Matemáticas I

CARLOS MARCIAL RICO CARMONA

Red Tercer Milenio

MATEMÁTICAS I

CARLOS MARCIAL RICO CARMONA

RED TERCER MILENIO

AVISO LEGAL

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Datos para catalogación bibliográfica

Carlos Marcial Rico Carmona

Matemáticas I

ISBN 978-607-733-018-9

Primera edición: 2012

Revisión editorial: Eduardo Durán Valdivieso

DIRECTORIO

ÍNDICE

Unidad 7

Calculo Integral 120

Unidad 8

Determinantes y matrices 136

Unidad 9

INTRODUCCIÓN

En toda actividad, y particularmente en la arquitectura, las matemáticas son el instrumento indispensable para el razonamiento. En este libro se ofrece a los estudiantes las bases teórico y prácticas que constituyen el fundamento matemático que les dará el gusto por esta ciencia abstracta para su estudio y aplicación en la profesión.

En la enseñanza de las matemáticas se debe cumplir en forma satisfactoria con el objetivo de la formación, enseñando a los alumnos a razonar encontrando las respuestas a las preguntas "¿Quién?", "¿Qué?", "¿Dónde?", y "¿Cuándo?", a través de los datos con la información suficiente y aplicando el conocimiento adquirido.

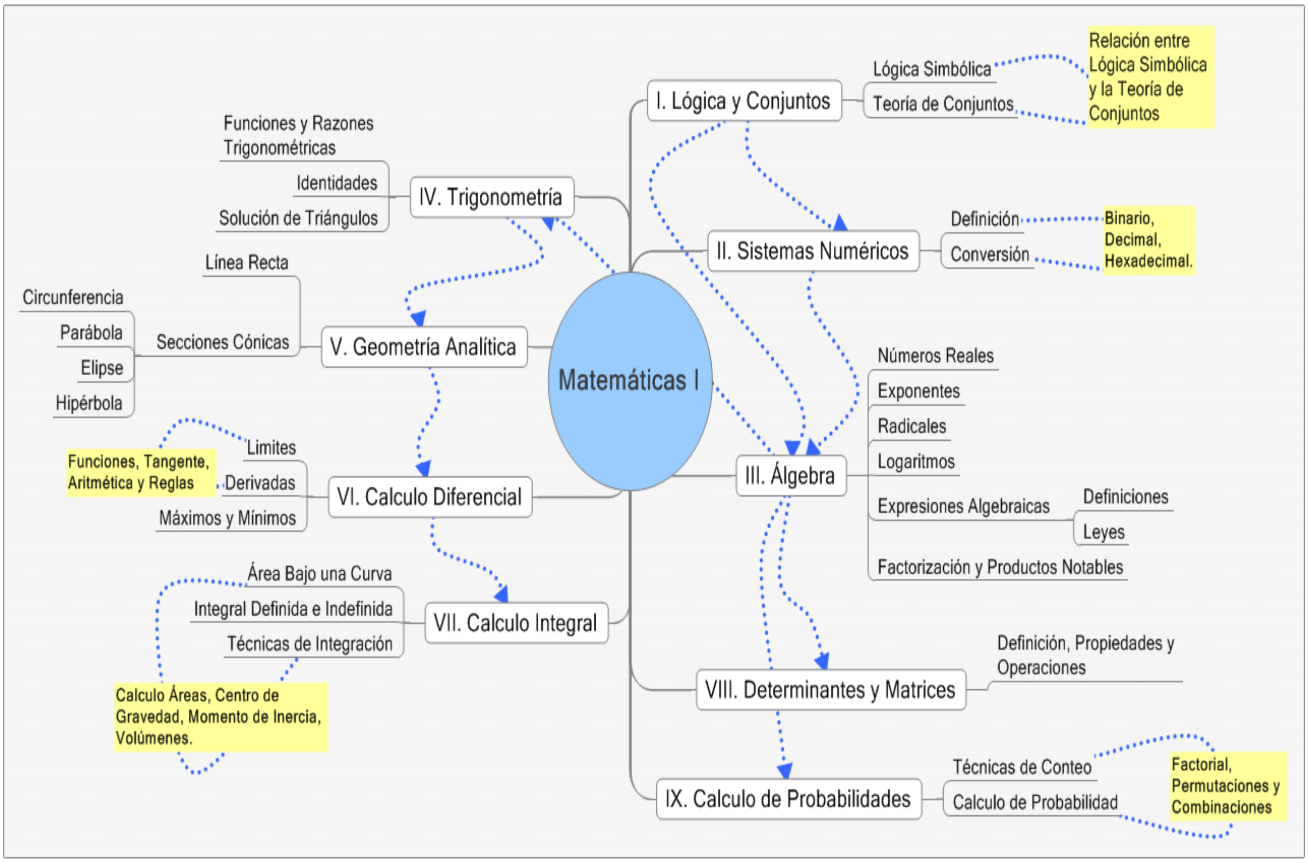
Partiendo de la base que aprender matemáticas por medio del razonamiento, es comprender, valorar y asimilar los conocimientos, éstos son tratados de una forma clara y sencilla que permite comprender los principios que la llamada *era de la información* nos exige en la actualidad y que como tales son de uso común en la academia y en la industria.

El contenido del presente libro proporciona las bases matemáticas necesarias para el buen desarrollo académico y profesional. Se empieza con la lógica simbólica y la teoría de conjuntos, pasando a los sistemas numéricos de gran aplicación en nuestra cibernética.

Se continúa con el álgebra también denominada la "reina de las matemáticas" dado que en particular con sus expresiones algebraicas son el fundamento y leyes que regirán el resto de la matemática. Viene la trigonometría seguida de la geometría analítica de gran aplicación en la arquitectura. Llegamos al cálculo, diferencia e integral, que teniendo de base todos los capítulos previos permiten el análisis y soluciones de diversos problemas de cubicación y diseño.

Terminamos con los capítulos de matrices y determinantes, así como de cálculo de probabilidades que serán base para la seriación de la materia, además de proporcionar herramientas para la solución de problemas especifico del curso.

MAPA CONCEPTUAL



UNIDAD 1

LÓGICA Y CONJUNTOS

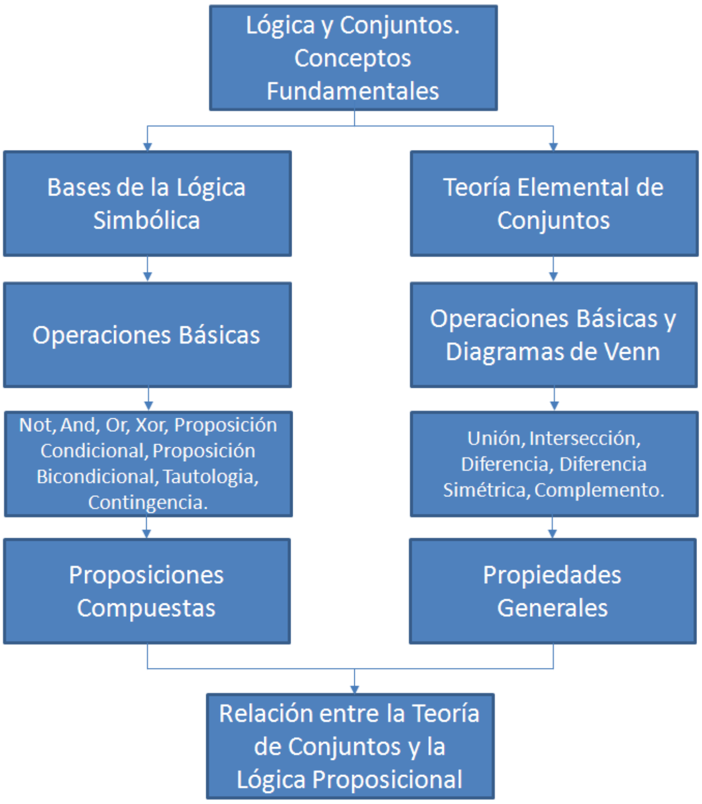
OBJETIVO

El estudiante identificará las bases de la teoría de conjuntos y la lógica para una mejor comprensión en lo general de las matemáticas y en particular de los capítulos subsecuentes, así como la simbiosis entre ambas teorías y el cómo han revolucionado los fundamentos del pensamiento y del análisis.

TEMARIO

1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES
1.2 LÓGICA SIMBÓLICA
1.2.1 Proposiciones compuestas y operadores básicos
1.2.2 Negación u operador not
1.2.3 Conjunción u operador and
1.2.4 Disyunción u operador or
1.2.5 Disyunción exclusiva u operador or exclusivo (xor)
1.2.6 Proposición condicional
1.2.7 Proposición bicondicional
1.2.8 Tautología, Contradicción y Contingencia
1.3 TEORÍA ELEMENTAL DE CONJUNTOS
1.4 DIAGRAMAS DE VENN Y OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS
1.4.1 Unión
1.4.2 Intersección
1.4.3 Diferencia y diferencia simétrica
1.4.4 Complemento
1.4.5 Propiedades generales
1.5 RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA DE CONJUNTOS Y LA LÓGICA PROPOSICIONAL
1.6 APLICACIONES PRÁCTICAS

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudian los fundamentos de la lógica y los conjuntos como base fundamental para clasificar y formalizar los métodos del razonamiento, motivo del curso en las siguientes unidades, es decir, se da un enfoque de razonamiento a la naturaleza de las matemáticas.

1.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

La lógica simbólica y la teoría de conjuntos han revolucionado los fundamentos del pensamiento. Nos ocupamos en esta sección de conocer los conceptos básicos de estas teorías para un buen entender de las matemáticas.

En el lenguaje cotidiano para comunicarnos se usan expresiones verbales o escritas como las siguientes:

i. “La materia de matemáticas forma parte del plan de estudios de arquitectura.”
ii. “¿Qué hora es?”
iii. “Son las 11:30 de la mañana.”
iv. “Las matemáticas son fáciles.”
v. “Aprobaré el curso de matemáticas I.”
vi. “1+2+3+4+5 = 16.”

A cada uno de estos enunciados, frases o expresiones le llamaremos una proposición, y por lo que vemos una proposición es una oración. Además, observemos que cada una de estas proposiciones puede adquirir un valor de verdad de falso o verdadero dependiendo del momento, pero nunca los dos valores de verdad al mismo tiempo. Pasemos a definir y realizar operaciones con las proposiciones.

1.2 LÓGICA SIMBÓLICA

Una proposición es cualquier enunciado u oración a la que se le puede asignar un valor lógico: 1 Verdad y 0 Falsedad. En los ejemplos anteriores, todas las oraciones adquieren un valor de verdad falso o verdadero por lo tanto son proposiciones lógicas a excepción de la ii que no asume un valor lógico.

1.2.1 Proposiciones compuestas y operadores básicos

Una proposición compuesta es la interacción entre dos o más proposiciones simples formada a través de conectores u operadores lógicos. Los conectores lógicos básicos son: operador and (y), operador or (o), operador not (no) y el operador or exclusivo (xor). Tomemos dos proposiciones cualesquiera denotas por ***p*** y ***q***, las proposiciones compuestas anteriores se definen en los siguientes párrafos.

1.2.2 Negación u operador not

Dada una proposición ***p***, se define la negación de ***p*** como la proposición ***p'*** (que se lee no ***p***) con el valor lógico contrario a ***p***, es decir; ***p'*** que es verdadera cuando ***p*** es falsa y ***p'*** es falsa cuando ***p*** es verdadera. Lo anterior descrito en la notación de tablas de verdad queda como sigue:

p	***p'***
1	0
0	1

1.2.3 Conjunción u operador and

Denotada por símbolo ∧, es el conector que determinara un valor de verdad verdadero entre las proposiciones ***p*** y ***q*** (que se lee ***p*** y ***q***) sólo cuando ambas proposiciones sean verdaderas, en cualquier otro caso su valor de verdad es falso. Su tabla de verdad es:

p	***q***	***p*** ∧ ***q***
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

1.2.4 Disyunción u operador or

Denotado por el símbolo ∨, es el conector que determina un valor de verdad verdadero entre las proposiciones ***p*** y ***q*** (que se lee ***p*** o ***q***) cuando al menos una de las proposiciones simples ***p***, ***q*** son verdaderas, en cualquier otro caso su valor de verdad es falso. Su tabla de verdad es:

p	***q***	***p*** ∨ ***q***
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

1.2.5 Disyunción exclusiva u operador or exclusivo (xor)

Denotada por el símbolo $\oplus$, es el conector que determina un valor verdadero cuando ***p*** y ***q*** son contrarias y si ***p*** y ***q*** son iguales el resultado de la operación xor es falso. La operación xor se lee justamente así: xor y su tabla de verdad está dada por:

p	***q***	$\boldsymbol{p \oplus q}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Adicional es conveniente definir la proposición condicional y la proposición bicondicional, además de Tautología, Contradicción y Contingencia.

1.2.6 Proposición condicional

Denotada por el símbolo $\Rightarrow$ es aquella que está formada por dos proposiciones simples o compuestas ***p*** y ***q*** en este orden: $\boldsymbol{p \Rightarrow q}$ (que se lee si ***p*** entonces ***q***) y por definición es falsa cuando ***q*** es falsa y ***p*** es verdadera. En cualquier otro caso la condicional es verdadera. Así, la tabla de verdad está dada por:

p	***q***	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

1.2.7 Proposición bicondicional

Denotada por el símbolo $\Leftrightarrow$ es aquella que está formada por dos proposiciones simples o compuestas ***p*** y ***q***: $\boldsymbol{p \Leftrightarrow q}$ (que se lee ***p*** si y sólo si ***q***) y por definición es verdadera cuando ***p*** y ***q*** tienen el mismo valor de verdad (ambas son verdaderas o ambas son falsa) y en cualquier otro caso la proposición bicondicional es falsa. La tabla de verdad está dada por:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1.2.8 Tautología, Contradicción y Contingencia

Una proposición se dice una *tautología* si su valor de verdad resulta siempre verdadero. Se llama *contradicción* si su valor de verdad es siempre falso. Una *contingencia* o *paradoja* es una proposición a la que no se le puede asignar ningún valor de verdad.

1.3 TEORÍA ELEMENTAL DE CONJUNTOS

Sin mayor preámbulo y de manera natural, un conjunto es cualquier colección de objetos perfectamente definidos. A los objetos de este conjunto se les llama elementos del conjunto. Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas y los elementos del conjunto se denotan por letras minúsculas, números o combinación de ambos.

Los elementos de un conjunto se colocan entre llaves { } separados por comas. Se puede definir un conjunto por extensión que es enumerando o listando toda la colección de objetos, y por comprensión describiendo la propiedad que caracteriza al conjunto. En este último caso se utiliza, además, la notación abstracta: $\boldsymbol{A = \{ x \mid P(x) \}}$ que se lee como "A es el conjunto de los elementos x tales que cumplen la condición P(x)". El símbolo "|" se lee "tal que".

Por último, para indicar la pertenencia de un elemento $\boldsymbol{x}$ en un conjunto $\boldsymbol{X}$ se hace uso del símbolo $\boldsymbol{\in}$ y la no pertenencia hace uso del símbolo $\boldsymbol{\notin}$. Bajo estos términos, ejemplos de conjuntos son los siguientes:

1) La colección de materias de la carrera de arquitectura del primer semestre.
2) Las letras de la palabra manzana = {m, a, n, z, a, n, a } = {m, a, n, z, n }.
3) $\boldsymbol{A}$ = {1, 2, 3, a, b, c }.
4) $\boldsymbol{N}$ = el conjunto de los números naturales = {1, 2, 3, 4, 5, … }.
5) $\boldsymbol{Z}$ = el conjunto de los números enteros = { … -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …}.
6) $\boldsymbol{Q}$ = el conjunto de los números racionales = $\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \boldsymbol{Z},\ b \neq 0 \}$.
7) $\boldsymbol{R}$ = el conjunto de los números reales.

8) $\boldsymbol{U}$ = el conjunto universal.

9) $\boldsymbol{\phi}$ = el conjunto vacio.

10) La colección de los números naturales e impares = {2, 4, 6, 8, 10, 12, … } = $\{\ x \mid x \in \boldsymbol{N};\ \ x\ es\ par\ \}$

Observemos las propiedades y operaciones entre los conjuntos. Tomemos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ un par de conjuntos cualesquiera. Se dice que $\boldsymbol{A}$ está contenido en $\boldsymbol{B}$ o que $\boldsymbol{A}$ es un subconjunto de $\boldsymbol{B}$ o que $\boldsymbol{A}$ es una parte de $\boldsymbol{B}$, y se denota $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$, si todo elemento de $\boldsymbol{A}$ lo es también de $\boldsymbol{B}$. Dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son iguales, denotado $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ si tienen los mismos elementos, es decir; se cumple simultáneamente que $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A}$.

Todo conjunto $\boldsymbol{A}$ es subconjunto de sí mismo: $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}$.

El conjunto vacio $\boldsymbol{\phi}$ es subconjunto de todos los conjuntos: $\boldsymbol{\phi} \subseteq \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\phi} \subseteq \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\phi} \subseteq \boldsymbol{\phi}$.

Todos los conjuntos son subconjuntos del conjunto universo: $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\phi} \subseteq \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{U}$.

Si $\boldsymbol{A}$ es un conjunto, entonces el conjunto de todos los subconjuntos de $\boldsymbol{A}$ se llama conjunto potencia de $\boldsymbol{A}$ y se denota por $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{A})$.

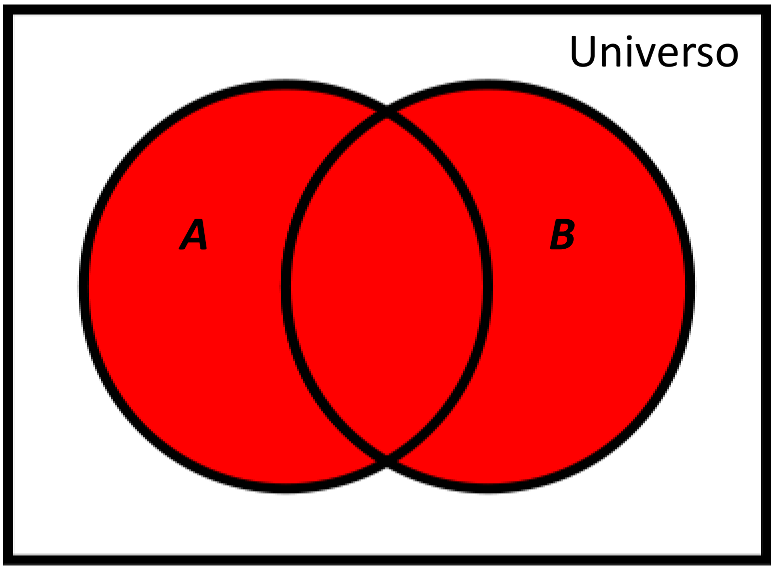
1.4 DIAGRAMAS DE VENN Y OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Los diagramas de Venn son la representación gráfica para mostrar la relación tanto entre los elementos como de los propios conjuntos. Cada conjunto se representa por medio de un círculo inscrito en un rectángulo que representa su conjunto universal. Así, todas las operaciones entre conjuntos se pueden representar gráficamente con el fin de obtener una idea más intuitiva. Procedamos a ver las operaciones entre conjuntos.

1.4.1 Unión

Consideremos a los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. La unión de los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ denotado $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos que contiene a todos los elementos de $\boldsymbol{A}$ y a todos los elementos de $\boldsymbol{B}$. La notación descriptiva del conjunto y su representación gráfica son:

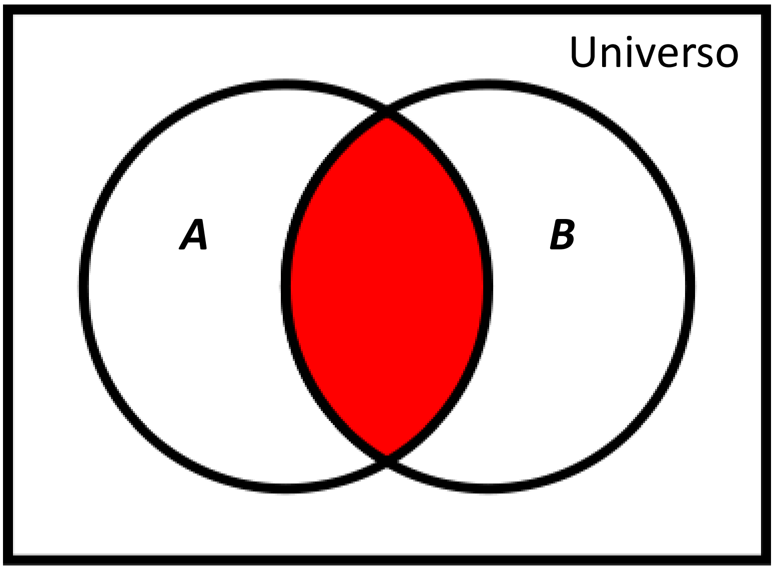
$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{\ x \mid x \in \boldsymbol{A}\ o\ x \in \boldsymbol{B}\ \}$$



1.4.2 Intersección

Consideremos a los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. La intersección de los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ denotado $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos comunes que contienen tanto $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{B}$. La notación descriptiva del conjunto y su representación gráfica son:

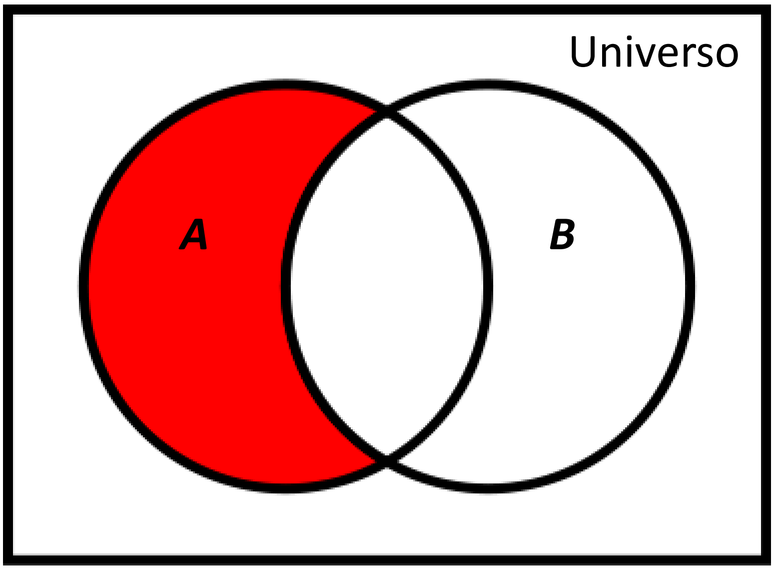
$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{ x \mid x \in \boldsymbol{A} \, ; \, x \in \boldsymbol{B} \}$$



1.4.3 Diferencia y diferencia simétrica

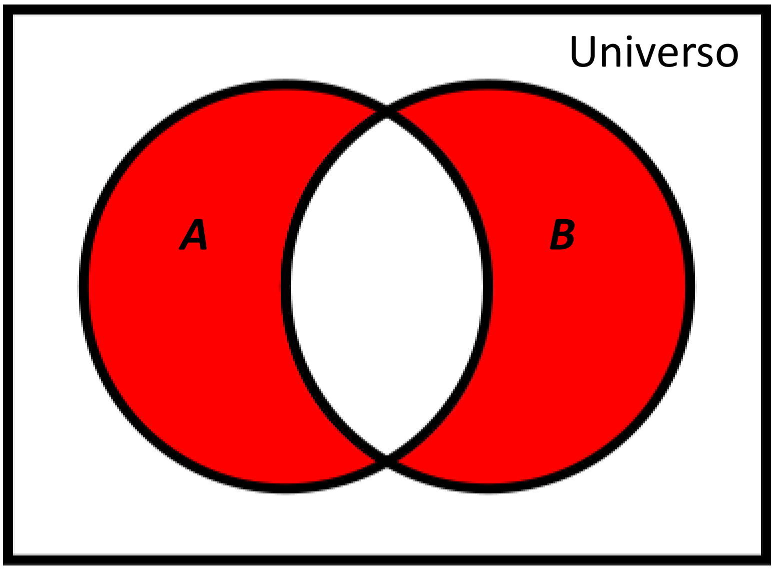
Consideremos a los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$. La diferencia entre los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ denotado $\boldsymbol{A}$ - $\boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos de $\boldsymbol{A}$ pero que no se encuentran en $\boldsymbol{B}$:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \, ; \, x \notin B \}$$



La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B denotado $A \oplus B$ es el conjunto de los elementos de A pero que no se encuentran en B:

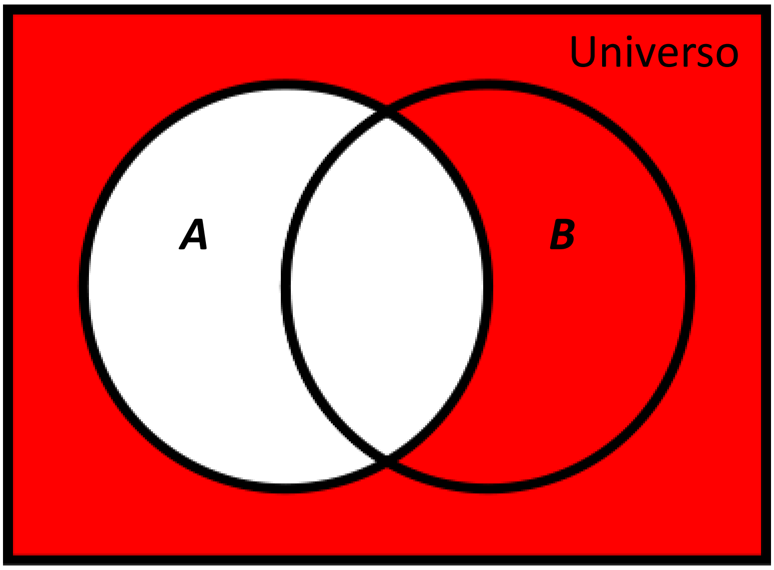
$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$



1.4.4 Complemento

El complemento de un conjunto A se denota por A', es el conjunto que contiene el conjunto universo y no contiene ningún elemento de A:

$$A' = \{ x \mid x \in U ;\ x \notin A \}$$



1.4.5 Propiedades generales

A las operaciones anteriores de unión e intersección de conjuntos se les denomina genéricamente operaciones booleanas. Estas operaciones verifican las siguientes propiedades:

Propiedad	**Unión**	**Intersección**
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Complementariedad	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \phi$
Elemento Nulo	$A \cup \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$
Elemento Universal	$A \cup U = U$	$A \cap U = A$
Leyes de Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
…	…	…

Adicional y a título de ejemplo, se desarrolla el siguiente concepto llamado conjunto producto. Consideremos A y B dos conjuntos cualesquiera, el conjunto producto de A y B

denotado como $\boldsymbol{A}$ x $\boldsymbol{B}$ es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas (a, b) tales que a ∈ $\boldsymbol{A}$ y b ∈ $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \text{ x } \boldsymbol{B} = \{(a, b) \mid a \in \boldsymbol{A}; b \in \boldsymbol{B}\}.$$

Por ejemplo si $\boldsymbol{H} = \{Jaime, Adolfo, Carlos\}$ y $\boldsymbol{M} = \{Alicia, \ Jessica, \ Andrea\}$ el producto cruz de $\boldsymbol{H}$ x $\boldsymbol{M}$ está formado por las duplas:

$$\{(Jaime, Alicia), (Jaime, Jessica), (Jaime, Andrea), (Adolfo, Alicia), (Adolfo, Jessica), (Adolfo, Andrea), (Carlos, Alicia), (Carlos, Jessica), (Carlos, Andrea)\}$$

1.5 Relación entre la Teoría de Conjuntos y la Lógica Proposicional

Para terminar la presente unidad se presenta una relación base entre la lógica simbólica y la teoría de conjuntos. Consideremos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ y las literales $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r}$ sus propiedades características, es decir; la proposición lógica que describe a los elementos de cada conjunto respectivamente. La siguiente tabla describe a título de ejemplo la correspondencia entre ambos los conceptos de la teoría de conjuntos y la lógica proposicional:

Conjuntos	**Proposiciones**
$A \subseteq B$	$p \Rightarrow q$
$A = B$	$p \Leftrightarrow q$
$A \cup B$	$p \vee q$
$A \cap B$	$p \wedge q$
A'	p'
$A - B$	$p \wedge q'$
$A \Delta B$	$p \oplus q$
$A \cup (A \cap B) = A$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow p$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$(A \cup B)' = A' \cap B$	$(p \vee q)' \Leftrightarrow p' \wedge q'$
…	…

La correspondencia para el conjunto vacio y el conjunto universal se corresponde con una contradicción y con una tautología respectivamente. Concluimos que mediante este tipo de correspondencias la teoría de conjuntos se puede escribir en términos de lógica proposicional y viceversa.

1.6 APLICACIONES PRÁCTICAS

Las aplicaciones prácticas de la teoría de conjuntos y la lógica proposicional son tantas y tan variadas como se pueda imaginar, baste con mencionar a título de ejemplo que se utiliza en el diseño de redes telefónicas, redes eléctricas, circuitos en electrónica digital, redes de carreteras, redes de distribución de agua (fluidos en general), en cuestiones relacionadas con la probabilidad, es la base de la teoría de grafos y en general los conceptos de la teoría de conjuntos y la lógica proposicional están de manera implícita en la terminología utilizada en diseño de bases de datos, cuando se realizan las consultas y en general en toda aplicación de la computación. En fin, no se imaginarían los avances actuales en tecnología de información y comunicaciones (TIC) sin las bases teóricas de estas ramas de la matemática.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Observar que los tres primeros ejercicios están relacionados, en particular debe hacer los tres al mismo tiempo para cada proposición que se construya.

1. En grupo construya una serie de proposiciones u oraciones determinando su valor de verdad. Incluir casos donde no se trate de una proposición.
2. Exprese las proposiciones anteriores (cuando esto sea posible) en notación de conjuntos por extensión y por comprensión.
3. Exprese las proposiciones anteriores (cuando esto sea posible) en leguaje grafico de conjuntos.
4. De ser posible analíticamente verifique las siguientes identidades. En su caso es suficiente con visualizar gráficamente.

Propiedad	**Unión**	**Intersección**
Elemento Nulo	$A \cup \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$
Elemento Universal	$A \cup U = U$	$A \cap U = A$
Leyes de Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. Investigar el Método de inducción matemática. Recordemos que una proposición es cualquier enunciado u oración a la que se le puede asignar un valor lógico: 1 Verdad y

0 Falsedad pero no ambas a la vez. La inducción matemática se utiliza cuando se desea probar si una proposición escrita como una expresión matemática es falsa o verdadera. En términos simples, la inducción matemática consiste en el siguiente razonamiento: *1)* Paso Básico: el número entero *1* tiene la propiedad *P*. *2)* Paso Inductivo: el hecho de que cualquier número entero *n* tenga la propiedad *P* implica que *n + 1* también la tiene. *3)* Conclusión: todos los números enteros a partir de i tienen la propiedad *P*. La actividad en este ejercicio constituye una investigación sobre este tema de la Inducción Matemática y demostrar por este método que la suma de los *n* primeros números naturales está dada por la formula: $n(n+1)/2$, es decir:

$$1+2+3+4+5+\cdots+n=n(n+1)/2$$

AUTOEVALUACION

1. Formar la negación de la proposiciones:
   i. "Carlos es Arquitecto". **R**. "Carlos no es Arquitecto".
   ii. "2 es un numero par". **R**. "2 es un número impar".
   iii. "Todos los profesores son malos". **R**. Algunos profesores no son malos".
2. Como veremos en el capítulo de Geometría Analítica, en un sistema de coordenadas cartesianas x-y, la circunferencia con centro en el punto (0, 0) –origen- y radio 1 consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación: $x^2 + y^2 = 1$. Describa la circunferencia en términos de conjuntos. **R**. $\{(x, y) \in \boldsymbol{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
3. [1]Considere los conjuntos como sigue:

   N = Naturales = Conjunto Universo.

   $\boldsymbol{A} = \{ x \mid x \in \boldsymbol{N} ;\ x\ es\ primo; 5 < x < 30 \}$

   $\boldsymbol{B} = \{ 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 21, 23 \}$

   $\boldsymbol{C} = \{ 6, 7, 8, 9, 15, 17, 20, 21, 22, 23, 25 \}$

   $\boldsymbol{D} = \{ x \mid x \in \boldsymbol{N} ;\ x\ es\ impar; 10 < x < 20 \}$

Calcular:

i. $[\boldsymbol{B} \oplus (\boldsymbol{C}' \cap \boldsymbol{A})] - \boldsymbol{D}'$ **R**. $\{ 15, 17, 19 \}$

ii. $[(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{D}'] \cup (\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}')$ **R**. $\{ x \mid x \in \boldsymbol{N} ;\ x \notin \{ 7, 9, 12, 15, 16, 19, 21, 29 \} \}$

iii. $[(\boldsymbol{C}' \cup \boldsymbol{B}) \oplus \boldsymbol{D}] - \boldsymbol{A}'$ **R**. $\{ 23, 29 \}$

iv. $[\boldsymbol{B}' \oplus (\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{C}')] - \boldsymbol{D}$ **R**. $\{ 6, 7, 8, 12, 16, 20, 22, 25, 29 \}$

v. $[(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{D}') - (\boldsymbol{C}' \oplus \boldsymbol{A}')] - \boldsymbol{B}$ **R**. $\{ 7 \}$

[1] Jiménez Murillo, J. A. *Matemáticas para la computación*, p. 109.

UNIDAD 2

SISTEMAS NUMERICOS

OBJETIVO

El estudiante identificará y representará cantidades en cualquier sistema numérico, de manera particular los sistemas decimal, binario y hexadecimal. Asimismo, el estudiante realizará la conversión de un número en un sistema a otro diferente.

TEMARIO

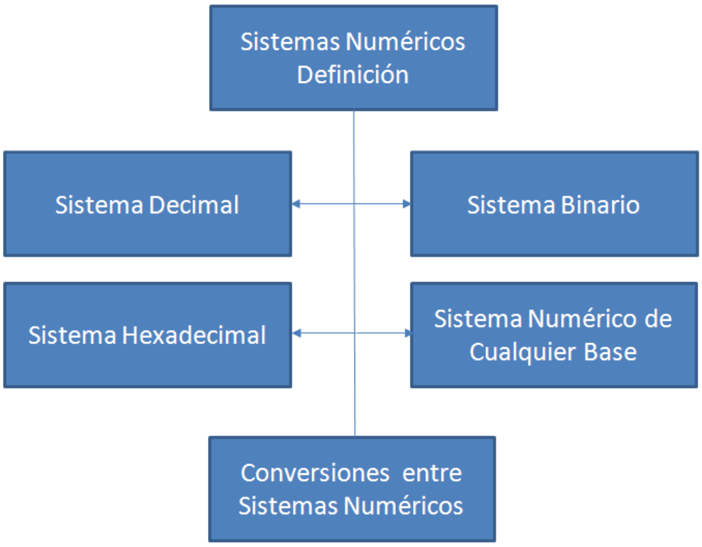
2.1 DEFINICIÓN

- *2.1.1 SISTEMA DECIMAL*
- *2.1.2 SISTEMA BINARIO*
- *2.1.3 SISTEMA HEXADECIMAL*

2.2 CONVERSIONES ENTRE DISTINTOS SISTEMAS

2.3 APLICACIONES PRÁCTICAS

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se hace un análisis de los sistemas numéricos y la representación de los mismos como base fundamental de toda actividad humana.

2.1 DEFINICIÓN

A medida que la actividad humana ha evolucionado, fue necesario usar cualquier referencia que funcionara como unidad para que, a partir de ella, y haciendo posteriores agrupaciones, se crearan los primeros sistemas numéricos. Así, un Sistema Numérico es un conjunto de símbolos y reglas que permiten construir todos los símbolos válidos en el sistema.

2.1.1 Sistema decimal

Para denotar un sistema numérico es necesario definir ciertos conceptos primarios como lo es la base, el conjunto de símbolos, las operaciones que se pueden hacer entre ellos, la posición del símbolo, la notación del símbolo, entre otros. Para lograr esto, centremos nuestra atención en el sistema denominado *sistema decimal*, o *base 10* que es el de uso común en toda nuestra actividad. Los símbolos de este sistema de numeración lo forma el siguiente conjunto:

$$\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

Identifiquemos que son 10 símbolos (en este caso son números que conocemos perfectamente) que definen la base, esto es base 10. Con estas cifras se pueden expresa cantidades hasta de 9 dígitos (un digito es un número o símbolo de nuestro sistema). Para expresar cantidades más grandes a los números que se pueden generar con todas las combinaciones de estos 9 dígitos, se introduce el concepto de representación posicional en el sistema numérico. Lo anterior consiste en asignar un valor posicional específico de acuerdo con el lugar que ocupa el dígito dentro del número.

Con las definiciones anteriores, tomemos el número que representa la distancia de la tierra al sol: 149675000 kilómetros. Notemos que este número se puede representar con las operaciones de suma y producto que nos son familiares, como sigue:

$$(1 \times 100000000) + (4 \times 10000000) + (9 \times 1000000) + (6 \times 100000) +$$
$$(7 \times 10000) + (5 \times 1000) + (0 \times 100) + (0 \times 10) + (0 \times 1)$$

y en notación exponencial, tenemos que el mismo número se representa como:

$$(1 \times 10^8) + (4 \times 10^7) + (9 \times 10^6) + (6 \times 10^5) + (7 \times 10^4) +$$
$$(5 \times 10^3) + (0 \times 10^2) + (0 \times 10^1)+ (0 \times 10^0)$$

La expresión anterior nos lleva a inducir la representación de un número en un sistema posicional de manera genérica como sigue:

"La expresión general de un número *N* en un sistema de numeración posicional de base *b* es de la forma:

$$N = d_n d_{n-1} \ldots d_1 d_0 \,.\, d_{-1} d_{-2} \ldots d_{-k}$$

$$= d_n b^n + d_{n-1} b^{n-1} + \ldots + d_1 b^1 + d_0 b^0 + d_{-1} b^{-1} + \ldots + d_{-k} b^{-k}$$

$$= \sum_{i=-k}^{n} d_i\, b^i \tag{1.1}$$

donde $\boldsymbol{d_i}$ es uno de los símbolos definidos en el sistema de numeración, ***b*** es la base del sistema de numeración, ***n*** es el número de dígitos de la parte entera del número y ***k*** es el número de dígitos de su parte fraccionaria."[2]

El número decimal 123.45 se compone en su parte entera (123) del digito 1 en con su valor posicional 100, el digito 2 con su valor posicional 10 y el digito 3 con valor posicional 1.

El número en su parte fraccionaria (45) para el digito 4 tiene el valor posicional 0.1 y el digito 5 tiene el valor posicional 0.01, lo que nos lleva a escribir el número como:

$$123.45 = (1 \text{ x } 100) + (2 \text{ x } 10) + (3 \text{ x } 1) + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}$$

en notación exponencial tenemos:

$$123.45 = (1 \text{ x } 10^2) + (2 \text{ x } 10^1) + (3 \text{ x } 10^0) + (4 \text{ x } 10^{-1}) + (5 \text{ x } 10^{-2})$$

Continuando con los sistemas numéricos y dependiendo del valor de *b* se tienen diversos sistemas posicionales, de los más conocidos además del base 10 (***b*** = 10) tenemos: ***b*** = 2 Sistema Numérico Base 2, ***b*** = 16 Sistema Numérico Hexadecimal. Vemos con detalle estos últimos.

---

[2] Jiménez Murillo, J. A., *Matemáticas para la computación*", p. 4.

2.1.2 Sistema binario

Como se ha definido en la sección anterior respecto al número de elementos del conjunto para su uso dentro de un sistema numérico, si tomamos sólo dos de ellos por ejemplo el 0 y el 1:

$$\{0, 1\}$$

nuestro sistema numérico se denomina Binario o de Base 2. Un número cualquiera en este sistema numérico es cualquier combinación de los dígitos 0 y 1 (ceros y unos) como puede ser: 10100101.

Cuando se hace referencia a distintos sistemas numéricos se agrega la notación de subíndice para indicar en qué sistema numérico se encuentra la expresión o el número. Por ejemplo el número 12345 en base 10 se escribe $(12345)_{10}$. La expresión 101 en base 2 se escribe $(101)_2$.

2.1.3 sistema hexadecimal

Como su nombre lo indica el Sistema Hexadecimal ocupará 16 caracteres. Por costumbre el conjunto de símbolos para este sistema se forma tomando los dígitos del 0 al 9 del sistema decimal, agregándole las seis primeras letras en mayúsculas del alfabeto. Así, el conjunto de símbolos del sistema hexadecimal es:

$$\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F \}$$

Para la completa comprensión de este sistema de numeración y los trabajos de conversión a otros sistemas numéricos, es necesario asignar o mapear la secuencia de caracteres A, B, C, D, E y F a los valores decimales: 10, 11, 12, 13,14 y 15 respectivamente.

Veamos este mapeo y el resto de dígitos de ambos sistemas en la siguiente tabla:

Valor Decimal	**Valor Hexadecimal**
0	0
1	1
2	2
3	3

4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

Tabla 1.1 Mapeo de valores entre base 10 y base 16.

2.2 Conversiones entre distintos sistemas

Tomemos la sucesión alterna de 1 y 0 como sigue: 101010. De la expresión (1.1) de esta unidad, tenemos que el número 101010 en base *b* = 2 denotado por $(101010)_2$ convertido a su correspondiente número en base 10 es $(42)_{10}$:

$$(101010)_2 = \sum_{i=0}^{5} d_i\, 2^i$$

$$= (1 \times 2^5) + (0 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (0 \times 2^0)$$

$$= 32 + 0 + 8 + 0 + 2 + 0 = (42)_{10}$$

En el caso contrario, para convertir $(42)_{10}$ a su correspondiente expresión en base 2, lo hacemos a través de divisiones sucesivas por el número base. Sigamos el ejemplo:

$$\frac{42}{2} = 21\ Resto\ 0$$

$$\frac{21}{2} = 10\ Resto\ 1$$

$$\frac{10}{2} = 5\,Resto\,0$$
$$\frac{5}{2} = 2\,Resto\,1$$
$$\frac{2}{2} = 1\,Resto\,0$$
$$\frac{1}{2} = 0\,Resto\,1$$

La lectura de los dígitos en base 2 se realiza en sentido de abajo hacia arriba (del último al primero), obteniendo así el valor $(101010)_2$. Por lo tanto: $(42)_{10} = (101010)_2$ como ya sabíamos. Desde luego, este procedimiento de conversión es aplicable para cualquier par de bases.

Ahora, procedamos a la conversión del número $(1A2B3C)_{16}$ a decimal bajo la misma mecánica:

$$(1A2B3C)_{16} = (1 \times 16^5) + (A \times 16^4) + (2 \times 16^3) + (B \times 16^2) + (3 \times 16^1) + (C \times 16^0)$$
$$= (1 \times 16^5) + (10 \times 16^4) + (2 \times 16^3) + (11 \times 16^2) + (3 \times 16^1) + (12 \times 16^0)$$
$$= 1048576 + 655360 + 8192 + 2816 + 48 + 12$$
$$= (1715004)_{10}$$

Para el paso contrario, pasar $(1715004)_{10}$ a base 16 hacemos divisiones sucesivas por las base 16:

$$\frac{1715004}{16} = 107187\,Resto\,12\;(= C\;en\;base\;16)$$
$$\frac{107187}{16} = 6699\,Resto\,3\;(= 3\;en\;base\;16)$$
$$\frac{6699}{16} = 418\,Resto\,11\;(= B\;en\;base\;16)$$
$$\frac{418}{16} = 26\,Resto\,2\;(= 2\;en\;base\;16)$$
$$\frac{26}{16} = 1\,Resto\,10\;(= A\;en\;base\;16)$$
$$\frac{1}{16} = 0\,Resto\,1\;(= 1\;en\;base\;16)$$

Recordemos que debemos leer de abajo hacia arriba el conjunto de valores obtenidos: 1A2B3C que es el valor buscado en el sistema hexadecimal.

Dando una formalidad a los ejercicios anteriores, tenemos que dados ***X*** y ***W*** sistemas numéricos cualesquiera, para convertir un número del sistema ***X*** al sistema decimal se hace uso de la relación 1.1 que es la notación exponencial del número.

Por otro lado, para pasar de un sistema decimal a un sistema ***W*** cualquiera se divide la parte entera del número entre la base a la que se desea convertir y la parte fraccionara del número a convertir se multiplica por el número base de la conversión. Observemos que para pasar de un sistema ***X*** a otro ***W*** se debe pasar primero por el sistema decimal. La siguiente figura 1.1 nos representa esta serie de pasos para una mejor comprensión.

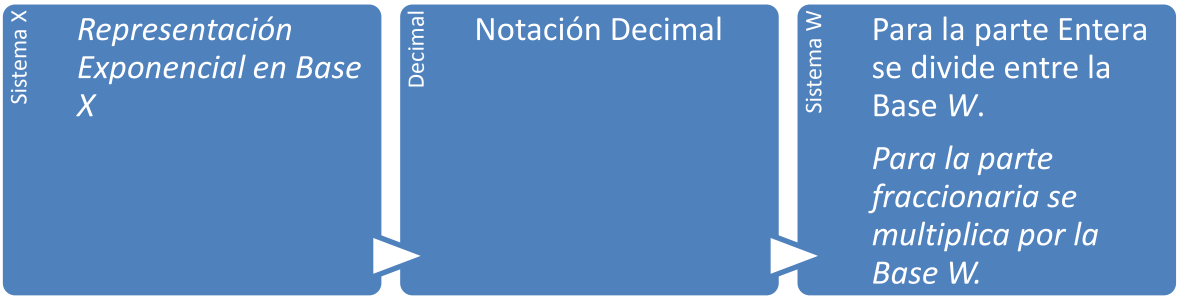


Fig. 1.1 Reglas de conversión entre los sistemas numéricos.

2.3 Aplicaciones prácticas

Sencillamente diremos que la matemática es la columna vertebral de muchas ramas de la ciencia y en general en el entorno de las Tecnologías de Información y Comunicaciones (TIC) no podía ser la excepción. Es en la computación de manera contundente, donde se da una de las aplicaciones más importantes de los sistemas numéricos y en particular los sistemas binarios, octal y hexadecimal. El binario con sólo dos símbolos 0 y 1, es el lenguaje natural de las computadoras. Los sistemas octal y hexadecimal porque permiten compactar la información de las computadoras, es decir; compactan los número binarios de una forma muy sencilla y natural.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. En la afirmación de que las reglas aprendidas en particular para los sistemas decimal y binario, también son aplicables al sistema octal; desarrollar en grupo el sistema de

numeración octal llegando al punto de realizar conversiones de números con otros sistemas de numeración.

2. Sistema de Numeración Base 12. Realizar en grupo una disertación sobre el sistema de numeración base 12 llegando al punto de concluir qué relación tiene con nuestra familiar manera de medir el tiempo de cada día en dos partes de 12 horas cada una.
3. Operaciones Básicas. Las operaciones básicas de Suma, Resta, Multiplicación y División que comúnmente realizamos en nuestro sistema decimal, también se pueden llevar a cabo en cualquier sistema de numeración respetando las mismas reglas y considerando la base de numeración en la que se esté operando. La tarea de aprendizaje consiste en realizar una investigación del proceder para estas operaciones agregando ejercicios que ejemplifiquen las mismas operaciones.

AUTOEVALUACIÓN

1. Verificar usando el método propuesto que el valor decimal 1024 equivale a los números señalados en las bases indicadas:

   i. Base 10 a base 2: $(1024)_{10}$ R : $(10000000000)_{2}$
   ii. Base 10 a base 8: $(1024)_{10}$ R : $(2000)_{8}$
   iii. Base 10 a base 10: $(1024)_{10}$ R : $(1024)_{10}$
   iv. Base 10 a base 12: $(1024)_{10}$ R : $(714)_{12}$
   v. Base 10 abase 16: $(1024)_{10}$ R : $(400)_{16}$

2. Convertir/Verificar:

   i. Base 16 a base 2: $(ABC.DE)_{16}$ R : $(101010111100.11011110)_{2}$
   ii. Base 2 a base 10: $(1010101010.10)_{2}$ R : $(682.5)_{10}$
   iii. Base 10 a base 16: $(3.1416)_{10}$ R : $(3.243FE5C9)_{16}$

De serle necesario considere revisar la bibliografía en su capítulo 1 para el uso preciso del punto decimal

UNIDAD 3

ÁLGEBRA

OBJETIVO

El estudiante identificará y representará las estructuras abstractas, permitiéndole comprender las propiedades de los conjuntos de números y los distintos tipos de funciones. Además comprenderá que como rama de la matemática el algebra le permitirá el estudio de la cantidad en general, haciendo uso de un lenguaje de números y letras para representar simbólicamente las cantidades manejadas, aplicando estos conocimientos a la solución de problemas arquitectónicos y estructurales.

TEMARIO

3.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

3.2 NÚMEROS REALES

3.3 EXPONENTES

3.4 RADICALES

3.5 LOGARITMOS

3.6 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

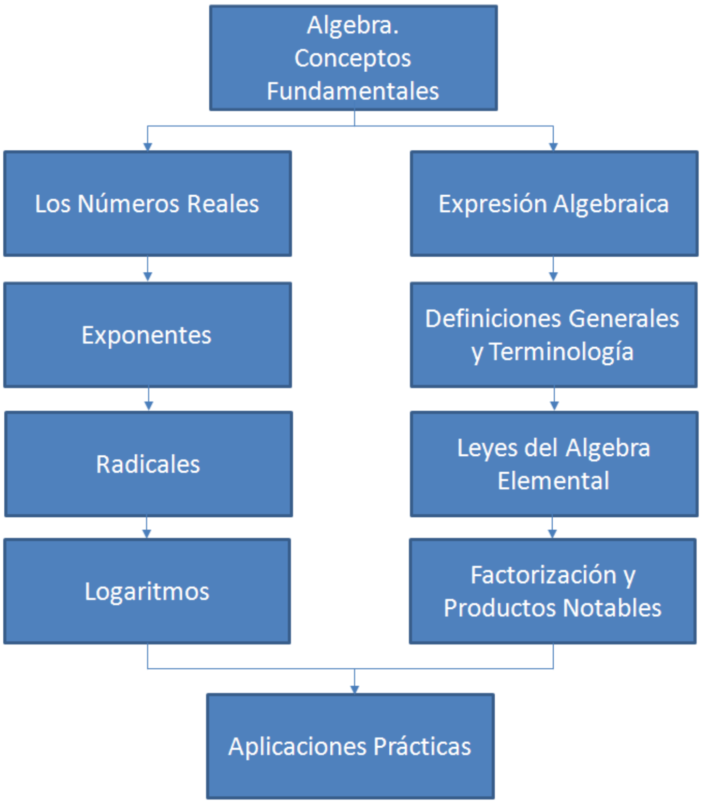
3.6.1 Definiciones Generales

3.6.2 Leyes del álgebra elemental

3.6.3 Factorización y productos notables

3.7 APLICACIONES PRÁCTICAS

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Continuando con nuestro trabajo, toca el turno al álgebra que por propia definición nos lleva al estudio de la cantidad en general a través de las la teoría de conjuntos y los sistemas numéricos. Tomaremos las operaciones básicas, potenciación, radicación y logaritmos. De igual manera se abordará el tema de las leyes del algebra elemental, la descomposición factorial, productos notables. Lo anterior permitirá el conocimiento necesario para los capítulos sucesivos de la materia.

3.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Partiendo del hecho de que el algebra es la rama de las matemáticas que estudia la cantidad en general, valiéndose de un lenguaje de números y letras para representar simbólicamente las entidades manejadas, llamamos a estas entidades expresiones algebraicas. Más precisamente, una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al aplicar a una colección de letras y números una secuencia finita de operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) además de los procesos de extracción de raíces y potenciación.

Sólo para situar ideas, el primer encuentro natural que la mayoría tenemos con las matemáticas es a través de los números naturales, este conjunto infinito formado por los símbolos $\{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,\ldots\}$. Agreguemos ahora, el conjunto del los símbolos del alfabeto en mayúsculas y minúsculas $\{a,b,c,\ldots,x,y,w,z,A,B,C,\ldots\}$ y además un conjunto de símbolos denominados signos y operadores $\{=,<,>,\leq,\geq,+,*,-,(),\ldots\}$ que nos permitirán operar los números y las letras anteriores, entonces tendremos los elementos o símbolos propios del algebra o más propiamente del lenguaje algebraico. Se han tomado estos conjuntos sólo para ejemplificar el concepto no implicando así que éstos son los únicos símbolos que componen el lenguaje algebraico, de hecho el estudio que haremos en este capítulo del lenguaje algebraico está comprendido dentro de los números reales.

Una característica en el álgebra es el uso de los elementos señalados para obtener otro previamente considerado en el conjunto de símbolos, por ejemplo, a la pregunta ¿Cuánto es la mitad de 1? la respuesta conlleva el uso del símbolo 1 operarlo con el símbolo 2 a través de la división y obtener como resultado el símbolo $\frac{1}{2}$.

Antes de llegar al punto de las expresiones algebraicas es necesario detallar ciertas operaciones dentro del contexto de los números reales mismas que nos permitirán trabajar con las expresiones algebraicas, estas son las operaciones de los exponentes, las potencias y los logaritmos.

3.2 NÚMEROS REALES

Hagamos en primer lugar una pseudo semblanza de la evolución por necesidad de los sistemas de numeración hasta llegar a los reales.

En el párrafo anterior afirmamos que el primer encuentro natural que la mayoría tenemos con las matemáticas es a través de los números naturales, este conjunto infinito formado por los símbolos $\{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,\ldots\}$ y este conjunto surge de la propia necesidad de contar.

Cuando se presenta la necesita además de restar surgen los números enteros { ... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}.Este conjunto de símbolos se obtiene a partir de los naturales añadiendo los opuestos para la operación suma.

El siguiente paso en esta evolución es la necesidad de particionar o dividir, surgen entonces los números racionales también llamados fraccionarios o quebrados. Los racionales se obtienen a partir de los enteros añadiendo los inversos para la operación de multiplicación. Ejemplos de este conjunto son: {... 1/2, 5/3, 8/10, 10/7, ….}.

Hay números que no son racionales, es decir que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. Por ejemplo, pensemos en el número π. A este tipo de números les llamamos irracionales.

Por último, para nuestro objetivo, la unión de los racionales y los irracionales forma el conjunto de los numeros reales.

Para tener un contexto completo del algebra y en particular de las expresiones algebraicas, es necesario estudiemos ciertas operaciones asociadas en este caso al conjunto de los números reales, estas son: exponentes, radicales y logaritmos.

3.3 EXPONENTES

Es necesario para nuestro estudio definir la operación de exponenciación. Consideremos n un número del conjunto de los naturales que llamaremos la potencia y a un número real que llamaremos la base. La notación a^n representa el producto del número real a por si mismo n veces y se llama la notación exponencial a^n. La siguiente matriz representa la definición y las propiedades o reglas inherentes a esta operación.

Definición o Propiedad	**Descripción**	**Ejemplo**
Definición: a^n	$\underbrace{a \times \cdots \times a}_{n}$	$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
Multiplicar por una constante: ka^n para k número real.	$ka^n = k\,(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)$	$5 \cdot 3^2 = 5(3 \cdot 3) = 45$ $-2 \cdot 3^2 = -2(3\, x\, 3) = -18$
Exponente cero.	$a^0 = 1$	$3^0 = 1$, $(\sqrt{a^2+b^2})^0 = 1$
Exponente unitario.	$a^1 = a$	$3^1 = 1$, $(\sqrt{a^2+b^2})^1 = 1$
Exponente negativo. Sea p un número entero	$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	$2^{-3} = 1 / 2^3$

negativo.		
El exponente es una fracción irreducible: *n/m.*	$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$	$9^{1/3} = \sqrt[3]{9}$
Multiplicación de potencias de igual base, m, n enteros positivos.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$6^2 \cdot 6^3 = 6^{2+3} = 6^5$
Potencia de una potencia, m, n enteros positivos.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(6^2)^3 = 6^6$
Potencia de un producto o propiedad distributiva respecto al producto.	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(6 \cdot 9)^5 = 6^5 \cdot 9^5$
Propiedad distributiva, respecto a la división.	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$(\frac{6}{9})^5 = \frac{6^5}{9^5}$
División de potencias de igual base.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$	$\frac{2^7}{2^4} = 2^{7-4} = \frac{1}{2^{4-7}} = 2^3$
Teorema exponentes negativos.	$\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$ $(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^n$	
Propiedades que no cumple la potenciación.	$(a+b)^m \neq a^m + b^m$ $(a-b)^m \neq a^m - b^m$ En general no se cumple: $a^b \neq b^a$ Tampoco se cumple la propiedad asociativa: $a^{b^c} = a^{(b^c)} \neq (a^b)^c = a^{(b \cdot c)} = a^{b \cdot c}$	

3.4 RADICALES

De manera análoga a la operación de potenciación debemos definir la operación de los radicales (cuyo símbolo es $\sqrt{\quad}$) o raíces de un número. Consideremos n un número del conjunto de los naturales pero mayor que la unidad que llamaremos el orden o índice de la raíz y a un número real que llamaremos radicando. La notación $\sqrt[n]{a}$ representa la raíza enésima de a y es el valor obtenido bajo las siguientes definiciones:

i. Si $a = 0$, entonces $\sqrt[n]{a} = 0$.

ii. Si $a > 0$, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real y positivo b tal que $b^n = a.$

iii. Si $a < 0$ y n es non, entonces $\sqrt[n]{a}$ es el número real y negativo b tal que $b^n = a.$

iv. Si $a < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real (no existe en los reales).

Pasemos a ver las propiedades o reglas de esta nueva operación:

Definición o Propiedad	**Descripción**	**Ejemplo**
Definición: $\sqrt[n]{a}$	a=0, entonces $\sqrt[n]{a}$ = 0. a>0, entonces $\sqrt[n]{a}$, $b^n = a.$ a<0 y n es non, entonces $\sqrt[n]{a}$, $b^n = a.$ a<0 y n es par, entonces $\sqrt[n]{a}$ no es un número real.	$\sqrt[n]{0}$ = 0, $\sqrt[2]{25}$ = 5 porque 5^2= 25, $\sqrt[3]{-27}$ = 3 porque $(-3)^3$= -27, $\sqrt[2]{-9}$ no existe.
Radicación como operación inversa de la potenciación. (las propiedades de la potenciación se cumplen también con la radicación).	$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$ En particular: $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$	$\sqrt[2]{25}$ = $(25)^{1/2}$ = 5
Propiedades	$(\sqrt[n]{a}\,)^n = a$, Si $\sqrt[n]{a}$ es un real. $(\sqrt[n]{a^n}) = a$, Si $a \geq 0$. $(\sqrt[n]{a^n}) = a$, Si $a < 0$ y n es non.	$(\sqrt[2]{-3}\,)^2$ = -3 $(\sqrt[2]{8}\,)^2$ = 8 $(\sqrt[3]{-3^3}) = -3$
Para todo n natural, *a* y *b* reales positivos:	$a = b^n \iff b = \sqrt[n]{a}$	5^3 = 125 5 = $\sqrt[3]{125}$
Raíz Cuadrada.	$\sqrt{x}$ o $\sqrt[2]{x}$	$\sqrt[2]{100}$ = 10
Raíz Cubica	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{8}$ = 2
Cálculo de la raíz mediante las funciones logaritmo y exponencial (solo números positivos).	$\sqrt[n]{x} = \exp\left(\frac{\ln x}{n}\right) = e^{\frac{\ln x}{n}}$	$\sqrt[2]{5}$ = exp ($\frac{\ln 5}{2}$)
Raíz de un producto	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[2]{4 \cdot 2} = \sqrt[2]{4}\,\sqrt[2]{2} = 2\sqrt[2]{2}$

Raíz de un cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[2]{1/8}$ =$(\sqrt[3]{1})/(\sqrt[3]{8})$ =1/2
Raíz de una raíz	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt{\sqrt{100}} = \sqrt[2\cdot 2]{100} = \sqrt[4]{100}$
Propiedades que no cumplen los radicales	$\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$ $\sqrt[2]{a+b} \neq \sqrt[2]{a} + \sqrt[2]{b}$	$\sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5 \neq 4+3$ $\sqrt[2]{16+9} = \sqrt[2]{25} \neq \sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{9}$

3.5 LOGARITMOS

La función exponencial tiene su función inversa y recibe el nombre de Logaritmo. Por tanto consideremos un número en notación exponencial:

$$b^n = x$$

donde b es un numero positivo y distinto de la unidad, *x* un numero positivo y *n* puede ser cualquier número real. Para este número exponencial definimos el logaritmo de x como el exponente n a que hay que elevar la base b para obtener x, la notación se determina como sigue:

$$log_b\, x = n$$

Como proposición lógica tenemos:

$$\log_b x = n \Leftrightarrow \ x = b^n$$

Ejemplo, consideramos los números b=5, n=2 entonces $b^n = 5^2 = 25 = x$; por lo tanto el logaritmo de 25 en la base 5 es 2.

Las propiedades de los logaritmos como operación matemática son:

i. Casos particulares: $\log_b b=1$, $\log_b 1 = 0$.
ii. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores, en símbolos: $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
iii. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador, esto es: $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$
iv. El logaritmo de una potencia es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia, en notación de logaritmos: $\log(a^x) = x\log(a)$
v. El logaritmo de una raíz es igual al producto entre la inversa del índice y el logaritmo del radicando, es decir: $\log(\sqrt[x]{y}) = \frac{\log(y)}{x}$.

En general el *log* de todo número que no sea una potencia de 10 consta de una parte entera y una decimal. La parte entera se llama Característica y la parte decimal la Mantisa. Por último, la base de los logaritmos según su definición puede ser cualquier numero positivo distinto de 1, pero los sistemas de logaritmos más comunes son el de base 10 y base natural es cuya base es el numero e = 2.718281824.

Con este previo, pasemos al contexto de las expresiones algébricas.

3.6 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es un conjunto de símbolos y cantidades numéricas ligadas entre sí por los signos que señalan las diversas operaciones que se debe efectuar con las cantidades. Agreguemos a esta definición el hecho irrefutable de que las expresiones algebraicas nos permiten traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual.

Para continuar con nuestra exposición de ideas, es necesario convenir el uso en la notación de expresiones algebraica:

i. El conjunto de símbolos usados para denotar las expresiones algebraicas son los números y las letras.
ii. Los números representaran cantidades conocidas y perfectamente determinadas.
iii. Las letras nos permitirán la representación de toda clase de cantidades, ya sea conocidas o desconocidas en un contexto determinado. Así, las cantidades conocidas se representaran por las primeras letras del alfabeto: $\{a, b, c, d, e, \ldots\}$ y se llaman genéricamente constantes y las cantidades desconocidas por las ultimas letras del alfabeto: $\{\ \ldots, u, v, w, x, y, w, z\}$ llamadas variables.

Las siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$a,\ 2\cdot a+2\cdot b,\ \frac{D\cdot d}{2},\ \pi\cdot r^2,\ \frac{2\pi r\cdot\alpha}{360^o},\ \frac{1}{3}\cdot A_b\cdot h,\ A_l+\pi r_1^2+\pi r_2^2,\ \frac{4}{3}\cdot\pi r^3$$

Con estas definiciones y ejemplos, es necesario dar nombre a cada una de las partes que componen una expresión algebraica genérica. Consideremos sin pérdida de generalidad la expresión algebraica: $-7ax^2$ en la cual el símbolo “-” es el signo de la expresión, el valor “*7*” recibe el nombre de coeficiente, “*a” constante, “x”* variable y “^{2}” es la potencia del coeficiente en la variable *x.*

3.6.1 Definiciones generales

Dando continuidad a este nivel intuitivo de los conceptos algebraicos, el siguiente arreglo nos determina o define el resto de elementos necesarios en el uso del algebra.

Concepto	Definición o Característica	Ejemplo
Termino	Varios símbolos no separados por signos + o -.	$\frac{D \cdot d}{2}$
Grado de un termino	Con relación a una constante o a una variable es el exponente de dicha literal. Con relación a toda la expresión es la suma total de los exponentes de todas sus literales.	$\frac{4}{3} \cdot \pi r^3$
Clases de Términos	Entero: no tiene denominador literal.	a
	Fraccionario: tiene denominador literal.	$\frac{42}{y}$
	Racional: el que no tiene radical o no contiene letras bajo el signo radical.	$\pi \cdot r^2$
	Irracional: el que tiene radical.	$\sqrt[n]{a^m}$
Termino Semejante	Tienen las mismas literales afectadas por los mismos exponentes e independiente del valor del signo y del coeficientes de los términos.	$5xr^2$, $3xr^2$
Expresión Algebraica	Entera, no contiene denominador y las letras aparecen solo en potencias de la unidad.	$2x + 2y$, $a^2 - 2ax + 4$
	Fraccionaria: posee denominador.	$\frac{3x}{5}$, $\frac{4}{3}\pi r^3$
	Racional: no posee letras bajo el signo radical.	$\frac{\sqrt{3^2 - 4}}{2a}$

	Irracional: hay letras dentro del signo de radical.	$\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
	Fraccionaria e Irracional: combinación de fraccionaria e irracional.	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Monomio	Contiene un solo término.	$a \cdot b \cdot c$
Binomio	Contiene dos términos	$2x + 2y$
Trinomio	Contiene tres términos	$2ab + 2ac + 2bc$
Polinomio	Dos o más monomios asociados por un símbolo de + o -.	$z^7 + a \cdot (b + x^3) + \frac{42}{y} - \pi$
Valor Numérico	El valor numérico de una expresión algebraica es el resultado obtenido al sustituir las literales por valores numéricos efectuando las operaciones indicadas.	$a = 2$; $\frac{\sqrt{4^2-7}}{a+1}$ 2.
Ecuación o Formula	Una ecuación es la aseveración de que dos expresiones algebraicas son iguales.	$\frac{(ab)}{b} = a$ $A = 4\pi r^2$
Signos Algebraicos	Operación: Suma: + , Resta: - , Multiplicación: × o ·, o es implícito entre las variables, División: /, : o ÷ , Potenciación: Es un pequeño número o letra arriba y a la derecha de una cantidad, Radicación: $\sqrt{\cdot}$	
	Relación: Menor que: <, Mayor que: >, Igual a: =.	
	Agrupación: El paréntesis: (), El corchete: [], La llave: {}.	

3.6.2 Leyes del álgebra elemental

Para las expresiones anteriores es necesario definir una serie de reglas básicas de operación que nos permitirán justamente "operar" con estos elementos, esto lo conseguimos mediante la aplicación de las leyes del algebra. El siguiente cuadro nos resumen las propiedades de las operaciones en el algebra elemental mismas que nos permitirán trabajar con las expresiones algebraicas.

Operador	Descripción
Operación de suma (+)	Notación: $a+b$
	Propiedad conmutativa: $a+b=b+a$
	Propiedad asociativa: $(a+b)+c=a+(b+c)$
	Posee un inverso aditivo $-b$ tal que $(a+b)-b=a$.
	Posee un elemento neutro 0 que no altera la suma: $a+0=a$.
	Regla de los signos: + y + da + + y· - da Signo del número mayor - y + da Signo del número mayor - y - da -
Operación de Multiplicación (*)	Notación $(a \times b)$o $(a \cdot b)$
	Propiedad conmutativa: $(a \cdot b)$= $(b \cdot a)$
	Propiedad asociativa: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
	Posee un inverso multiplicativo. La operación inversa llamada división, para números diferentes a cero, $\frac{(ab)}{b}=a$ o equivalentemente $\frac{a}{b}=a\left(\frac{1}{b}\right)$.
	Posee un elemento neutro 1,es decir que no altera la multiplicación: $a \times 1 = a$
	Es distributiva respecto la adición: $(a+b) \cdot c = ac+bc$.
	Regla de los signos: + por + da +

	+ por - da - - por + da - - por - da +
Orden de ejecución de las Operaciones	En primer lugar se calculan los valores de las expresiones encerradas en signos de agrupación (paréntesis, corchetes, llaves), seguidas por multiplicaciones y divisiones, y seguidas finalmente por las sumas y las restas.
Igualdad (=)	Es reflexiva: $a = a$
	Es simétrica: si $a = b$entonces $b = a$
	Es transitiva: si $a = b$y $b = c$entonces $a = c$
	si $a = b$y $c = d$entonces $a + c = b + d$y $ac = bd$
	si $a = b$entonces $a + c = b + c$
	Si dos símbolos son iguales, entonces, uno puede ser sustituido por el otro.
	Si $a + c = b + c$ entonces $a = b$.
	Si $a \cdot c = b \cdot c$ y c no es cero, entonces $a = b$.
Desigualdad (<,>)	Transitividad: si $a < b$y $b < c$ entonces $a < c$
	si $a < b$y $c < d$ entonces $a + c < b + d$
	si $a < b$y $c > 0$entonces $ac < bc$
	si $a < b$y $c < 0$entonces $bc < ac$

3.6.3 Factorización y productos notables

Para una expresión algebraica es indispensable que seamos hábiles en su manejo y operación en función del problema que se nos esté presentando. El aprender a identificar y reducir términos, factorizar, aplicar productos notables aplicando las reglas que hemos definido con anterioridad nos dará cierta soltura en su manejo. De esta manera conseguiremos nuestro objetivo de traducir al lenguaje matemático expresiones del lenguaje habitual a través del algebra. Como en todo este capítulo, comencemos con las definiciones básicas.

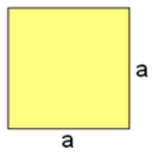
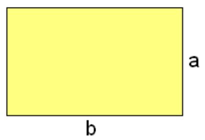
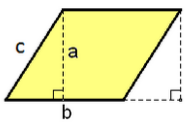
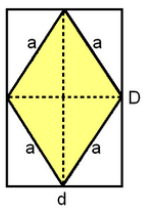
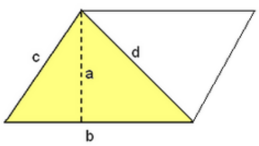
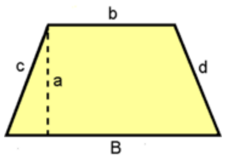
Dada una expresión algebraica se llaman factores o divisores a las expresiones que multiplicadas entre si dan como resultado la primera expresión, por lo tanto descomponer en factores o factorizar una expresión algebraica es convertirla en sus factores. Por ejemplo el numero 20 se factoriza en sus factores primos: 20 =10 · 2=5 ·2 · 2.

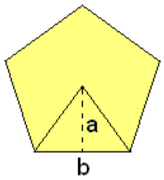
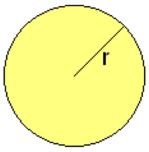
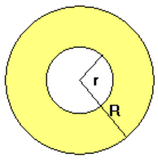
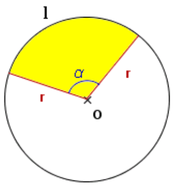
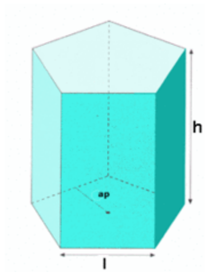
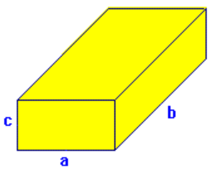
Los productos notables son expresiones algebraicas cuyo resultado debe ser escrito por simple inspección. Cada producto notable corresponde a una fórmula de factorización. Hecho el preámbulo anterior, procedamos a ver mediante la siguiente tabla varios de los casos que nos ocuparan.

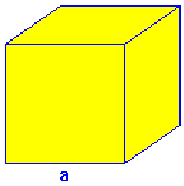
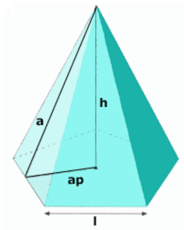
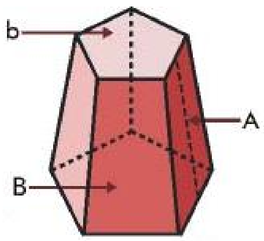
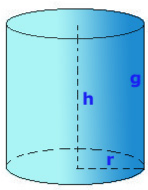
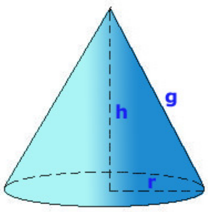
Nombre	**Factorización o Producto Notable**
Factor común	$c(a+b) = ca + cb$; $ab + ac + ad = a(b+c+d)$
Binomio cuadrado perfecto	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Binomios conjugados	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Diferencia de cuadrados	$(ay)^2 - (bx)^2 = (ay - bx)(ay + bx)$
Polinomio al cuadrado	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$
Binomio al cubo	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Adición de cubos	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Diferencia de cubos	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Suma de potencias enésimas	$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1})$
Diferencia de potencias enésimas	$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1})$

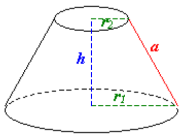
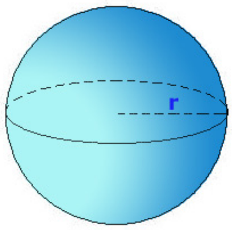
3.7 APLICACIONES PRÁCTICAS

Las aplicaciones prácticas del algebra y en particular de las expresiones algebraicas en cualquier área del conocimiento son tantas y tan variadas, que por señalar sólo algunas tomaremos como ejemplo las fórmulas para el cálculo de cantidades llamadas específicamente perímetros, áreas y volúmenes de figuras y cuerpos de uso común. Recordemos que una fórmula es una consecuencia de la generalización que implican las expresiones algebraicas y constituyen la representación de una regla o un principio general.

Nombre/Figura	**Elementos**	**Perímetro o Volumen (según se indique)**	**Área**
Cuadrado 	a: lado.	$P = 4 \cdot a$	$A = a^2$
Rectángulo 	b: base. a: altura.	$P = 2 \cdot a + 2 \cdot b$	$A = a \cdot b$
Paralelogramo 	b: base. A: altura. C: lado	$P = 2 \cdot c + 2 \cdot b$	$A = a \cdot b$
Rombo 	a: lado. D: diagonal mayor. d: diagonal menor.	$P = 4 \cdot a$	$A = \frac{D \cdot d}{2}$
Triángulo 	b: base. a: altura. c, d: lados.	$P = b + c + d$	$A = \frac{b \cdot a}{2}$
Trapecio 	B: base mayor. b: base menor. a: altura. c, d: lados.	$P = b + B + c + d$	$A = \frac{(B + b) \cdot a}{2}$
Polígono Regular	b: lado. a: apotema. n: número de lados.	$P = n \cdot b$	$A = \frac{P \cdot a}{2}$

			
Círculo 	r: radio.	$P = 2 \cdot \pi \cdot r$	c $A = \pi \cdot r^2$
Corona Circular 	r, R: radios respectivos.	$P = 2 \cdot \pi \cdot (R + r)$	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$
Sector Circular 	r: radio. l: arco. α : ángulo (en grados sexagesimales). El perímetro es la longitud del arco más los dos radios.	$l = \dfrac{2\pi r \cdot \alpha}{360^o}$; ; $P = l + 2 \cdot r$	$A = \dfrac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360^o}$
Prisma 	A_b : Área de la base. A_l : Área lateral. P_b : Perímetro de la base. h : altura.	$V = A_b \cdot h$	$A = A_l + 2 \cdot A_b$ $A_l = P_b \cdot h$
Ortoedro 	$a,\ b,\ c$: aristas.	$V = a \cdot b \cdot c$	$A = 2ab + 2ac + 2bc$
Cubo	a : arista.	$V = a^3$	$A = 6a^2$

 			
Pirámide  	A_b : Área de la base. A_l : Área lateral. h : altura.	$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$	$A = A_l + A_b$ $A_l =$ Suma áreas triángulos
Pirámide Truncada  	A_b : Área de la base superior. A_B : Área de la base inferior. A_l : Área lateral. h : altura. V_b : Volumen de la pirámide pequeña de base b. V_B : Volumen de la pirámide completa de base B.	$V = V_B - V_b$	$A = A_l + A_b + A_B$ $A_l =$ Suma áreas trapecios
Cilindro  	A_b : Área de la base. A_l : Área lateral. h : altura. g : generatriz. r : radio.	$V = A_b \cdot h$	$A = A_l + 2 \cdot A_b$ $A_l = 2\pi r g$ $A_b = \pi r^2$
Cono  	A_b : Área de la base. A_l : Área lateral. : altura. : generatriz. : radio.	$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$	$A = A_l + A_b$ $A_l = \pi r g$ $A_b = \pi r^2$

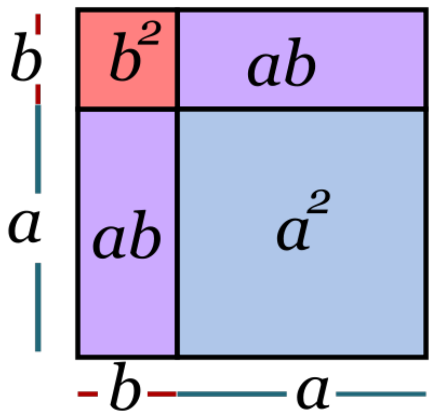
Cono Truncado 	A_l : Área lateral. : altura. V_1 : Volumen del cono completo. V_2 : Volumen del cono pequeño eliminado.	$V = V_1 - V_2$	$A = A_l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$ $A_l = \pi(r_1 + r_2)g$
Esfera 	: radio.	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3$	$A = 4\pi r^2$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Desarrolle los siguientes temas.

1. Demostrar que: $a^3 = \left(\frac{(a+1)a}{2}\right)^2 - \left(\frac{(a-1)a}{2}\right)^2$, desarrollando el miembro derecho de la igualdad
2. Asocie la figura siguiente con la fórmula del trinomio cuadrado perfecto para determinar el resultado del desarrollo del mismo por medio de las áreas generadas en el cuadrado.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



3. Racionalización de radicales es un proceso algebraico donde se tiene que eliminar el radical o los radicales, que están en el denominador de la fracción. Racionalizar $\sqrt{2/3}$. (Resultado: $\sqrt{6}$ / 3).

AUTOEVALUACIÓN

1. Desarrolle las siguientes expresiones algebraicas:
   a. $(2x + 5\ )\ (3x - 7)$. **R**. $6x^2 + x - 35$.
   b. $(2u + 3)(u - 4) + 4u(u - 2)$. **R**. $6u^2 - 13u - 12$.
   c. $(x + 1)(2x^2 - 2)(x^3 + 5)$. **R**. $2x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 8x^3 + 10x^2 - 10x - 10$.
2. Factorizar las siguientes expresiones algebraicas.
   i. $12x^2 - 29x + 15$ **R**. $(3x - 5\ )\ (4x - 3)$.
   ii. $15x^3y^5 - 25x^4y^2 + 10x^6y^4$ **R**. $5x^3y^2(3y^3 - 5x + 2x^3y^2)$.
   iii. $x^2 - 16y^2 + 10x + 25$ **R**. $(x + 4y + 5)\ (x - 4y + 5)$.
3. Simplifique las siguientes expresiones de radicales:
   i. $(\frac{32}{243})^{3/5}$ **R**. $\frac{8}{27}$.
   ii. $\sqrt{9x^{-4}y^6}$ **R**. $\frac{3y^3}{x^2}$
   iii. $\sqrt[5]{5x^7y^2/8x^3}$ **R**. $\frac{1}{2}\sqrt[5]{20x^4y^2}$.

UNIDAD 4

TRIGONOMETRÍA

OBJETIVO

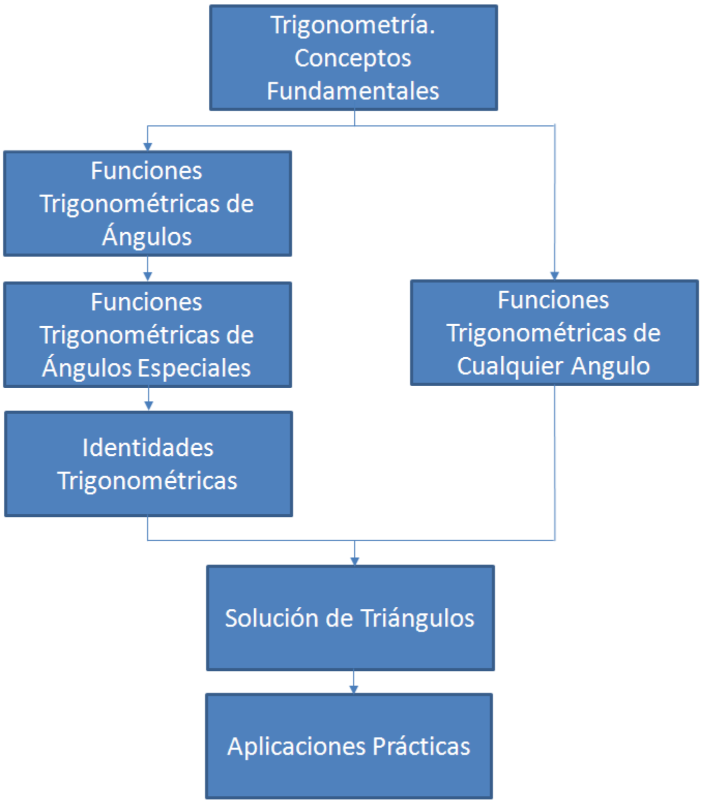
El objetivo de esta unidad es establecer las relaciones algebraicas y en general matemáticas entre las propiedades de los segmentos que forman los lados de un triángulo con las medidas de las amplitudes de sus ángulos, con el objetivo de calcular las primeras mediante las segundas y viceversa.

Mas precisamente, el objetivo de la trigonometría es el cálculo de los elementos de un triangulo donde explícitamente la palabra calculo significa la obtención de todos los elementos de un triangulo (tres lados y tres ángulos) a partir del concomiendo de al menos tres de los elementos del propio triangulo uno de los cuales deberá ser necesariamente un lado.

TEMARIO

4.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES
4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS
4.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS ESPECIALES
4.4 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
4.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO
4.6 SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS
4.7 APLICACIONES PRÁCTICAS

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

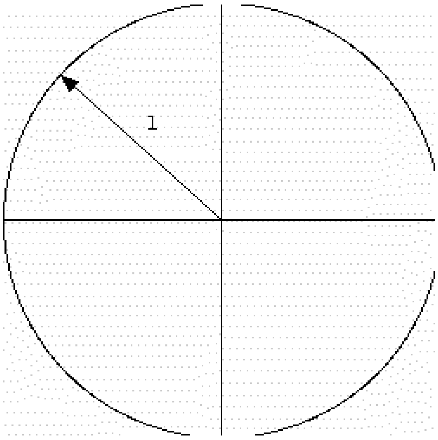
En la sección 2.1.1. de la unidad 2 del presente libro hablamos del número 149675000 que representa la distancia de la tierra al sol en kilómetros. La pregunta que viene al caso es el ¿cómo se determinó esta distancia? Definitivamente la forma de medición fue a través de un método analítico y es aquí donde la Trigonometría rinde sus frutos, ya que por medio de esta rama de las matemáticas es posible estimar distancias que no se pueden establecidas directamente. Tal estimación se realiza mediante seis razones que se denominan razones trigonométricas o más propiamente funciones trigonométricas que son la base de estudio de la presente unidad.

4.1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Si nuestro objetivo de estudio es la interrelación existente entre los elementos de un triángulo, como son las medidas de los lados con las amplitudes de los ángulos, es necesario definir estos elementos.

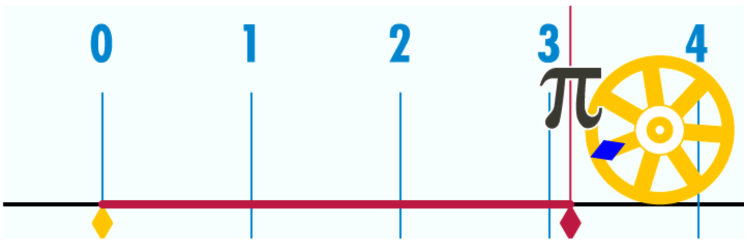
Un triángulo es aquella figura geométrica determinada por tres rectas que se cortan dos a dos entre puntos no alineados. Los puntos de intersección de las rectas son llamados Vértices, los segmentos de recta que se cortan son los Lados y la apertura formada por dos líneas que parten de un mismo punto se llama Ángulo.

Precisemos aún más este último concepto de ángulo. En primera instancia un Círculo Trigonométrico o Unitario es aquel que toma como base un circulo de radio unitario con centro en el punto (0,0) del plano cartesiano. Es una herramienta para el manejo de los conceptos de trigonometría y al mismo tiempo un apoyo teórico para tener una idea precisa y formal de las funciones trigonométricas.



Con lo anterior, un ángulo es la cantidad de rotación por medio de la cual la línea recta cambia de una dirección a otra en un mismo plano. Si esta cantidad de rotación mantiene el sentido de las manecillas del reloj se denomina ángulo negativo y si por el contrario es en el sentido contrario a las manecillas del reloj se denomina positivo.

Antes de precisar la manera de medir los ángulos, es necesario recordar la constante llamada pi que denotada por el símbolo π es base fundamental en las métricas establecidas para los ángulos. π es la relación o cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.



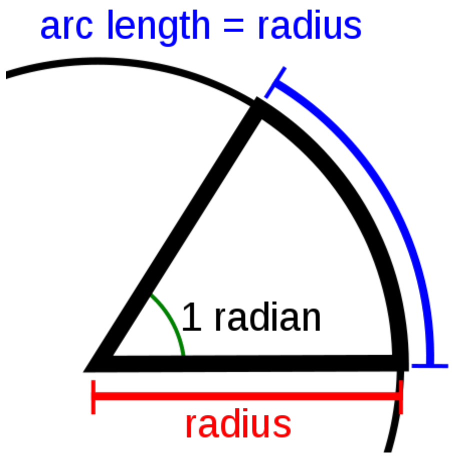
Además, es un número irracional y una de las constantes matemáticas más importantes, un valor aproximado de π es:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846...$$

Con lo anterior, la métrica para determinar el valor numérico de los ángulos puede ser en grados o en radianes.

Para la medida en Grados, consideremos segmentar el círculo unitario en 360 partes iguales, a cada una le llamamos un grado sexagesimal; es decir, un grado es la trescientos sesentava ($\frac{1}{360}$) parte de un ángulo plano a partir de un punto (establecemos que una vuelta completa o una revolución es aquella vuelta en sentido contrario a las manecillas del reloj que mide 360 unidades).

Un radian es la medida del ángulo central de un círculo subtendido por un arco igual en longitud al radio del circulo que ha generado.



Si denotamos por rad a los radianes y por º a los grados tenemos las siguientes fórmulas unitarias para radianes y grados en función de π:

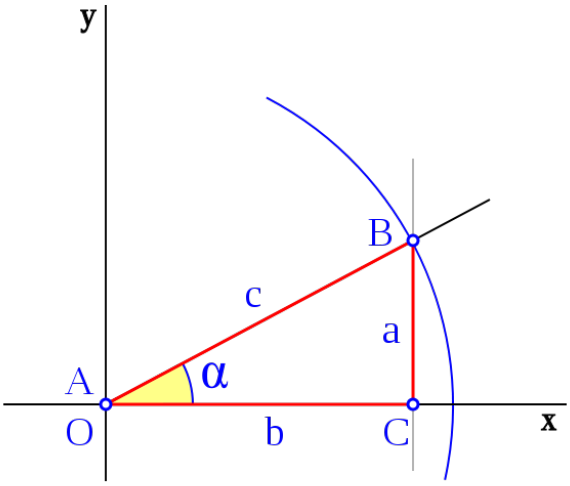
$$1\,rad = \frac{180º}{\pi} \qquad y \qquad 1º = \frac{\pi}{180º}\,rad$$

Cuando se usa la medida para ángulos expresados en radianes no deben indicarse unidades, es decir; los radianes son a dimensionales. Con estos conceptos fundamentales, estamos en posibilidad de dar nuestro siguiente paso hacia el entendimiento de las Funciones Trigonométricas.

4.2 Funciones trigonométricas de ángulos

La circunferencia trigonométrica o unitaria se utiliza con el fin analizar fácilmente las razones trigonométricas, mediante la representación de triángulos rectángulos auxiliares.

Consideremos la dupla *(b, a)* como un punto de la circunferencia unidad dentro del primer cuadrante cartesiano, entonces b y a son las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene longitud $c = 1$. El triángulo ABC es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C; que usaremos para definir las razones o funciones trigonométricas denominadas seno, coseno y tangente, del ángulo α, que correspondiente al vértice A del triángulo y está situado en el centro de la circunferencia como se aprecia en la figura siguiente:



Aplicando el teorema de Pitágoras, b y a satisfacen la ecuación: $a^2 + b^2 = 1$. Las principales funciones trigonométricas del ángulo α se definen como valores de los segmentos (catetos o hipotenusa) asociados al triángulo rectángulo de forma siguiente:

i. Seno es el cociente entre el cateto opuesto a y la hipotenusa c, su notación es:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{a}{c}$$

ii. Coseno es el cociente entre el cateto adyacente b y la hipotenusa c, su notación es:

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

iii. Tangente es el cociente entre el cateto opuesto a y el adyacente b, su notación es:

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

iv. Cosecante es la función inversa del seno, su notación es:

$$\csc(\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$$

v. Secante es la función inversa del coseno, su notación es:

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$$

vi. Cotangente es la función inversa de la tangente, su notación es:

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)}$$

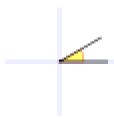
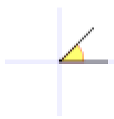
De acuerdo con la definición anterior, para cada una de las funciones trigonométricas en el circulo unitario de la figura anterior del triangulo ABC, es posible determinar los valores de las funciones.

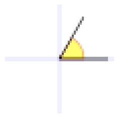
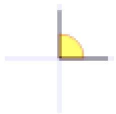
Ejemplo. Considere el triangulo rectángulo de cateto 5, cateto adyacente 4 y cateto opuesto 3 (en base a la figura anterior c= 5, b= 4 y a = 3), calcular los valores de las seis funciones trigonométricas definidas para el ángulo α.

Solución. Sen $\alpha = \frac{3}{4}$; Cos $\alpha = \frac{4}{5}$; tan $\alpha = \frac{3}{4}$; Csc $\alpha = \frac{4}{3}$; Sec $\alpha = \frac{5}{4}$; Cot $\alpha = \frac{4}{3}$.

4.3 RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ALGUNOS ÁNGULOS ESPECIALES

Para obtener ciertos valores de las funciones para 0º, 30º, 45º, 60º y 90º procedemos al llenado de la tabla siguiente tomando triángulos rectángulos con ciertas características.

	Radianes	**Grados**	**seno**	**coseno**	**tangente**	**cosecante**	**secante**	**cotangente**
	0	0^o	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0	No existe	1	No existe
	$\frac{1}{6}\pi$	30^o	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
	$\frac{1}{4}\pi$	45^o	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1

	$\frac{1}{3}\pi$	60^o	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	$\frac{1}{2}\pi$	90^o	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	No existe	1	No existe	0

Para 60º considerar un triangulo rectángulo similar al de la figura de la sección 4.2 con valores b=1, c=2 entonces a=$\sqrt{3}$ y α = 60º. Por lo tanto: Senα=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, Cosα=1/2, Tanα=$\sqrt{3}$, Cscα=$\frac{2}{\sqrt{3}}$, Secα=2 y Cotα=$\sqrt{3}$.

Para 30º considerar los valores a=1, b= $\sqrt{3}$, c=2 y α = 30º. Nuevamente por propia definición: Senα=$\frac{1}{2}$, Cosα=$\frac{\sqrt{3}}{2}$, Tanα=$\frac{1}{\sqrt{3}}$, Cscα=2, Secα=$\frac{2}{\sqrt{3}}$ y Cotα=$\sqrt{3}$.

Para 45º considerar un triangulo rectándolo con catetos unitarios por tanto la hipotenusa será $\sqrt{2}$. Así, a=b=1, c= $\sqrt{3}$ y α=45º. Senα=$\frac{1}{\sqrt{2}}$, Cosα=$\frac{1}{\sqrt{2}}$, Tanα=1, Cscα=$\sqrt{2}$, Secα=$\sqrt{2}$ y Cotα=1.

Para 0º y 90º baste observar que alguno de los catetos vale cero y el otro al igual que la hipotenusa vale 1. Así, para α=0º: Senα=0, Cosα=1, Tanα=0, Cscα=∞, Secα=1 y Cotα =∞. El símbolo ∞ es llamado infinito y no corresponde a un numero en sentido estricto, por conveniencia diremos que corresponde a un cociente de la forma a/0 para cualquier número real a.

Para 90º el ejercicio es similar y se deja como actividad de aprendizaje.

4.4 Identidades trigonométricas

De acuerdo con la definición de la sección 4.2 para cada una de las funciones trigonométricas en el círculo unitario de la figura anterior del triangulo ABC, es posible determinar los valores de las funciones sen, cos y tan del ángulo α como sigue (recordemos que la hipotenusa = 1):

$$\text{sen } \alpha = a, \ \ \cos \alpha = b \ \ \text{y} \ \ \tan \alpha = \frac{\text{Sen } \alpha}{\text{Cos } \alpha}$$

Del teorema de Pitágoras $(a^2 + b^2 = 1)$ obtenemos la identidad:

$$\text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha = 1$$

De la misma manera es posible obtener una serie de equivalencias o identidades trigonométricas, desarrollemos algunas. Partiendo de la identidad anterior $Sen^2\alpha+Cos^2\alpha=1$:

$Sen^2\alpha+Cos^2\alpha=1$

$Sen^2\alpha+Cos^2\alpha=1$; dividiendo por $Cos^2\alpha$:

$Sen^2\alpha/Cos^2\alpha + Cos^2\alpha/Cos^2\alpha=1/ Cos^2\alpha$; como $\tan\alpha = \frac{\text{Sen }\alpha}{\text{Cos }\alpha}$:

$Tan^2\alpha + 1=1/ Cos^2\alpha$; Identidad que relaciona a la tangente con el coseno de un mismo ángulo.

Ahora, partiendo de esta nueva identidad y recordando la definición de secante:

$Tan^2\alpha + 1=1/ Cos^2\alpha$;

$Tan^2\alpha + 1=1/ Cos^2\alpha$; $Sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ entonces $\cos\alpha = \frac{1}{\text{Sec }\alpha}$:

$Tan^2\alpha + 1=Sec^2\alpha$. Identidad que relaciona a la tangente con la secante de un mismo ángulo.

La siguiente tabla nos da una breve lista de algunas identidades trigonométricas.

Grupo o Nombre.	**Identidad(es)**
Inversas	$\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\csc(\alpha)=1$ $\cos(\alpha)\cdot\sec(\alpha)=1$ $\tan(\alpha)\cdot\cot(\alpha)=1$
De cociente.	$\tan(\alpha)=\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ $\cot(\alpha) = \frac{\text{Cos }\alpha}{\text{Sen }\alpha}$
Por el teorema de Pitágoras.	$\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha$ $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$
Suma y diferencia de ángulos.	$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta-\cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$
Suma y diferencia del seno y coseno de dos ángulos.	$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$

	$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
Producto del seno y coseno de dos ángulos.	$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$ $\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$ $\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$ $\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}$
Ángulo doble.	$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$ $\cos 2\alpha = -1 + 2\cos^2\alpha$ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ $\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
Ángulo Mitad.	$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
Otras.	$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

	$\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\operatorname{sen}\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\operatorname{sen}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{sen}\alpha$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\beta=\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$

Para una relación completa, favor de consultar la bibliografía del capítulo.

4.5 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER ÁNGULO

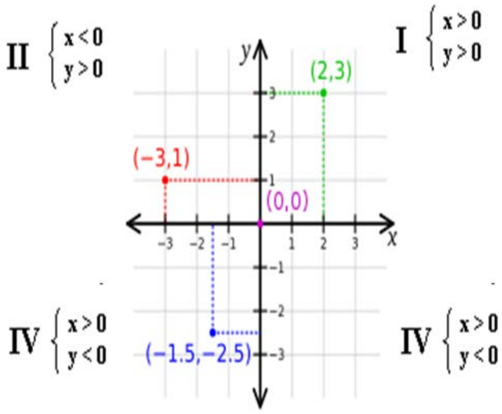
El trabajo desarrollado hasta este momento ha supuesto un ángulo a lo más de 90º, no obstante todo lo relacionado y demostrado aplica para un ángulo en cualquier cuadrante del sistema cartesiano. Sea α un ángulo en un sistema de coordenadas cartesiano y sea P(x,y) un punto distinto del origen en el lado terminal del segmento que une al origen con este punto P. Este segmento indica la magnitud o apertura del ángulo respecto al eje X. Si además r (radio vector) es la magnitud de este segmento, por el teorema de Pitágoras tenemos que $r^2 = x^2 + y^2$ siendo x e y la abscisa y la ordenad al origen respectivamente. Bajo estas condiciones definimos:

i. Sen $\alpha = \frac{y}{r}$.
ii. Cos $\alpha = \frac{x}{r}$.
iii. Tan $\alpha = \frac{y}{x}$ si $x \neq 0$.
iv. Csc $\alpha = \frac{r}{y}$ si $y \neq 0$.
v. Sec $\alpha = \frac{r}{x}$ si $x \neq 0$.
vi. Cot $\alpha = \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$.

Para estas definiciones conviene observar que los signos de las funciones en relación con el cuadrante cartesiano en que se encuentre el ángulo pueden ser positivos o negativos. Para el análisis o construcción de una tabla que determine los signos de las funciones en cada cuadrante se deben considerar los signos de las variables $"x"$, $"y"$, $"r"$ según el cuadrante, y aplicar la definición de la función trigonométrica considerando precisamente los signos, vemos la siguiente tabla y el ejemplo que clarifican los conceptos. El valor de r por definición siempre es positivo.

Cuadrante	**Valor x**	**Valor y**	**Valor r**	**Sen**	**Cos**	**Tan**	**Cot**	**Sec**	**Csc**
I	Positivo	Positivo	Positivo	+	+	+	+	+	+
II	Negativo	Positivo	Positivo	+	-	-	-	-	+
III	Negativo	Negativo	Positivo	-	-	+	+	-	-
IV	Positivo	Negativo	Positivo	-	+	-	-	+	-

Ejemplo. Determine los signos de las seis funciones trigonométricas de los ángulos que se forman con relación al eje x positivo y cada uno de los puntos: P(2,3), Q(-3,1) y R(-1.5,-2.5):



Solución. La siguiente tabla resume los resultados. El cálculo de los valores se deja al estudiante como un ejercicio de autoevaluación.

Punto (x,y), r	x	y	Sen $\alpha = \frac{y}{r}$	Cos $\alpha = \frac{x}{r}$	Tan $\alpha = \frac{y}{x}$	Cot $\alpha = \frac{x}{y}$	Sec $\alpha = \frac{r}{x}$	Csc $\alpha = \frac{r}{y}$
P(2,3), $\sqrt{13}$	2	3	+	+	+	+	+	+
Q(-3,1), $\sqrt{10}$	-3	1	+	-	-	-	-	+
R($-\frac{3}{2}$,$-\frac{5}{2}$), $\sqrt{17/2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-	-	+	+	-	-

4.6 Solución de triángulos

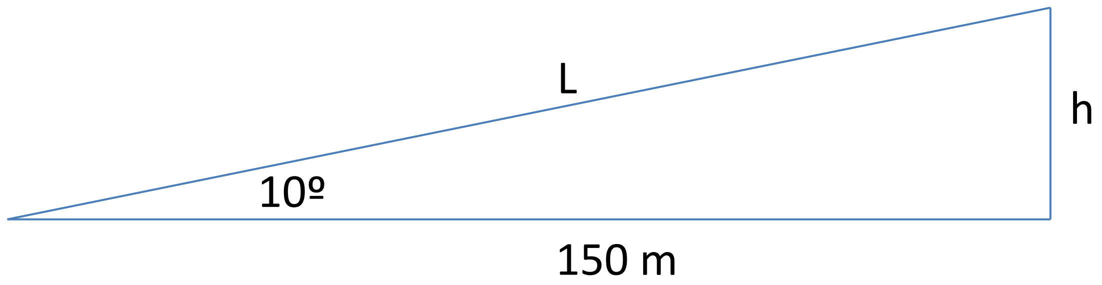
Decimos que se soluciona un triangulo cuando de se conocen de manera determinista los seis elementos que lo integran.

Para los triángulos rectángulos, es necesario y suficiente conocer dos de sus elementos (el tercero es el ángulo recto) y mediante el uso de las razones trigonométricas junto con el teorema de Pitágoras, podremos resolver cualquier triángulo rectángulo. En relación con los elementos conocidos se distinguen dos casos:

1. Conocidos dos lados cualesquiera.
   i. El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras.
   ii. Se calcula uno de los ángulos agudos aplicando la razón trigonométrica que relacione los dos lados conocidos (los datos proporcionados).
   iii. Para calcular el otro ángulo agudo considerar que la suma de los ángulos interiores de todo triangulo suma 180º.
2. Conocidos un lado y un ángulo cualesquiera.
   i. Se calcula el otro lado determinando la razón trigonométrica adecuada al ángulo y el lado conocido (los datos proporcionados).
   ii. Se calcula el tercer lado mediante el teorema de Pitágoras. También es posible por una razón trigonométrica.
   iii. El otro ángulo es la diferencia de 90º menos el ángulo conocido.

Ejemplo. Para la construcción de una carretera se presenta el preparar una rampa (pendiente) de 10º sobre una superficie horizontal de 150 metros de longitud. ¿A qué altura se sube al final de la rampa y cuál es la longitud de esta?

Solución. Se conoce un[3] ángulo y un lado. Analizando la figura siguiente:



Entonces, $\tan 10º = h / 150$; $h = 150 \cdot \tan 10º = 150 \cdot (0.176) = 26.4$ m.

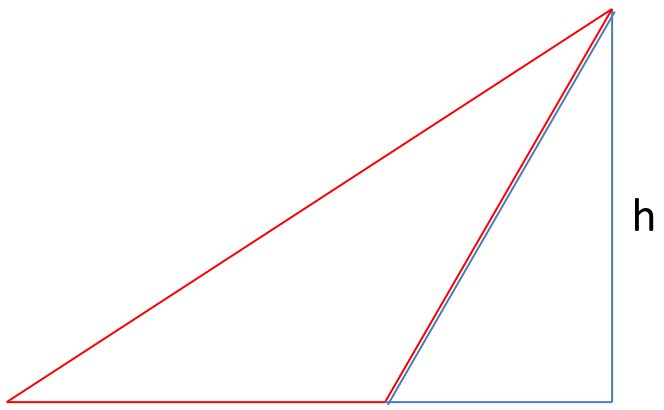
Por otra lado $L^2 = 150^2 + h^2 = 150^2 + 26.4^2 = 22500 + 696.96 = 23196.96$, $L = 152.30$ m.

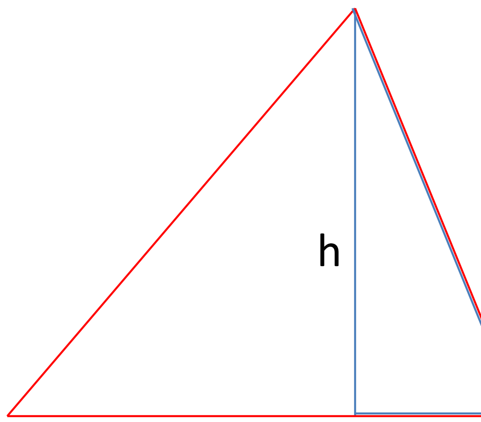
Para los triángulos no rectángulos, se propone una homologación al triangulo rectángulo ya que pueden resolverse triángulos no rectángulos aplicando correctamente las razones trigonométricas.

---

[3] En lo sucesivo se presupone que se sabe halar los valores de las funciones trigonométricas y ángulos usando herramientas como una calculadora o tablas matemáticas. Es útil recordar la manera en que se obtienen los valores de los ángulos especiales o sus valores.

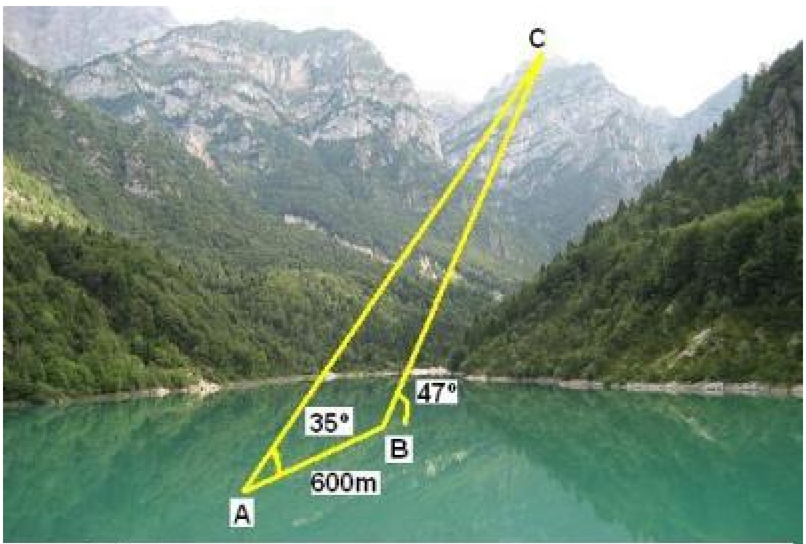
La idea es hacer una reconstrucción del triangulo no rectángulo ajustándolo a un triangulo rectángulo como se muestra en las siguiente figuras y entonces atacar el problema como triangulo rectángulo. Las figuras en rojo son el problema original y el complemento en azul la homologación a triangulo rectángulo. Los problemas más frecuentes son los que se presentan a continuación para calcular una altura h.





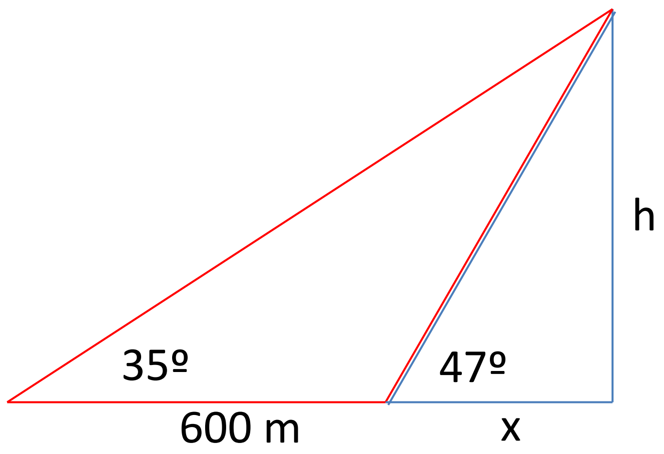
El caso general analítico de la solución de triángulos no rectángulo queda fuera de los alcances del presente curso.

Ejemplo. Un topógrafo desea medir la altura del pico de la montaña sobre el nivel del Lago. Para esto toma las medidas que aparecen en la figura. ¿A qué altura está la cima con respecto al lago?



Tomado de:
sobreitalia.com/wp-content/uploads/2009/01/dolomitas.jpg

Solución. Llevemos nuestro modelo a una representación de triangulo rectángulo como se muestra la siguiente figura donde con los datos dados se trata de calcular la altura h.



Observamos que la tangente es la función que involucra la altura con un ángulo y un lado conocido (a medias). La idea es aplicar esta para los dos triángulos rectángulos y como en ambos la distancia x es la misma, esta se calculara por igualación. Con este breve:

tan 35º = h/600+x   despejando h: h = (600+x)tan35º = 600tan35º + xtan35º

tan 47º = h/x   despejando h: h = x tan47º

Igualando los segundos miembros de las h's:

x tan47º = 600tan35º + xtan35º   despejando x:

x tan47º - xtan35º = 600tan35º ; x (tan47º - tan35º) = 600tan35º ;

x = 600tan35º / (tan47º - tan35º) por lo tanto x = 1129.032 m

Ahora, retomando la ecuación inicial: h = x tan47º obtenemos h = 1210.32 m.

4.7 Aplicaciones prácticas

Si partimos de la definición de la trigonometría como parte de la matemática que tiene por objeto calcular los elementos de un triangulo, tanto en el plano como en tres dimensiones; las aplicaciones prácticas de esta materia a la arquitectura son invaluables. Sencillamente dentro del campo de la topografía y la geodesia en general permite determinar distancias entre puntos geográficos para los cuales es imposible medir directamente.

Se tiene registro de que las primeras aplicaciones de la trigonometría y por propia necesidad se hicieron en los áreas de la navegación y la astronomía, en las que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, como la distancia entre la tierra y la luna o la distancia de la tierra al sol como planteamos al inicio de esta unidad. Otras aplicaciones de la trigonometría se pueden encontrar en ramas de la ciencia como la física, la química y en casi todas las ramas de la ingeniería. La idea es simple y en general, siempre que se pueda triangular un problema, se podrá aplicar algún concepto de la trigonometría para su solución.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

1. Tabla de conversión entre grados centesimal, sexagesimales y radianes. Use las formulas:

$$1\,rad = \frac{180º}{\pi} \qquad y \qquad 1º = \frac{\pi}{180º}\,rad$$

Con el fin de obtener la siguiente tabla de conversión de medidas correspondientes a radianes y grados de ángulos especiales (siendo prácticos puede usar de manera equivalente: $\pi\,rad$ = 180º). Para la columna de Grados Centesimal es necesario acotar que un grado centesimal es la unidad angular que divide la circunferencia en 400 grados centesimales. Su notación es una ^{g} (una g con aspecto de notación exponencial como la "o" de grados º).

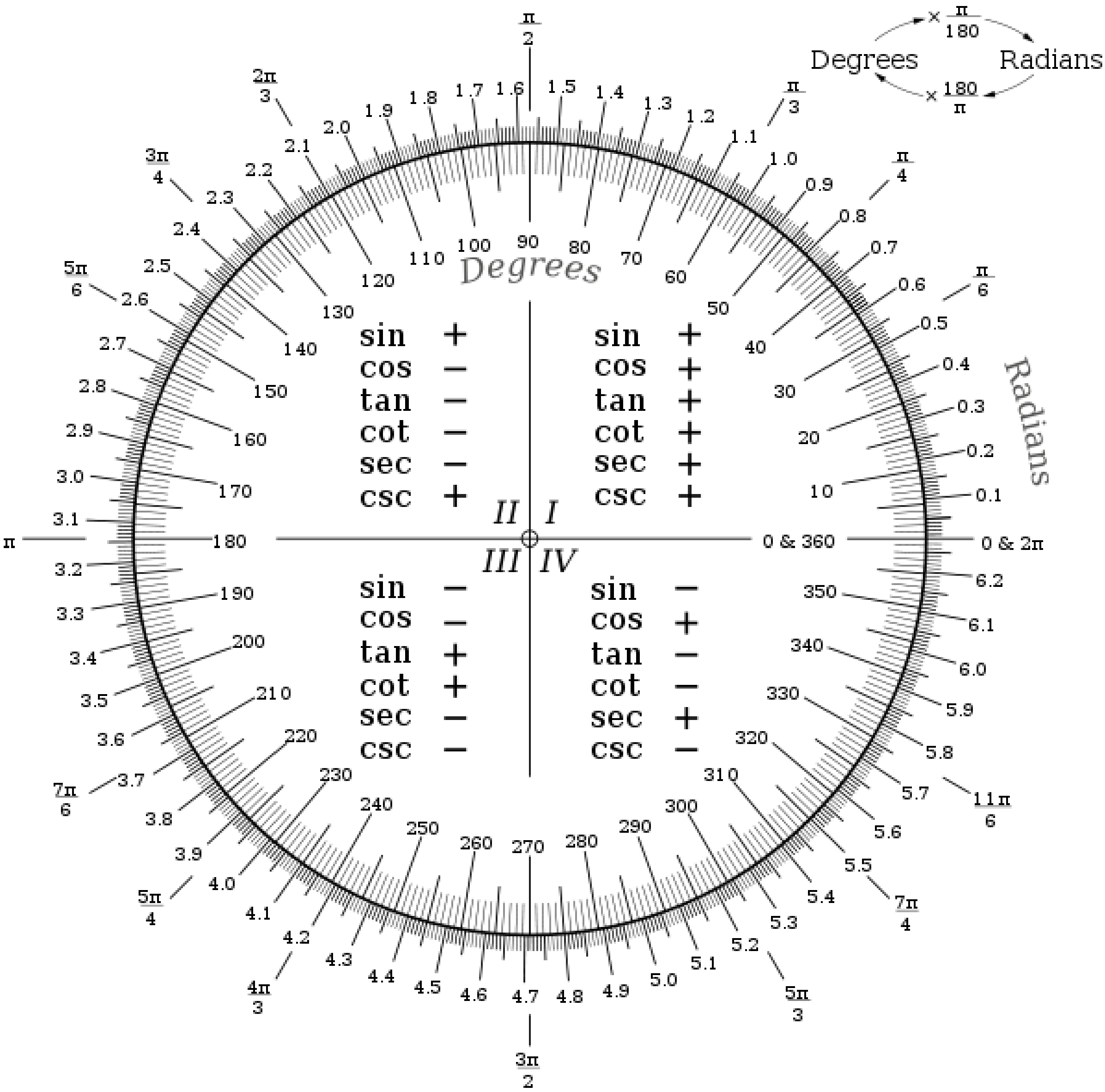
La actividad de aprendizaje para este ejercicio consiste en comprobar las equivalencias y sobre todo completar la columna de grados centesimales analizando el método para establecer las equivalencias.

Radianes rad	Grados º	Grados Centesimales ^{g}
$0\,rad$	0º	0^g
$\frac{\pi}{6}\,rad$	30º	
$\frac{\pi}{4}\,rad$	45º	
$\frac{\pi}{3}\,rad$	60º	
$\frac{\pi}{2}\,rad$	90º	100^g
$\frac{2\pi}{3}\,rad$	120º	
$\frac{3\pi}{4}\,rad$	135º	
$\frac{5\pi}{6}\,rad$	150º	
$\pi\,rad$	180º	200^g
$\frac{7\pi}{6}\,rad$	210º	
$\frac{5\pi}{4}\,rad$	225º	

$\frac{4\pi}{3}\ rad$	240º	
$\frac{3\pi}{2}\ rad$	270º	300^g
$\frac{5\pi}{3}\ rad$	300º	
$\frac{7\pi}{4}\ rad$	315º	
$\frac{11\pi}{6}\ rad$	330º	
$2\pi\ rad$	360º	400^g

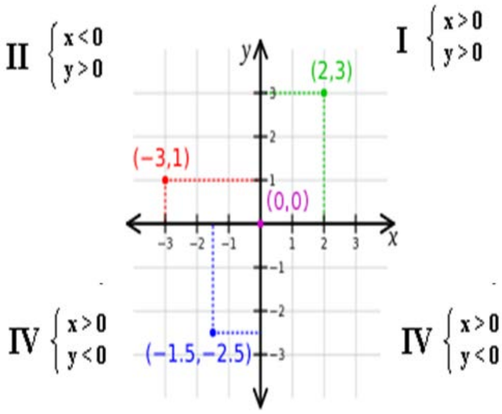
2. Si se requieren medidas menores de un grado se pueden usar decimas, centésimas o milésimas de grado. En particular usamos dividir el grado en 60 partes iguales llamados minutos y a su vez los minutos en 60 partes iguales llamados segundos. Los minutos se denotan por el símbolo ‘ y los segundos por dos veces el mismo símbolo ‘‘. Por propia definición se tienen las equivalencias 1º = 60’ y 1’ = 60‘‘. Por ejemplo, la notación: 30º 45’ 30‘‘ se lee: “30 grados, 45 minutos y 30 segundos”.

   El asunto en este punto es determinar un procedimiento (o formula(s)) para cambiar radianes a grados, minutos y segundos y viceversa. Una sugerencia es recordar los fundamentos del estudio hecho en la unidad II sobre sistemas de numeración en este caso es base 60.
3. A partir de las definiciones de las funciones iv, v y vi en la sección 4.2 demostrar las igualdades: cosecante α = c/a; secante α = c/b y cotangente α = b/a.
4. Determine que los valores de las seis funciones trigonométricas para α=90º en base a la figura de sección 4.2 del circulo unitario son: Senα=1, Cosα=0, Tanα =∞, Cscα=1, Secα=∞ y Cotα=0.
5. Comente la siguiente grafica en grupo, permite visualizar la segmentación en radianes y en grados sexagesimales, además los signos de las funciones trigonométricas. ¿Qué hace falta en la grafica para comparar con el sistema centesimal? ¿Cómo se lee la conversión de grados sexagesimales a radianes y viceversa?


Degrees
Radians
× π/180
× 180/π
Degrees
Radians
sin +
cos −
tan −
cot −
sec −
csc +
sin +
cos +
tan +
cot +
sec +
csc +
sin −
cos −
tan +
cot +
sec −
csc −
sin −
cos +
tan −
cot −
sec +
csc −
II
I
III
IV
0 & 360
0 & 2π
π/2
π
3π/2
π/3
π/4
π/6
2π/3
3π/4
5π/6
7π/6
5π/4
4π/3
5π/3
7π/4
11π/6

AUTOEVALUACION

1. Calcule los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos que se forman con relación al eje x positivo y cada uno de los puntos: P(2,3), Q(-3,1) y **R**(-1.5,-2.5):



R. La siguiente tabla resume los resultados.

Punto (x,y), r	x	y	Sen $\alpha = \frac{y}{r}$	Cos $\alpha = \frac{x}{r}$	Tan $\alpha = \frac{y}{x}$	Cot $\alpha = \frac{x}{y}$	Sec $\alpha = \frac{r}{x}$	Csc $\alpha = \frac{r}{y}$
P(2,3), $\sqrt{13}$	2	3	$+\frac{3}{\sqrt{13}}$	$+\frac{2}{\sqrt{13}}$	$+\frac{3}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$+\frac{\sqrt{13}}{2}$	$+\frac{\sqrt{13}}{3}$
Q(-3,1), $\sqrt{10}$	-3	1	$+\frac{1}{\sqrt{10}}$	$-\frac{3}{\sqrt{10}}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{1}$	$-\frac{\sqrt{10}}{3}$	$+\frac{\sqrt{10}}{1}$
R($-\frac{3}{2}$,$-\frac{5}{2}$), $\sqrt{17/2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{y}{\sqrt{17/2}}$	$-\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{17/2}}$	$+\frac{\frac{5}{2}}{\frac{3}{2}}$	$+\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}$	$-\frac{\sqrt{17/2}}{\frac{3}{2}}$	$-\frac{\sqrt{17/2}}{\frac{5}{2}}$

2. Calcule con la mayor precisión que le sea posible la equivalencia de 1radian a grados, 1 grado a radianes. Los grados deben ser expresados en grados, minutos y segundos.

   R. Al dividir 360° por 2π se puede ver que un radián es aproximadamente 57°17´44.8". Además: un radián = 57,3 grados y un grado = 0,01745 radianes.

3. Verificar la identidad siguiente por transformaciones del lado izquierdo de la ecuación: sec α - cos α = tan α sen α

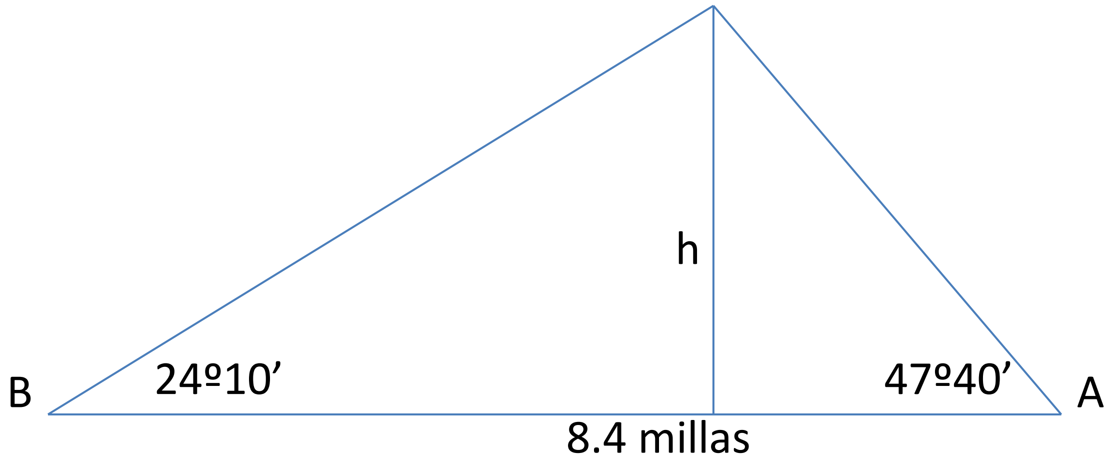
   R. Sucesivamente aplicar la secuencia: Definición de secante / Desarrollar quebrado / Aplicar identidad 1-cos$^2\alpha$=sen$^2\alpha$ / Factorizar sen$^2\alpha$ / Aplicar definición de tangente.

4. Altura de un papalote. Una persona hace volar un papalote a nivel de piso. La cuerda del papalote esta tensa, tiene una longitud de 500 m y hace un ángulo de 60º con el suelo. ¿Cuál es la altura del papalote sobre el nivel del suelo?

   R. $250\sqrt{3}$.

5. [4]Altura de un globo de aire caliente. Los ángulos de elevación de un globo desde los puntos A y B a nivel del suelo son 24º10' y 47º40', respectivamente. Según la figura, los puntos A y B están a 8.4 millas entre si y el globo se encuentra entre ambos puntos, en el mismo plano vertical. Calcula la altura del globo sobre el suelo.

   R. 2.7 millas.



[4] Earl W. Swokowski and Jeffery A. Cole, *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*, problema propuesto, p. 680.