, esta permite utilizar todos sus elementos o entradas para obtener una suma de productos, como ya hemos descrito en la sección 8.1. Para una matriz A = $(a11)$ el determinante de A que es orden 1 se define como:

$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}$$

Para una matriz A = $\begin{pmatrix} a21 & a12 \\ a21 & a22 \end{pmatrix}$ el determinante de A que es orden 2 se define como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Para una matriz A = $\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$ el determinante de A que es orden 3 se define como:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Si un determinante de orden 3 se define a partir de uno de orden 2, entonces el determinante de orden 4 se define con respecto al determinante de orden 3, y así sucesivamente. Esto quiere decir que un determinante de orden *n* puede definirse con respecto a un determinante de orden *n* -1. Este valor no es fácil de calcular y queda fuera de los alcances del presente trabajo.

Ejemplo. Calcular el determinante de la matriz A= $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución. |A| = det (A) = 2·8 - 6·(-4) = 16+24 = 40.

8.3.1 Propiedades de los determinantes

Sean A y B un par de matrices cuadradas del mismo orden. Algunas propiedades de los determinantes son las siguientes:

i. El determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden: det (A) = det (A^t).
ii. Si A posee un renglón o columna de ceros, entonces det (A) = 0.

iii. Si A contiene dos o más renglones o dos o más columnas iguales, entonces det (A) = 0.
iv. Si A es matriz no singular, entonces det (A) ≠ 0.
v. En el producto de determinantes, det (AB) = det (A) · det (B).
vi. En el producto del determinante por un escalar, det (kA) = k^n det (A).

8.4 APLICACIONES PRÁCTICAS

Las matrices y lo determinantes se emplean diversos campos. Mencionaremos sólo algunos que mantienen tal vez una relación directa con la arquitectura: Análisis de fenómenos de transporte, Ingeniería Térmica, Análisis de esfuerzos y deformaciones, fuerzas, desplazamientos, análisis de estructuras, métodos aproximados de solución por como son diferencias finitas, métodos variacionales, funciones de ensayo y elementos finitos.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Demostrar que en toda matriz traspuesta se cumplen las siguientes propiedades:
   i. $(A^t)^t = A$, es decir, la traspuesta de la traspuesta es la matriz inicial.
   ii. $(A + B)^t = A^t + B^t$
   iii. $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
2. nvestigue el método de solución de un sistema de ecuaciones simultaneas de primer grado mediante el método de determinantes y resuelva el sistema: $8x - 6y = 16$; $2x + 10y = 50$. **R**. x=5, y=4.
3. El planteamiento de un problema a través de ecuaciones matriciales es de uso común en la industria. Analice el algebra necesaria ¿qué consideraciones debe tomar? y resuelva la ecuación matricial para X: $A(XB+A)=C-3XB$. **R**. $X = (A+3I)^{-1}(C-A^2)B^{-1}$.
4. Desarrolle el binomio cuadrado en Matrices $(A+B)^2$. **R**. $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Para la matriz A = $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y k =2, calcular el determinante det (kA) y por otro lado el producto k^n det (A) donde n es el orden de la matriz. ¿Se cumple: det (kA) = k^n det (A) ?. **R**. -1736.
2. Verifique la igualdad $(kA)^t = kA^t$ para k=4 y A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **R**. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 4 \\ 20 & 12 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Si A = $\begin{pmatrix} 1.3 & -1 \\ 3 & 2.1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ calcule A·B y B·A. ¿Es conmutativo, es decir A·B = B·A? **R**.No.
4. Para la matrices A=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y B=$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ calcule $(A+B)^2$. **R**. $\begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}$.

UNIDAD 9

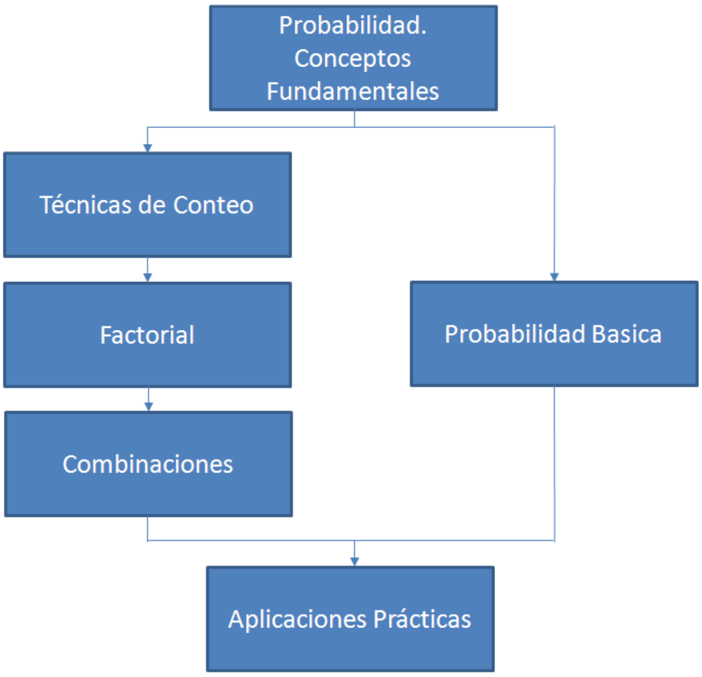
CÁLCULO DE PROBABILIDADES

OBJETIVO

El estudiante analizará los conceptos y técnicas de la teoría básica de la probabilidad, enfocándolos al manejo de la información aplicable al campo de la arquitectura.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad el alumno determinará espacios muéstrales de fenómenos o experimentos aleatorios, enfocándose a las probabilidades de eventos determinados, aplicando los conceptos básicos de la probabilidad clásica. Para lo anterior, es necesario comprender las técnicas de contar, bases de la teoría de la probabilidad.

9.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

La expresión más simple de una ciencia, es aquella que establece las condiciones bajo las cuales un suceso se presenta. El caso es establecer para el resultado un valor de verdad falso verdadero, frio caliente, alto bajo, encendido apagado o tal vez el hecho de que el suceso ocurrirá o no ocurrirá, pero en cualquiera de estos casos con certeza. Si por el contario, un suceso que bajo un sistema de condiciones “a veces” sí ocurre y “a veces” no ocurre, es un sistema aleatorio y constituye el motivo de estudio del presente capitulo.

Por ejemplo, en el lanzamiento de una moneda la probabilidad de águila debe ser igual que la de sol y, por tanto, ambas iguales a ½ (tiene sólo dos caras). De la misma manera, la probabilidad de cada uno de los seis sucesos elementales asociados al lanzamiento de un dado debe ser 1/6 (tiene 6 lados posibles). En las matemáticas antiguas se recoge esta idea y se formula la regla clásica del cociente entre casos favorables y casos posibles, supuestos éstos igualmente posibles. Este es el concepto fundamental de la probabilidad y de hecho constituye la definición clásica o denominada a priori de la probabilidad.

En general, para el cálculo de probabilidad en un experimento es necesario conocer técnicas de conteo, motivo de estudio de la siguiente sección.

9.2 TÉCNICAS DE CONTEO

Dado un experimento, si el número de posibles sucesos es pequeño, es relativamente fácil listar y contar todos los posibles resultados. Por ejemplo, al tirar un dado, hay sólo seis posibles resultados. Sin embargo, si no fuera el caso y existiera un gran número de eventos a cuantificar, sería oneroso listar y contar todas las posibilidades. Para este problema nos apoyaremos en la técnica de factorial, las permutaciones y las combinaciones.

9.2.1 Factorial

Consideremos *n* un número del conjunto de los naturales. El símbolo *n!* se lee “*n factorial*” y corresponde al producto consecutivo de los *n* primeros números naturales:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n,$$

Además se define 0! = 1. Por ejemplo, 3! = 1· 2 ·3 = 6, 5! = 1· 2 ·3 · 4 · 5 = 120. Es conveniente acercar ahora la notación de producto de *n* números en forma resumida y redefinir el n! con la siguiente nomenclatura:

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Además como 0! = 1, aplicando el concepto de la recursividad (especificar un proceso basado en su propia definición) tenemos las siguiente representación de n!.

$$n! = \begin{cases} \text{si } n = 0 & \Rightarrow 1 \\ \text{si } n \geqslant 1 & \Rightarrow (n-1)! \cdot n \end{cases}$$

9.2.2 Permutaciones

Consideremos el conjunto formado por los elementos $\{\mathrm{a, b, c}\}$. La pregunta que nos hacemos ahora es: ¿de cuantas maneras distintas puede ser ordenado este conjunto? Hagámoslo: “"a, b, c", "a, c, b", "b, a, c", "b, c, a", "c, a, b", "c, b, a", vemos que son 6 las ordenaciones posibles de estos elementos, sin repetirlas. Bien, a cada una de estas ordenaciones le llamamos una Permutación.

En general, sean *n* y r números naturales tales que *r* ≤ *n,* una ordenación de un numero *r* de dichos objetos se llama una Permutación *r* o más explícitamente, una Permutación de los *n* objetos tomados de *r* a la vez y se denota por P(*n, r*) y se calcula por la formula:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Ejemplo. En el ejercicio desarrollado antes: P(*n, r*) = $\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!}$ = 3! = 6 que es el número de ordenaciones que obtuvimos. Notamos aquí que para *n* = *r*, P(*n, r*) = $\frac{n!}{(n-r)!}$ = *n!*.

Ejemplo. En el conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$ calcular el número de permutaciones tomando 3 a la vez. Aplicando de manera directa la fórmula para *n*=6 y *r* =3, tenemos:

$$P(n, r) = P(6, 3) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{720}{6} = 120.$$

9.2.3 Combinaciones

De manera directa y en el contexto que estamos trabajando, una Combinación *r* es una selección de *n* objetos en donde el orden no se considera. Así, a partir de la fórmula de las permutaciones, una combinación denotada por c(*n, r*) o $\binom{n}{r}$ se calcula por:

$$c(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!}$$

Ejemplo. Dado el conjunto $\{a, b, c, d\}$. ¿Cuál es el número de grupos distintos o combinaciones de tres elementos que pueden ser elegidos sin importar el orden? Apliquemos de manera directa la fórmula para *n*=4 y *r* = 3: c(*n, r*) = $\frac{P(n,r)}{r!} = \frac{(4!\,/(4-3)!)}{3!} = \frac{24}{6}$ = 4.

Con estos elementos, retomemos el asunto del cálculo de probabilidades.

9.3 DETERMINACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE UN EVENTO

La teoría básica de la probabilidad trata con fenómenos que pueden ser modelados por experimentos cuyos resultados están gobernados por el azar, esto es por la casualidad, sin rumbo ni orden determinado. A este tipo de experimentos les llamaremos Aleatorios y aunque son totalmente casuísticos están caracterizados por ciertas reglas básicas:

i. Contienen eventos o sucesos, que son los posibles resultados del experimento.
ii. Son repetibles bajo idénticas condiciones.
iii. El resultado de un experimento es impredecible.
iv. Si el experimento se realiza un gran número de veces, el resultado muestra una cierta regularidad en su comportamiento.

Dado un experimento, el resultado de un suceso puede ser asertivo o erróneo. Denotemos por *h* los eventos asertivos (a favor) y por *f* los erróneos (en contra), entones es claro que el universo total de eventos es *h*+ *f*, sean estos *n*. Con esta notación, definimos la probabilidad *p* de de que un suceso asertivo ocurra como el cociente de los eventos asertivos *h* entre el total de eventos *n*: $p = \frac{h}{h+f} = \frac{h}{n}$ y la probabilidad de que un suceso erróneo ocurra como el cociente *q* de los sucesos erróneos *f* entre el total de eventos *n*: $q = \frac{f}{h+f} = \frac{f}{n}$. Notemos que:

$$p + q = \frac{h}{h+f} + \frac{f}{h+f} = 1$$

Entonces:

$$p = 1 - q \text{ o } q = 1 - p$$

Por lo que las posibilidades a favor de la ocurrencia de un evento son $\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{f}}$ y las posibilidades en contra son $\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{h}}$.

Ejemplo. Calcular la probabilidad de que al lanzar al aire una moneda caiga águila y que caiga sol.

Solución. Tenemos dos sucesos elementales que son el que caiga águila y el que caiga sol, ambos son igualmente probables. Entonces la probabilidad de que caiga águila o sol es:

$$p\ (\text{águila}) = \frac{numero\ de\ sucesos\ elementales\ favorables\ aguila}{nnumero\ de\ sucesos\ elementales\ posibles} = \frac{1}{2}.$$

$$p\ (sol) = \frac{numero\ de\ sucesos\ elementales\ favorables\ sol}{nnumero\ de\ sucesos\ elementales\ posibles} = \frac{1}{2}.$$

Ahora, es necesario precisar algunas definiciones y conceptos de la Teoría de las Probabilidades.

Eventos mutuamente excluyentes. Dos o más eventos son Mutuamente Excluyentes si la realización de uno de ellos implica la no realización de los otros. La probabilidad de que se produzca uno entre dos o más sucesos mutuamente excluyentes es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

Eventos Independientes. Dos o más eventos son independientes cuando la ocurrencia o no de uno no afecta la probabilidad en la ocurrencia del otro o de los otros.

Eventos Dependientes. Dos o más eventos son Dependientes cuando la ocurrencia o no de uno afecta la probabilidad en la ocurrencia del otro o de los otros. Si P_1, P_2, P_3, P_4, …, P_n son las probabilidades de una serie de eventos dependientes, entonces la probabilidad de que se produzcan estos sucesos en el orden 1, 2, 3, … , n es: $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot \ldots \cdot P_n$.

Ejemplo. En un contenedor se tienen 10 objetos de colores blanco y negro. 6 son blancos y 4 son negros. Se toman al azar sin reemplazo, es decir; una vez que sacamos un objeto, éste ya no regresa a la caja. Se inicia el experimento sacando un objeto negro. ¿Cuál es la probabilidad de que en un segundo evento se extraiga un objeto negro?

Solución. La probabilidad de que en el primer evento se extraiga un objeto negro es 4 de 10: $\frac{4}{6+4} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. En el segundo evento sólo quedan 3 negros de 9 objetos, la probabilidad de que se obtenga un negro es 3 de 9: $\frac{3}{6+3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Por lo tanto la probabilidad de que en un segundo evento se extraiga un objeto negro es el producto de las probabilidades anteriores: $(\frac{2}{5}) \cdot (\frac{1}{3}) = \frac{2}{15}$.

9.4 Aplicaciones prácticas

Un par de aplicaciones actuales de la teoría de la probabilidad son el análisis de riesgo y en el comercio de los mercados de materias primas, pero en general las herramientas básicas de probabilidades son base para la toma de decisiones en toda actividad bajo condiciones de incertidumbre, por lo que las aplicaciones prácticas de la probabilidad a la arquitectura como profesión son enriquecedoras.

La Probabilidad es útil para comprobar la “fiabilidad” en los procesos y para predecir el tipo y la cantidad de insumos necesarios en un determinado estudio. Además, es empleada para entender la variabilidad de los sistemas de medición, control de procesos y compilación de datos, en un entorno de incertidumbre.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Un suceso determinista es un experimento que da lugar a un resultado cierto o verdadero, es decir, cuando partiendo de unas mismas condiciones iniciales tenemos la certeza de lo que va a suceder. Cuando un experimento no es determinista estamos ante un experimento aleatorio. La actividad consisten en realizar una lista de por lo menos 5 experimentos determinísticos y 5 no determinísticos.
2. En un entorno incluso básico de la matemática, se presentan tres (vertientes o formas) de la definición de probabilidad. En la sección 9.3 hemos hecho un desarrollo denominado "*Probabilidad a Priori*". Investigue y exponga ante grupo "*La Definición Empírica de la Probabilidad, Ley de los Grandes Números*" y "*La Definición Axiomática de la Probabilidad*" que son las otras dos formas, desde luego comparándola con la expuesta en esta unidad "*Probabilidad a Priori*".
3. Esperanza Matemática. Sea *p* la probabilidad de que una persona reciba un dinero *m*. La Esperanza Matemática o sencillamente la esperanza es el producto *p· m*. Se pide al alumno: Realizar y presentar al grupo una investigación sobre el concepto de juegos de azar respecto a la esperanza matemática, en particular que pasa en los juegos de la lotería. Por que se dice que "*las loterías son un impuesto del gobierno al desconocimiento de las matemáticas".*
4. Con la teoría desarrollada en el Capitulo 3 de Algebra sobre binomios y los conceptos que ahora conocemos de cálculo de combinaciones estamos en condiciones de conocer el Teorema del Binomio (que proporciona el desarrollo de la potencia de una suma o resta) en su expresión general:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}y^k = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots +$$

$$+ \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n.$$

Demuestre usando la formula de la combinatoria c(*n, k*) $=\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ que también se puede representar como:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k}y^k.$$

Además desarrolle la sumatoria para los valores de n= 2, 3 y 4 obteniendo las expresiones vistas en el capítulo de Algebra.

$$\begin{cases} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \\ (x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\ (x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 \end{cases}$$

AUTOEVALUACION

1. Demostrar que el número de Combinaciones c(*n, r*) también puede expresarse con la fórmula: c(*n, r*) =$\binom{n}{r}$ = $\frac{n!}{r!(n-r)!}$.
2. Se tienen 20 comensales pero sólo 17 lugares libres. ¿De cuantas formas puede realizarse la asignación de lugares? **R**. $\frac{20\,!}{3\,!}$.
3. En una caja hay 2 objetos blancos y 3 objetos negros, ¿cuál es la probabilidad de sacar uno blanco y después uno negro? Bajo las siguientes condiciones:
    1. Si hay reposición (después de sacar el primer objeto, éste se devuelve a la caja). **R**. 6/25.
    2. Si no hay reposición (después de sacar el primer objeto, éste no se devuelve a la caja). **R**. 3/10.
4. Esperanza Matemática. Sea *p* la probabilidad de que una persona reciba un dinero *m*. La Esperanza Matemática o sencillamente la esperanza es el producto *p· m*. Se pide al alumno realizar los siguientes ejercicios siguientes.
    i. Calcular la esperanza matemática si la probabilidad es 0.2 y el costo es de 100 pesos. **R**. 20.
    ii. Si una persona compra un boleto de en una rifa, en la que puede ganar de 500 pesos o un segundo premio de 200 pesos con probabilidades de: 1/100 y 3/100. Calcular la esperanza matemática o en el contexto debe decirse "¿Cuál es el precio justo a pagar por el boleto?" Sugerencia debe sumar las EM. **R**. 11.

BIBLIOGRAFÍA

Carmona y Pardo, Mario de Jesús, *Matemáticas para Arquitectura*, México, Trillas, 2008.

Swokowski, Earl Wiliam, *Algebra y Trigonometría con Geometría Analítica*, México, Cengage Learning, 2009.

Aguilar Márquez, Arturo, *Calculo Diferencial e Integral*, México, Pearson, 2010.

Nieves Hurtado, Antonio, *Probabilidad y Estadística para Ingeniería*, México, McGraw Hill, 2010.

Kleiman, Ariel, *Matrices*, México, Editorial Limusa, 2010.

Jiménez Murillo, José Alfredo, *Matemáticas para la Computación*, México, Alfaomega, 2009.

Lehmann, Charles H, *Geometría Analítica*, México, Limusa Noriega Editores,

Santalo Sors, Marcelo, Carbonell Chaure, Vicente, *Cálculo Diferencial e Integral*, México, Grupo Editorial Éxodo, 2007.

Polya, George, *Cómo Plantear y Resolver Problemas*, México, Editorial Trillas, 2008.

Kasner, Edward, *Matemáticas e Imaginación, México,* Consejo Nacional para la Cultura y las Artes, 2007.

Aleksandrov, Kolmogorov, Laurentiev, *La matemática: su contenido, métodos y significado. Vol. 1, 2 y 3.*, España, Alianza Editorial, 2003.

Nota: La mayoría de los gráficos utilizados tuvieron como base o fuente el sitio web Wikipedia, de uso libre.

GLOSARIO

Una vuelta completa: Es aquella vuelta en sentido contrario a las manecillas del reloj que mide 360 unidades.

Concavidad: Cualidad de cóncavo

Cóncavo: Que se asemeja al interior de una circunferencia o una esfera.

Convexo: Que se asemeja al exterior de una circunferencia o de una esfera.

Convexidad: Cualidad de convexo

Cónicas: Ver secciones cónicas.

Denotar: Indicar, anunciar, significar.

Digito. Es un número o símbolo de nuestro sistema de numeracion.

Dupla: Par ordenado de valores.

Equidistantes. Que estan a la misma distancia.

Indeterminancion: Que no es concreto ni definido

Nomenclatura: Lista de nombres de personas o cosas.

Notacion: Sistema de signos convencionales que se adopta para expresar conceptos matemáticos.

Radio Vector: Segmento de línea recta que une un punto variable con el origen en un sistema de coordenadas.

Regla de la Cadena: es una fórmula para la composición de dos funciones.

Secciones Conicas: Las cónicas se refieren a la intersección de un plano determinado sobre un volumen denominado cono, de aquí el nombre genérico de cónicas.

Segmento: Fragmento de recta que está perfectamente comprendido entre dos puntos.

TIC: Tecnología de información y comunicaciones.