Estática

JOSE EDMUNDO FUENTES GUZMAN

Red Tercer Milenio

ESTÁTICA

ESTÁTICA

JOSE EDMUNDO FUENTES GUZMAN

RED TERCER MILENIO

AVISO LEGAL

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Datos para catalogación bibliográfica

José Edmundo Fuentes Guzmán

Estática

ISBN 978-607-733-039-4

Primera edición: 2012

Revisión editorial: Eduardo Durán Valdivieso

DIRECTORIO

ÍNDICE

INTRODUCCION

La estática se desarrolló muy temprano en la historia de la humanidad porque los principios de ésta fueron formulados a partir de mediciones de geometría y fuerza.

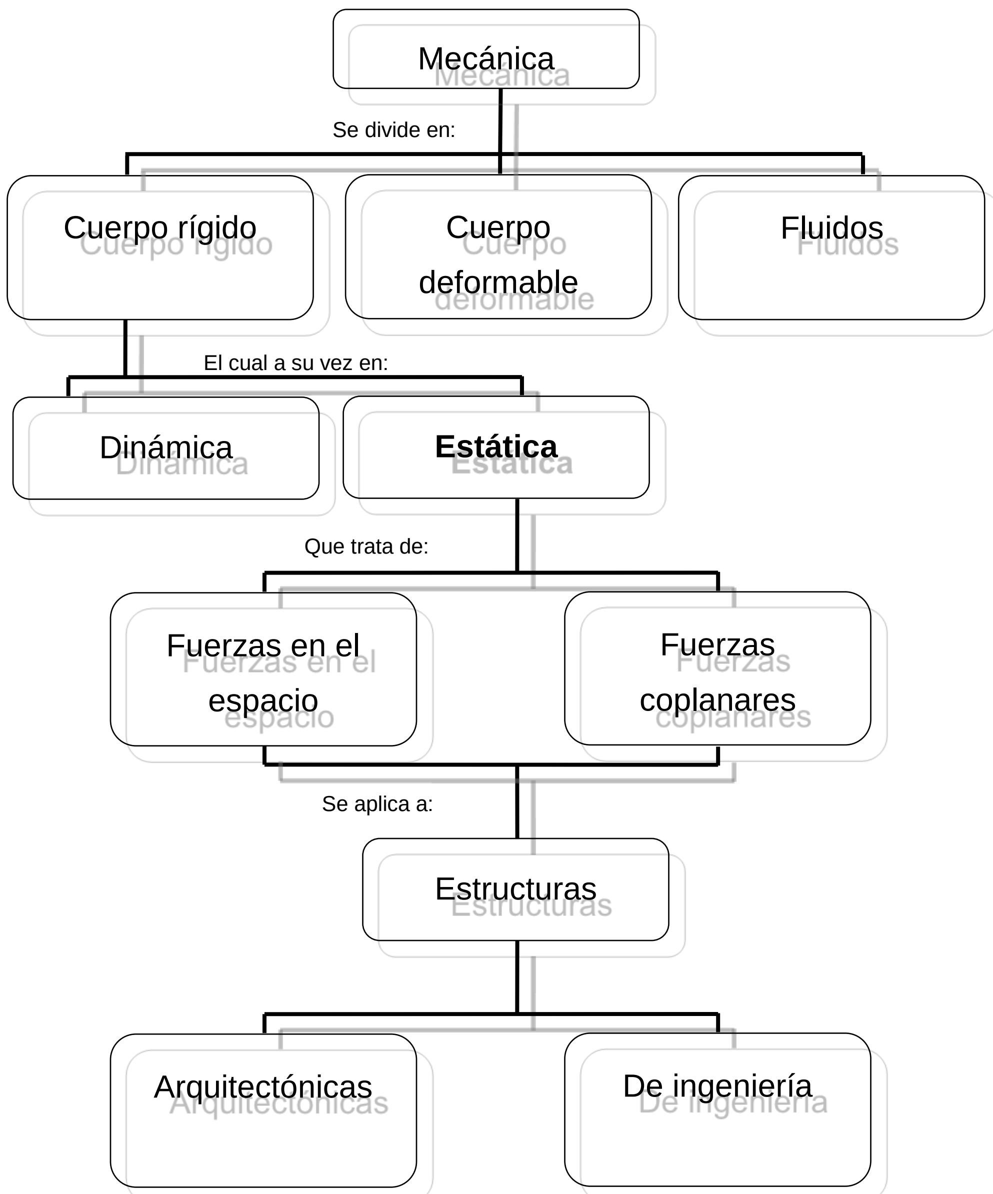
Para estudiar la estática es necesario comprender el significado de los conceptos de longitud, tiempo, masa y fuerza, también llamados cantidades básicas. Al igual que realizar modelos e idealizaciones para simplificar las aplicaciones de la teoría.

Es importante conocer qué es una fuerza y que puede ser representada a través de vectores, así como cargas que actúan sobre un cuerpo. En este caso considerado cuerpo rígido.

Todo el tema de la mecánica del cuerpo rígido está formulado con base en las tres leyes experimentales del movimiento de Newton. Estas leyes se aplican al movimiento de una partícula medido desde un marco de referencia no acelerado.

El alumno aprenderá el efecto que tienen las cargas y fuerzas tanto de tensión como de compresión en elementos integrantes de estructuras, para el diseño estructural realizado en materias que cursarán más adelante.

MAPA CONCEPTUAL



UNIDAD 1

FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA CLÁSICA

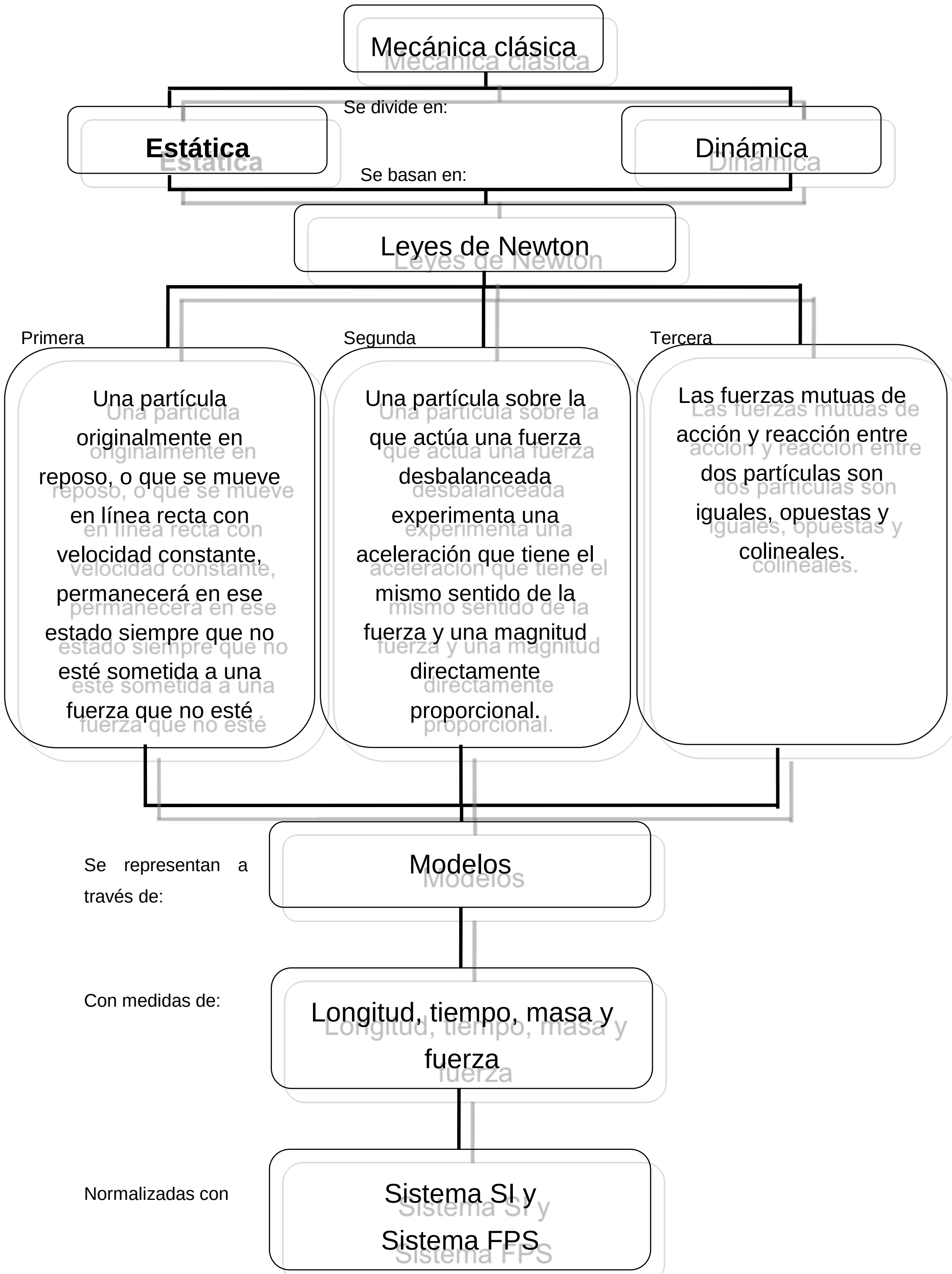
OBJETIVO

Distinguir las partes en que está dividida la mecánica, exponer las tres leyes de Newton y la aplicación que tienen en la vida diaria y convertir entre sistemas de unidades las cuatro cantidades básicas utilizadas en la estática.

TEMARIO

1.1 LA MECÁNICA
1.1.1 LONGITUD, MASA, TIEMPO Y FUERZA
1.1.2. LA MECÁNICA Y SUS PARTES
1.1.3 CANTIDADES BÁSICAS
1.1.4 MODELOS DE CUERPOS
1.2 LAS TRES LEYES DE NEWTON
1.3 LAS DIMENSIONES COMO CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DE LAS CANTIDADES
1.3.1 DEFINICIÓN DE LOS SISTEMAS DE MEDIDAS ABSOLUTAS

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Las Leyes de Newton, también conocidas como Leyes del movimiento transversal de Newton, son principios a partir de los cuales se explican la mayor parte de los problemas planteados por la dinámica y el movimiento de los cuerpos estáticos.[1]

Estas leyes constituyen los cimientos de la física clásica en general. Newton afirmaba que estaban basadas en observaciones y experimentos cuantitativos, la validez de estas fue verificada en casos durante más de dos siglos y medio.

La importancia de las leyes de Newton en la estática es que abarca el estudio del equilibrio tanto del conjunto como de sus partes constituyentes de un cuerpo, incluyendo las porciones elementales de sus materiales.

Para esto es necesario utilizar las unidades cinéticas de longitud, masa, tiempo y fuerza.

[1] Clifford A. Pickover, *De Arquímedes a Hawking*", p. 132.

1.1. La mecánica

La mecánica la podemos definir como aquella ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. La mecánica la podemos dividir en: la mecánica de *cuerpos rígidos*, la *mecánica de los cuerpos deformables* y la *mecánica de fluidos*.

La mecánica es una ciencia física, pero algunas personas la asocian con las matemáticas, mientras que otras la consideran tema de ingeniería. La mecánica es una ciencia aplicada que tiene como propósito explicar y predecir los fenómenos físicos.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Buscar en divulgaciones científicas, los fenómenos de la naturaleza que tiene que ver con la mecánica.

1.1.1. Longitud, masa, tiempo y fuerza

Espacio, tiempo, masa y fuerza son conceptos usados en la mecánica, éstos no pueden ser definidos exactamente, pero debemos aceptarlos con base en experiencia e intuición, y utilizarlos como marco de referencia para el estudio de la mecánica.

La longitud es necesaria para localizar la posición de un punto en el espacio y así describir el tamaño de un sistema físico. Una vez definida su unidad estándar, podemos establecer cuantitativamente distancias y propiedades geométricas de un cuerpo.

El tiempo es necesario para definir un evento, y es concebido como una sucesión de eventos.

La masa es un concepto que compara a los cuerpos en términos de experimentos de la mecánica.

La fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro, que pueden ser a través de contacto directo o a distancia, como el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se define por su punto de aplicación, magnitud y dirección, y utilizamos vectores para representarlas.

1.1.2. La mecánica y sus partes

La mecánica de los cuerpos rígidos se divide en estática y dinámica, tratan acerca del reposo y movimiento de los cuerpos. En el estudio de la mecánica, se supone que los cuerpos son perfectamente rígidos. Aunque las estructuras nunca son completamente rígidas y se deforman bajo la acción de las cargas, tales deformaciones son pequeñas y no afectan de manera apreciable las condiciones de equilibrio o de movimiento.

La estática analiza las cargas en un sistema físico en equilibrio estático, esto quiere decir que las posiciones relativas de los subsistemas no varían con el tiempo.

La dinámica describe la evolución en el tiempo de un sistema físico en relación con las causas que provocan cambios y movimientos.[2]

1.1.3. Cantidades básicas

La longitud, tiempo, masa y fuerza son cantidades básicas fundamentales para el estudio de la mecánica y las partes que la componen.

La longitud, representada por la letra L, no puede ser definida en términos de otras magnitudes que se pueden medir. Según Albert Einstein, la longitud no es propiedad intrínseca de algún objeto, dos observadores podrían medir el mismo objeto y obtener resultados diferentes.

El tiempo, representado por la letra s, esta magnitud, permite ordenar los acontecimientos en secuencias y da lugar al principio de causalidad[3] que es un axioma del método científico.

La masa, en la física, es la medida de la inercia. El término proviene de dos leyes de Newton, la de gravitación universal y la segunda ley. Por lo tanto, la masa gravitatoria es una propiedad de la materia en virtud de la cual dos

[3] Describe la relación entre causa y efecto. Pierre-Simon Laplace afirmaba que si se conoce el estado actual del mundo con total precisión se puede predecir cualquier evento futuro.

cuerpos se atraen, y la fuerza aplicada sobre un cuerpo es directamente proporcional a la aceleración que experimenta, denominándose a la constante de proporcionalidad a la *masa inercial* de un cuerpo.

Fuerza, es toda causa, agente capaz de modificar la cantidad de movimiento o la forma de los cuerpos materiales. Este concepto fue concebido originalmente por Arquímedes en términos estáticos, él creía que el estado natural de los objetos era el reposo y que los cuerpos tendían a ese estado si no se actuaba sobre de ellos de modo alguno.

Por su parte, Galileo Galilei dio una definición dinámica de fuerza estableciendo la ley de inercia, pero fue Newton quien formuló matemáticamente la moderna definición de fuerza.

1.1.4. Modelos de cuerpos

Los modelos o idealizaciones que se ocupan para el estudio del equilibrio, tienen el propósito de simplificar lo que ocurre físicamente para utilizar la teoría, para lo cual, en la mecánica se hace uso los siguientes modelos:

Partícula, ésta posee masa pero es insignificante. Cuando un cuerpo se idealiza como una partícula, los principios ocupados en la mecánica se simplifican de una mejor manera, pues la geometría del cuerpo en estudio, no se toma en cuenta para su análisis correspondiente.

Cuerpo rígido, es considerado como un conjunto formado por un gran número de partículas que permanecen separadas entre sí aun aplicándose una carga, gracias a esta idealización, las propiedades del material del que está constituido el cuerpo en estudio no es considerado al momento de estar realizando el análisis.

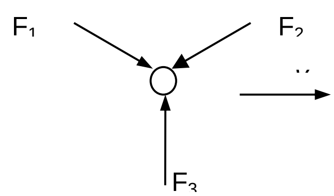
Fuerza concentrada, tiene la representación del efecto de una carga sobre algún punto de un cuerpo en estudio. Debe tenerse en consideración que el área sobre la cual se aplica esta fuerza es relativamente pequeña en relación con el resto del cuerpo en análisis.

1.2. Las tres leyes de Newton

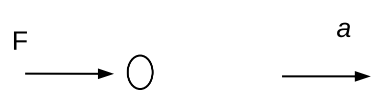
La mecánica del cuerpo rígido está formulada con base en las leyes de movimiento de Newton, cuya validez se basa en la observación experimental.

Las tres leyes de Sir Issac Newton (1642-1727) al final del siglo XVII, son principios fundamentales para el estudio de la mecánica. Y podemos enunciarlas de la siguiente manera:

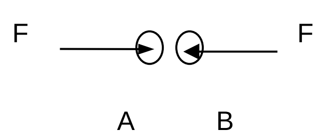
Primera ley. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en una línea recta (si originalmente estaba en movimiento)



Segunda ley. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la misma dirección que está última.



Tercera ley. Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos.



ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Buscar en divulgaciones científicas las aplicaciones de las tres leyes de Newton en la actualidad.

1.3. LAS DIMENSIONES COMO CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DE LAS CANTIDADES

Las cuatro cantidades básicas (fuerza, masa, longitud y tiempo) no son independientes una de la otra. Están relacionadas por la segunda ley del movimiento de Newton F=ma. Debido a esto, no todas las unidades usadas para medir tales cantidades pueden seleccionarse arbitrariamente. La igualdad F=ma se mantiene sólo si tres de las cuatro unidades básicas son definidas arbitrariamente y la cuarta unidad se deriva entonces a partir de la ecuación.

1.3.1. Definición de los sistemas de medidas absolutas

El sistema internacional de unidades, abreviado SI a partir del término francés "Systeme International d´ Unités", es una versión moderna del sistema métrico que ha recibido reconocimiento mundial.

El SI especifica la longitud en metros (m), el tiempo en (s) y la masa en kilogramos (kg). La unidad de fuerza, llamada newton (N), se deriva de F=ma.

Entonces un newton equivale a una fuerza requerida para dar a un kilogramo de masa una aceleración de un m/s^2 ($N = kg*m/s^2$).

Si el peso de un cuerpo va a ser determinado en newtons, entonces para cálculos se usará el valor de g=9.81m/s.

$$W = mg \qquad (g=9.81m/s)$$

Por lo tanto, un cuerpo de masa de 1 kg tiene un peso de 9.81 N.

Unidades comunes en Estados Unidos

En el sistema de unidades empleado comúnmente en Estados Unidos (FPS), la longitud se mide en pies (ft), la fuerza en libras (lb) y el tiempo en segundos (s).

La unidad de masa, llamada slug, es derivada de F=ma. Por tanto, 1 slug es igual a la cantidad de materia que es acelerada a 1 pie/s^2 cuando actúa sobre ella una fuerza de 1 lb (slug = lb * s^2/pies).

Así un cuerpo que pesa 32.2 lb tiene una masa de 1 slug, un cuerpo de 50 lb tiene una masa de 1.55 slugs.

Tabla. Comparación de sistemas de unidades.

Nombre	Longitud	Tiempo	Masa	Fuerza
Sistema internacional de unidades SI	metro (m)	segundo (s)	Kilogramo (kg)	Newton (N = $\frac{\mathrm{kg}*\mathrm{m}}{\mathrm{s2}}$)
Sistema de unidades comunes en Estados Unidos (FPS)	pie (ft)	segundo (s)	Slug ($\frac{lb*s2}{ft}$)	Libra (lb)

Conversión de unidades

La tabla siguiente proporciona factores de conversión directa entre unidades SI y FPS para las cantidades básicas.

Tabla. Conversión de unidades.

Cantidad	Unidad de medición (FPS)	Unidad de medición (SI)
Fuerza	1 Lb	4.4822 N
Masa	1 Slug	14.5968 kg

Longitud	1 ft	0.3048 m

El sistema internacional de unidades se piensa llegará ser el estándar mundial de medidas. Por lo tanto, las reglas para su uso y la terminología utilizadas en mecánica se presentan a continuación.

Prefijos. Cundo una cantidad numérica es muy grande o muy pequeña, las unidades usadas para definir su tamaño pueden ser modificadas mediante un prefijo. Algunos de los prefijos usados en el SI son:

Tabla. Prefijos.

	Forma exponencial	Prefijo	Símbolo SI
Múltiplo			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	K
Submúltiplo			
0.001	10^{-3}	mili	M
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	N

Reglas para su uso

Un símbolo nunca se describe con una “s” de plural, ya que puede ser confundido con la unidad de segundo (s).

Los símbolos se escriben siempre en letras minúsculas, con las siguientes excepciones: los símbolos para los prefijos giga y mega, se escriben como G y M; los símbolos denominados con nombre propio también, por ejemplo, N (Newton).

Las cantidades definidas por varias unidades que son múltiplos de otra unidad deben ir separadas por un punto para evitar confusión.

La potencia exponencial representada para una unidad con un prefijo se refiere tanto a la unidad como a su prefijo. Ejemplo $\mu N^2 = (\mu N)^2$

Las constantes físicas o número que tengan varios dígitos en cualquier lado del punto decimal deben ser reportados con un espacio entre cada tres dígitos en vez de coma. Además trate siempre de usar decimales y evitar fracciones.

Al efectuar cálculos, represente los números en términos de sus unidades básicas o derivadas convirtiendo todos los prefijos a potencias de 10.

Los prefijos compuestos no deben usarse.

Con la excepción de la unidad básica de kilogramo, evite el uso de un prefijo en el denominador de unidades compuestas.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Realizar una serie de ejercicios para convertir longitudes de metros a pies, masa de kilogramo a slug y fuerzas de Newton a libras, y viceversa.

AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: Subraya el inciso que contenga la respuesta correcta.

1. La mecánica la podemos definir como aquella ciencia que describe y predice las condiciones de _______________ de los cuerpos bajo la acción de fuerzas.

a) Reposo   *b)* Movimiento   *c)* Reposo y movimiento

Instrucciones: Coloca dentro del paréntesis la letra que le corresponda.

2. Es necesaria para localizar la posición de un punto en el espacio y así describir el tamaño del un sistema físico. Una vez definida su unidad estándar, podemos establecer cuantitativamente distancias y propiedades geométricas de un cuerpo. ( )
3. Es necesario para definir un evento y es concebido como una sucesión de eventos. ( )
4. Es un concepto que compara a los cuerpos en términos de experimentos de la mecánica. ( )
5. Representa la acción de un cuerpo sobre otro, que pueden ser a través de contacto directo o a distancia, como el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se define por su punto de aplicación, magnitud y dirección, y utilizamos vectores para representarlas. ( )
6. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en una línea recta (si originalmente estaba en movimiento. ( )
7. Las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de

a) Fuerza

b) Masa

c) Longitud

d) Tiempo

e) Segunda ley de Newton

f) Primera ley de Newton

acción y sentidos opuestos. (   )

8. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la misma dirección que está última. (   )

g) Tercera Ley de Newton

Instrucciones: Subraya el inciso que contiene la respuesta correcta de la conversión de unidades.

9. Si se especifica la longitud en metros (m), el tiempo en (s), la masa en kilogramos (kg) y la fuerza en Newtons(N), estamos hablando de:

a) Sistema Internacional de Unidades *b)* Unidades comunes en Estados Unidos *c)* Sistema métrico decimal

10. Si se especifica la longitud se en pies (ft), la fuerza en libras (lb) y el tiempo en segundos (s), estamos hablando de:

a) Sistema Internacional de Unidades *b)* Unidades comunes en Estados Unidos *c)* Sistema métrico decimal

Instrucciones: Relaciona coloca dentro del paréntesis la letra que le corresponda.

11. Si convertimos 100 metros a pies tenemos:

a) 32.81 ft *b*) 328.08 ft *c*) 318.08 ft *d*) 3180.80 ft

12. Si convertimos 230 pies a metros:

a) 7.51 m *b*) 75.10 m *c*) 70.10 m *d*) 7.01 m

13. Si convertimos 200 kilogramos del SI a slugs tenemos:

a) 13.70 slug *b*) 137.00 slug *c*) 1.37 slug *d*) 173.13 slug

14. Si convertimos 30 slugs a kilogramos en el SI tenemos:

a) 437.90 kg *b*) 43.79 kg *c*) 337.90 kg *d*) 33.79 kg

15. Si convertimos 55 Newtons a libras tenemos:

a) 1.45 lb *b*) 14.47 lb *c*) 1.22 lb *d*) 12.27 lb

16.- Si convertimos 90 libras a Newtons tenemos:

a) 403.40 N *b*) 40.34 N *c*) 405.70 N *d*) 40.57 N

Respuestas

1. c 2. c 3. d 4. b 5. a 6. b 7. a 8. c 9. a 10. b
11. b 12. c 13. a 14. a 15. d 16. a

UNIDAD 2

SISTEMAS DE FUERZAS COPLANARES

OBJETIVO

La interpretación y la aplicación del efecto de fuerzas que actúan sobre una partícula que puede ser reemplazada por una sola fuerza, la cual tiene el mismo efecto sobre la partícula dada. De la misma forma la aplicación del tema del efecto que una fuerza tiene sobre una partícula que puede ser descompuesta en fuerzas que producen el mismo efecto sobre la partícula.

TEMARIO

2.1 COMPOSICIÓN Y RESOLUCIÓN DE LAS FUERZAS QUE ACTÚAN EN EL PLANO. LEY DEL PARALELOGRAMO

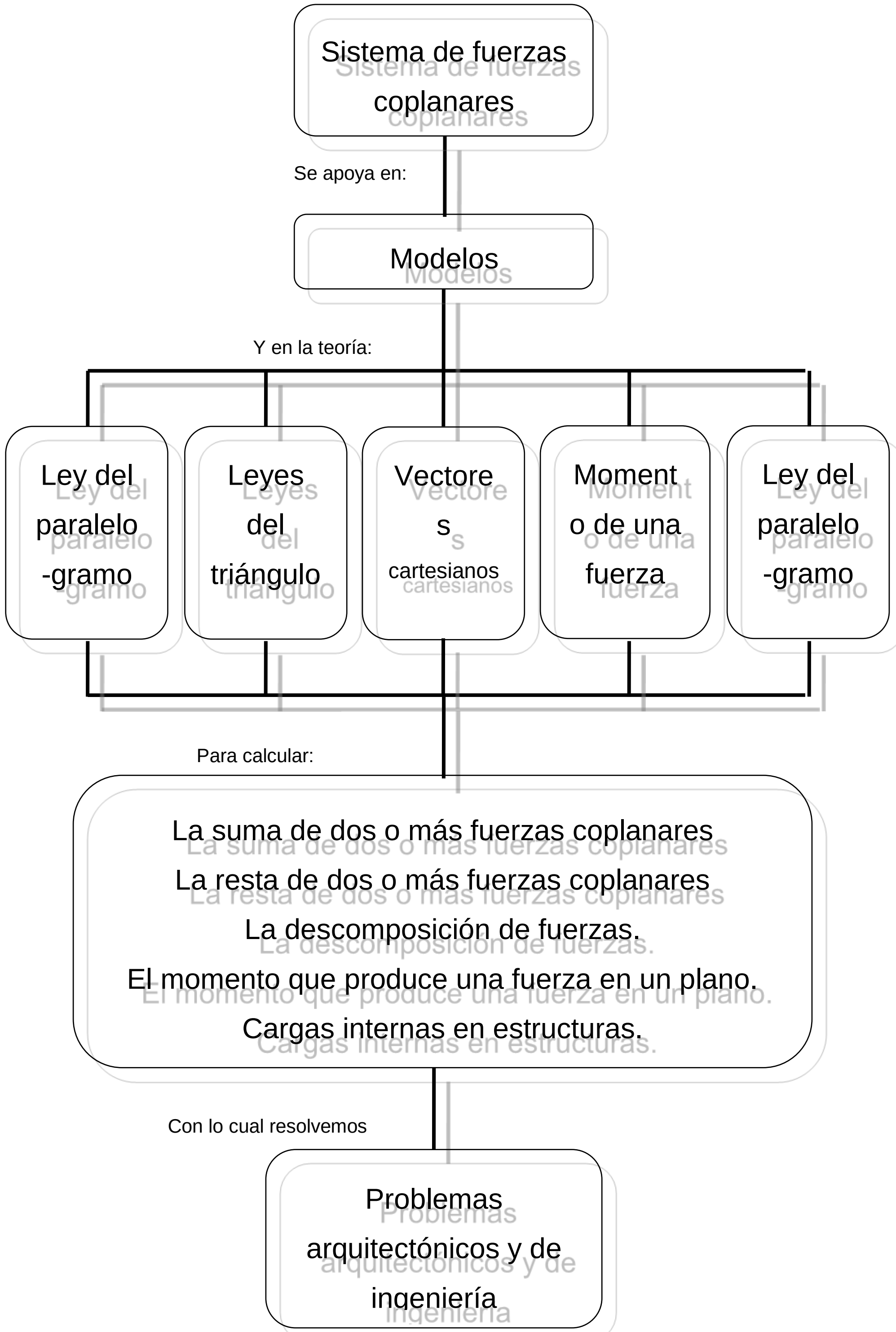
2.2 LEYES DEL TRIÁNGULO

2.3 VECTORES CARTESIANOS

2.4 MOMENTOS DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO, FUERZA NULA. MOMENTO ESCALAR. MOMENTO VECTORIAL

2.5 FUERZAS INTERNAS EN ESTRUCTURAS LAS TRES LEYES DE NEWTON

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se aborda el efecto que se origina cuando dos o más fuerzas actúan sobre una partícula, para explicar esto, se deben reemplazar dos o más fuerzas, que están actuando sobre una partícula dada, por una sola fuerza que tiene el mismo efecto sobre la partícula que el que producen las fuerzas originales.

Aunque se utiliza el término partícula, esto significa que el tamaño y la forma de cuerpo bajo consideración no afectarán significativamente, a la solución de los problemas y entonces se supondrá que todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dado están aplicadas en el mismo punto.

Esta unidad de estudio está dedicada a fuerzas contenidas en un solo plano, como tales suposiciones cumplen con muchas aplicaciones prácticas se podrá resolver muchos problemas ingenieriles.

2.1. Composición y resolución de fuerzas que actúan sobre un mismo plano, ley del paralelogramo

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y, generalmente está caracterizada por su punto de aplicación, su magnitud y su dirección, como las fuerzas que actúan sobre una partícula dada tienen el mismo punto de aplicación, entonces en esta parte del libro las fuerzas estarán completamente definidas por su magnitud y dirección.

Según Ferdinand P. Beer[4], las fuerzas no obedecen las reglas para sumas definidas por el álgebra o la aritmética. Y las fuerzas no son las únicas cantidades que obedecen la ley del paralelogramo.

Los desplazamientos, las velocidades, las aceleraciones y los momentos constituyen cantidades físicas que poseen magnitud y dirección, y que se suman con la ley del paralelogramo; estas cantidades pueden ser representadas por medio de vectores que se definen como expresiones matemáticas que poseen magnitud y dirección, las cuales se suman de acuerdo con la ley de paralelogramo.

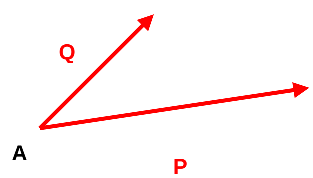


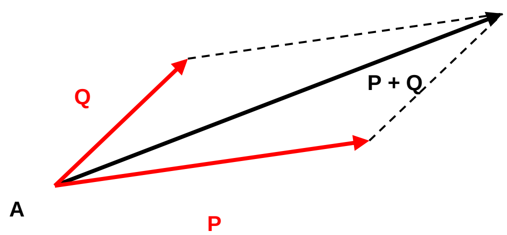
Fig. Vectores P y Q.

Un vector utilizado para representar una fuerza sobre una partícula dada tiene un punto de aplicación bien definido, se dice que éste es un vector llamado fijo, pues si se mueve modifica las condiciones del problema. Existen además vectores que se pueden mover libremente en el espacio, a éstos se les llama vectores libre. Y los vectores que pueden ser movidos o deslizados a lo largo de sus líneas de acción se les conocen como vectores deslizantes.

Los vectores que tiene la misma magnitud y dirección son iguales, aun si tienen o no el mismo punto de aplicación y se les nombra con la misma letra.

[4] Ferdinand P. Beer et al, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 16.

Por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo[5]. De tal manera que la suma de los vectores P y Q se puede obtener fijando los dos vectores a un mismo punto y construyendo un paralelogramo en el cual se ocupan a los vectores P y Q como sus lados. La diagonal que pasa dentro del paralelogramo representa la suma de los vectores y se denota por P + Q.



ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

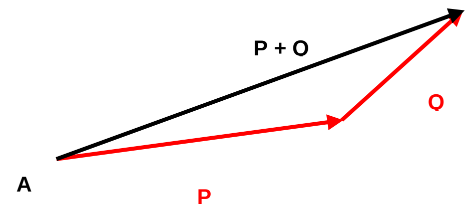
1. Entregar un reporte por escrito de una serie de ejercicios donde se represente la suma de vectores.

2.2. LEYES DEL TRIÁNGULO

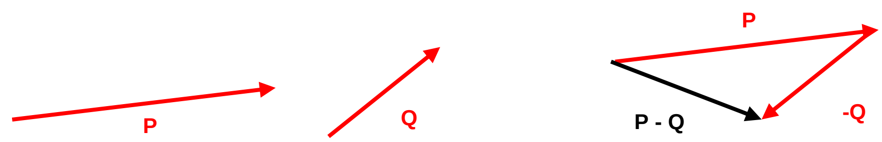
A partir de la ley del paralelogramo se ha determinado un método alternativo para la suma de dos vectores. A este método se le conoce como la ley del triángulo y consiste en dibujar únicamente la mitad del paralelogramo de

[5] R. C. Hibbeler, "*Ingeniería Mecánica Estática*", p. 20.

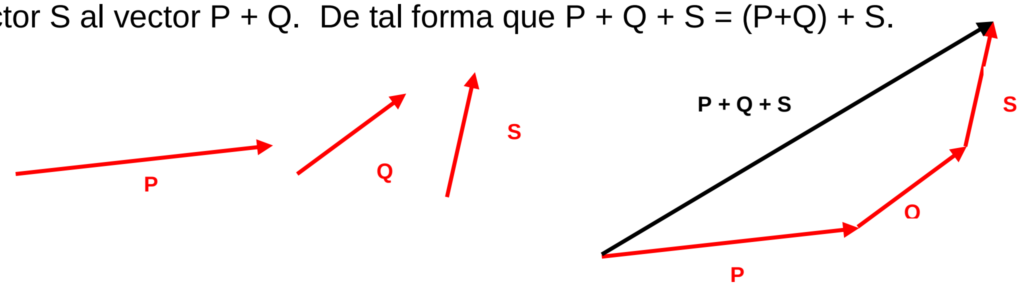
manera que la parte inicial de Q se una a la parte terminal de P para obtener el vector resultante P + Q uniendo la parte inicial de P con la parte terminal de Q.



La resta de un vector es definida como la suma del vector negativo. Por lo tanto, el vector P - Q se obtiene sumando a P el vector negativo llamado -Q.



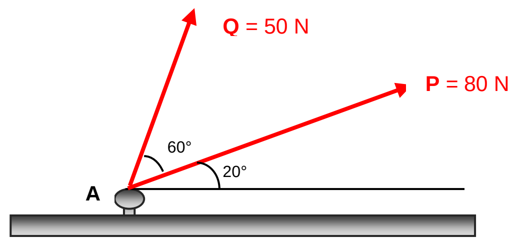
Al momento de sumar tres o más vectores, por ejemplo P, Q, y S se puede obtener sumando primero los vectores P y Q para después sumarle el vector S al vector P + Q. De tal forma que P + Q + S = (P+Q) + S.



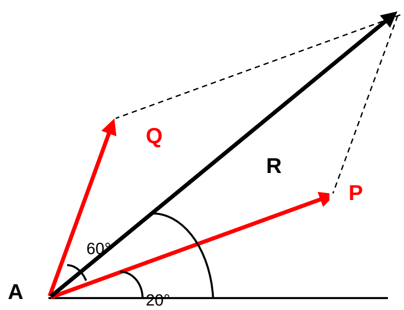
Los vectores que están contenidos en el mismo plano se dicen que son coplanares, la suma de estos puede ser obtenida de manera gráfica, aplicando repetidamente la regla del triángulo para la suma de P + Q + S, organizando los vectores de tal forma que la parte inicial de uno se una a la parte terminal de otro y finalmente cerrar la parte inicial del primer vector con la parte terminal del último vector. Esto es llamado también la regla del polígono para la suma de vectores.

Si consideramos una partícula A sobre cual actúan varias fuerzas contenidas en el mismo plano. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre el punto A pueden ser sumados por la regla del polígono que es equivalente a aplicar repetidamente la ley del triángulo, el vector R es el resultante y representa las fuerzas que actúan sobre el punto A.

Ejemplo 2.2.1 Las dos fuerzas P y Q actúan sobre un perno, según las condiciones de la figura mostrada. Determinar la resultante.



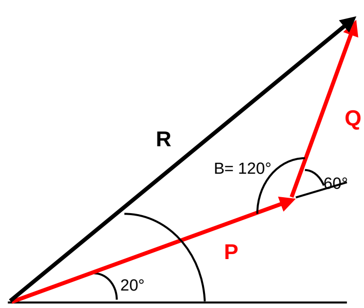
Solución gráfica. Se dibuja un paralelogramo con lados iguales P y Q y se miden su magnitud y dirección de la resultante, encontrando:



α = 42°

R= 112 N

Solución trigonométrica. Se usa la ley del triángulo; se conocen dos de sus lados y el ángulo de la resultante. Aplicando la ley de los cosenos se obtiene:



$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$

$R^2 = (80)^2 + (50)^2 - (2)(80)(50)\cos(120°)$

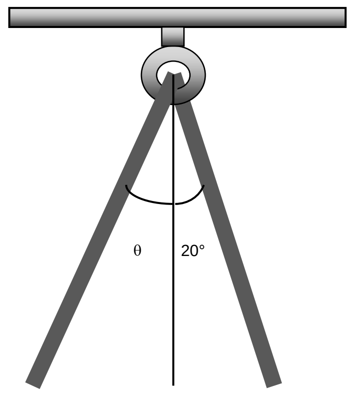
R= 113.58 N

Aplicando la ley de senos se obtiene

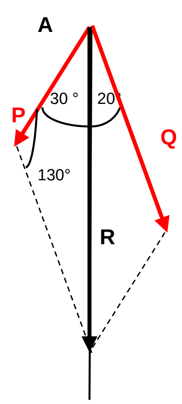
$$\frac{sen\,A}{Q} = \frac{sen\,B}{R} \quad sen\,A = \frac{(sen\,B)(Q)}{R} = \frac{(sen\,120°)(50N)}{113.58N}$$

A = 22.33° entonces α = 20° + 22.33° = 42.33°

Ejemplo 2.2.2, aquí, el anillo de la figura se encuentra sometido a dos fuerzas P y Q. Si se necesita que la fuerza resultante de P + Q posea una magnitud de 1 kN y esté dirigida de manera vertical hacia abajo, hay que calcular las magnitudes de los vectores P y Q si $\theta = 30°$



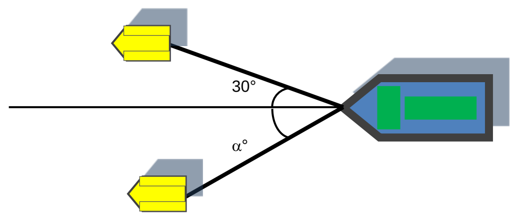
Solución. En la figura se tiene un croquis de la suma vectorial según la ley del paralelogramo. A partir de este paralelogramo, formado por los vectores, las magnitudes desconocidas P y Q se determinan usando la ley de los senos:



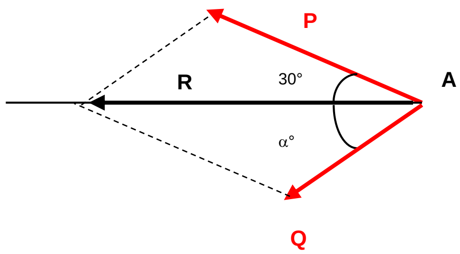
$$\frac{Q}{sen\ 30°} = \frac{1000\ N}{sen\ 130°} \quad Q = \frac{(1000N)(sen\ 30°)}{sen\ 130°} = 652.70\ N$$

$$\frac{P}{sen\ 20°} = \frac{1000\ N}{sen\ 130°} \quad P = \frac{(1000N)(sen\ 20°)}{sen\ 130°} = 446.48\ N$$

Ejemplo 2.2.3 Un barco está siendo arrastrado por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas producida los dos remolcadores es un fuerza de 6000 N que está dirigida a lo largo del eje del barco, determinar: *a)* la tensión en cada una de las cuerdas sabiendo que α= 45° y *b)* el valor de α para el cual la tensión en la cuerda es 2 es mínima.



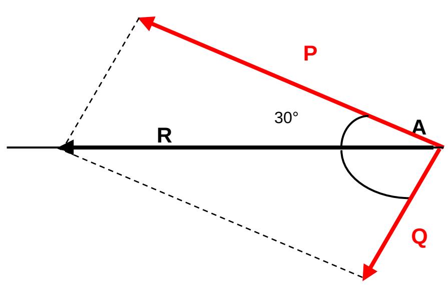
Solución al inciso *a)* Utilizamos la regla del triángulo, este triángulo representa la mitad del paralelogramo y utilizando la ley de los senos, tenemos:



$$\frac{Q}{sen\ 30°} = \frac{6000\ N}{sen\ 105°} \quad Q = \frac{(6000N)(sen\ 30°)}{sen\ 105°} = 3105.83\ N$$

$$\frac{P}{sen\ 45°} = \frac{6000\ N}{sen\ 105°} \quad P = \frac{(6000N)(sen\ 45°)}{sen\ 105°} = 4392.30\ N$$

Solución al inciso *b)* Para determinar el valor de α para el cual la tensión en la cuerda del vector Q es mínima, utilizamos de igual manera la regla del triángulo. El valor mínimo de Q ocurre cuando el vector P y el vector Q son perpendiculares, es decir forman una ángulo recto. Por lo tanto el valor mínimo para Q y P es:

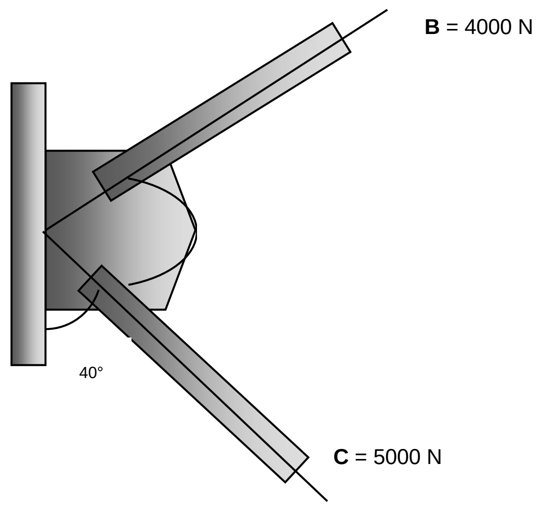


$$\frac{Q}{sen\ 30°} = \frac{6000\ N}{sen\ 90°} \quad Q = \frac{(6000N)(sen\ 30°)}{sen\ 90°} = 3000.00\ N$$

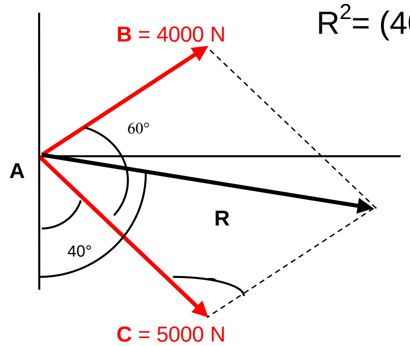
α = 60° debido a que 30° + 60° = ángulo recto

$$\frac{P}{sen\ 60°} = \frac{6000\ N}{sen\ 90°} \quad P = \frac{(6000N)(sen\ 45°)}{sen\ 105°} = 5196.15\ N$$

Ejemplo 2.2.4, una placa está sometida a dos fuerzas B y C, como se muestra en la figura. Si α = 60°. Determine la magnitud de la resultante de esas dos fuerzas y su dirección medida desde la horizontal.



Solución. Utilizamos la regla del triángulo, ya que éste representa la mitad del paralelogramo y utilizando la ley de los senos, tenemos:



$$R^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos D$$

$$R^2 = (4000)^2 + (5000)^2 - (2)(4000)(5000)\cos(120°)$$

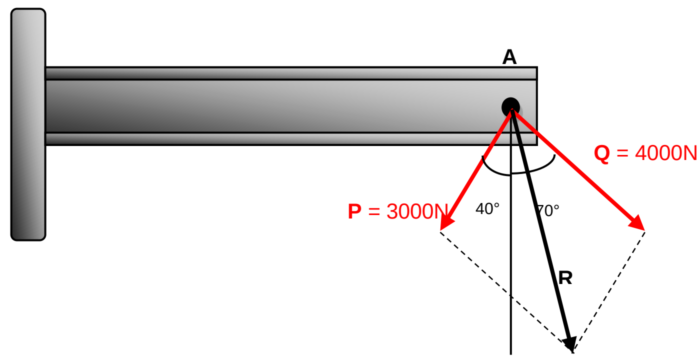
$$R = 7810.25 \text{ N}$$

Aplicando la ley de senos se obtiene

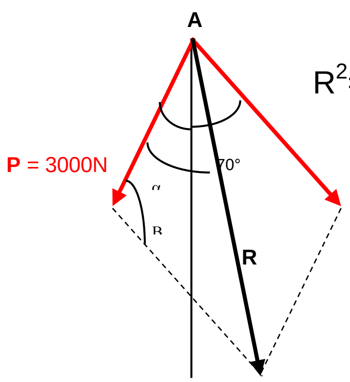
$$\frac{sen\ A}{B} = \frac{sen\ D}{R} \qquad sen\ A = \frac{(sen\ D)(B)}{R} = \frac{(sen\ 120°)(4000N)}{7810.25\ N}$$

A = 26.10° entonces α = 40° + 26.10° = 66.10°

Ejemplo 2.2.5, dos fuerzas se aplican en el punto A de la viga. Determinar la magnitud y dirección de la resultante.



Solución. Utilizando la regla del triángulo que representa la mitad del paralelogramo y utilizando la ley de los senos, tenemos que:



$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$

$$R^2 = (3000)^2 + (4000)^2 - (2)(3000)(4000)\cos(110°)$$

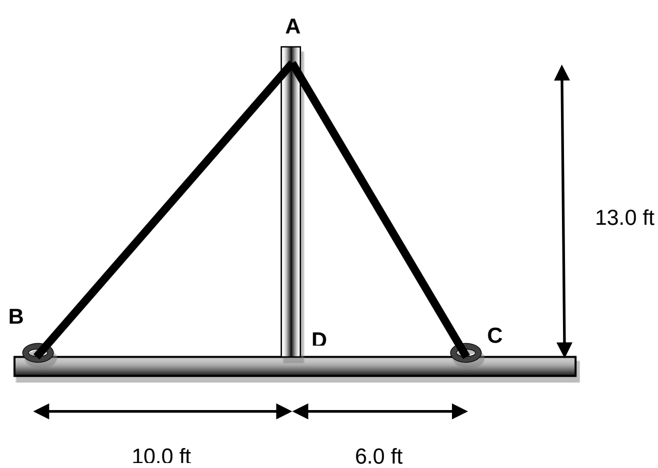
$$R = 5762.68\ \mathrm{N}$$

Aplicando la ley de senos obtenemos

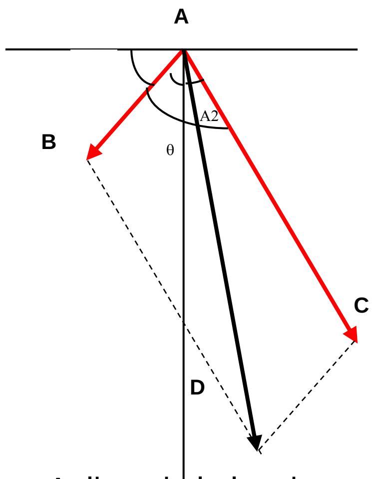
$$\frac{sen\ a}{Q} = \frac{sen\ B}{R} \qquad sen\ a = \frac{(sen\ B)(Q)}{R} = \frac{(sen\ 110°)(4000N)}{5762.68\ N}$$

$\alpha = 40.54°$

Ejemplo 2.2.6, los tirantes de cable AB y AC sostienen al poste AD. Conociendo las tensiones en los cables AB=2000 y AC=5000. Determinar la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas obtenidas.



Solución. Se puede utilizar la regla del triángulo, este representa la mitad del paralelogramo y utilizando la ley de los senos, tenemos que:



$\tan A_1 = \frac{10\,ft}{13\,ft}$ ∴ $A_1 = 37.57°$

$\tan A_2 = \frac{6\,ft}{13\,ft}$ ∴ $A_2 = 24.78°$

$\alpha = 90° - A1$

$\alpha = 52.43°$

$\theta = 37.57° + 24.78° = 62.34°$

$R^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2(AB)(AC)\cos B$

$R^2 = (2000)^2 + (5000)^2 - (2)(2000)(5000)\cos(117.66°)$

$R = 6187.45\ N$

Aplicando la ley de senos se obtiene

$$\frac{sen\,A}{AC} = \frac{sen\,B}{R} \qquad sen\,A = \frac{(sen\,B)(AC)}{R} = \frac{(sen\,117.66°)(5000N)}{6187.45N}$$

Desde la horizontal

$A = 46.05°$ entonces $\alpha + 46.05° = 98.48°$

Descomposición de una fuerza

Dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser reemplazadas por una sola fuerza que tiene el mismo efecto sobre tal partícula. De manera contraria, una fuerza F que está actuando sobre una partícula puede ser reemplazada por dos o más fuerzas que tienen el mismo efecto que F,[6] a estas fuerzas se les conocen como componentes de la fuerza F y al proceso de sustituirlas en lugar de la fuerza F, se le llama descomposición de la fuerza F en componentes.

De tal manera que para cada fuerza F existe un número infinito de posibles componentes. De lo cual se desprenden dos casos:

[6] Ferdinand P. Beer et al, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 21.

El primero es que una de las componentes llamada P es conocida. Por tanto, la segunda componente es obtenida aplicando la regla del triángulo y uniendo la parte terminal de P con la parte terminal de F; la magnitud y dirección de Q se puede determinar de manera gráfica o por trigonometría. Una vez que se determina el vector Q se aplica en A.

Al segundo caso se le conoce como la línea de acción de cada componente. Por lo tanto la magnitud y el sentido de las componentes P y Q se obtiene aplicando la ley del paralelogramo y dibujando líneas que pasan por la parte terminal de F y que son paralelas a la línea de acción que fueron especificadas. Estas componentes P y Q se pueden determinar de manera gráfica o por trigonometría mediante la aplicación de la ley de senos.

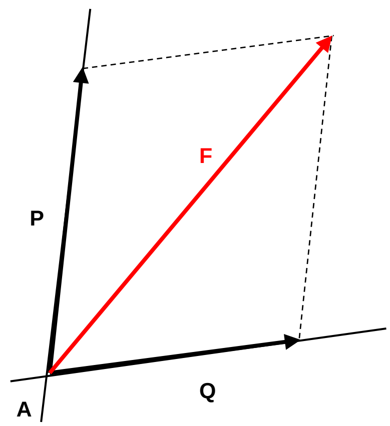


Fig. Descomposición de la fuerza F en un posible par de vectores P y Q

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Resolver y entregar un reporte, los ejercicios del libro de Ferdinand P. Beer 2.5, 2.7, 2.9, 2.11 y 2.13.

2.3. VECTORES CARTESIANOS

Existen casos donde es deseable fraccionar una fuerza en dos componentes perpendiculares entre sí. La fuerza F es posible descomponerla en una componente llamada F_x a lo largo del eje *x* y en una componente llamada F_y a lo largo del eje *y*. La figura que se dibuja para obtener las dos componentes F_x y F_y es un rectángulo y por lo tanto F_x y F_y reciben el nombre de componentes rectangulares o también vectores cartesianos.

Los ejes *x* y *y* se seleccionan generalmente en forma horizontal y vertical de manera acorde al plano de René Descartes. Al determinar las componentes rectangulares de una fuerza se deben visualizar como perpendiculares a estos ejes.

Al momento de presentar dos vectores de magnitud unitaria, dirigidos a lo largo de las direcciones positivas de los ejes *x* y *y*. Estos vectores se denominan vectores unitarios y se denotan como i y j respectivamente. Como el producto de un escalar y un vector, podemos definirlo como las componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza F multiplicada por los vectores unitarios i y j,[7] entonces podemos escribir:

$$\mathrm{F}_x = F_x\mathrm{i} \qquad \mathrm{F}_y = F_y\mathrm{j}$$

$$\text{Entonces} \qquad \mathrm{F} = F_x\mathrm{i} + F_y\mathrm{j}$$

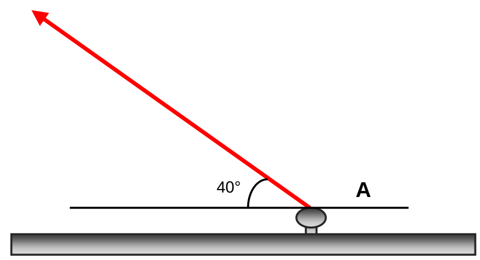
Mientras que los escalares F_x y F_y pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de los vectores F_x y F_y, sus valores absolutos son iguales a las magnitudes de la fuerzas componentes F_x y F_y. Los escalares F_x y F_y se conocen como las componentes escalares de la fuerza F, mientras que se debe hacer referencia a la fuerza componentes F_x y F_y como las componentes vectoriales de la fuerza F.

Denotando por *F* a la magnitud de la fuerza F y por θ al ángulo entre F y el eje de las *x*, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, a partir de la dirección positiva del eje de las *x*, se puede expresar los componentes escalares de F como de esta manera:

[7] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 27.

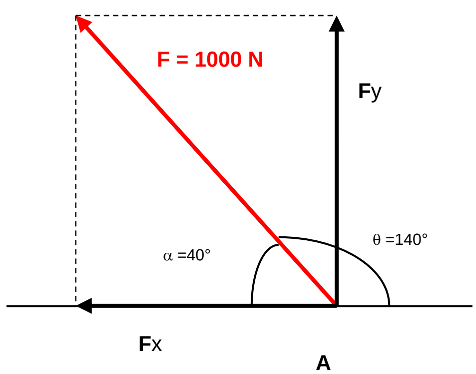
$$F_x = F \cos \theta \qquad F_y = F \text{ sen } \theta.$$

Ejemplo 2.3.1, una fuerza de 1000 N está actuando sobre un perno A. Determinar el valor de las componentes horizontal y vertical de la fuerza.



Solución. Obteniendo los componentes escalares.

Con el fin de obtener los signos correctos para las componentes escalares F_x y F_y, el valor de 180°-40°= 140° debe ser sustituido por θ. Sin embargo, se puede determinar por inspección los signos de F_x y F_y, entonces utilizamos funciones trigonométricas y tenemos:



F_x = - F cos α = - (1000 N) cos 40° = -766 N

F_y = F sen α = + (1000 N) seno 40° = 642.8 N

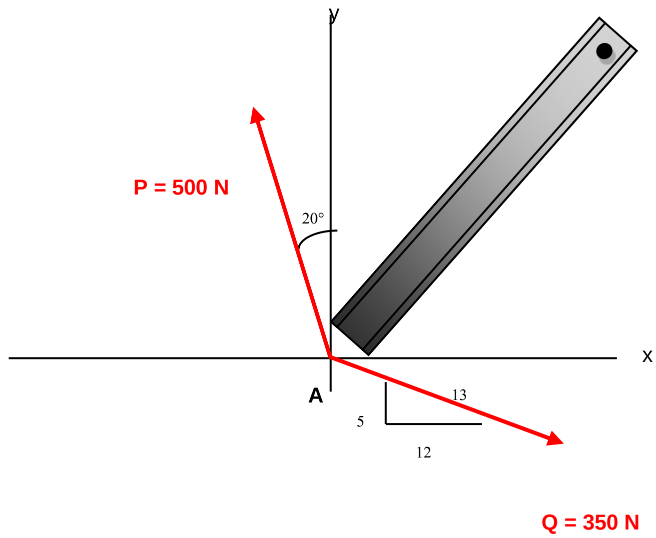
De esta forma los componentes vectoriales buscados son:

F_x = -(766 N)i $\qquad$ F_y = +(648.8 N)j

Y el vector F lo podemos escribir como:

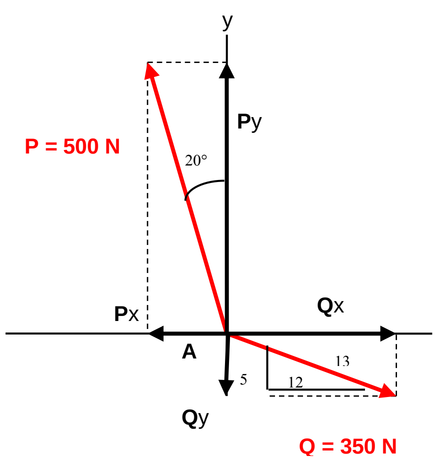
F = -(766 N)i + (648.8 N)j

Ejemplo 2.3.2 Dos fuerzas están actuando sobre una barra. Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza actuante.



Solución. Obteniendo los componentes escalares de las fuerzas.

Determinaremos por inspección los signos de los vectores cartesianos P_x, P_y y Q_x, Q_y, entonces utilizamos funciones trigonométricas y tendremos:



P_x = - P cos $(90°–20°)$

=- (500 N) cos 70°= -171 N

P_y = P sen $(90°–20°)$

= + (500 N) sen 70° =469.8 N

Q_x = Q cos α = + (350 N) (12/13) = 323.1 N

Q_y = -Q sen α = - (350 N) (5/13) = -134.6 N

De esta forma los componentes vectoriales obtenidos son:

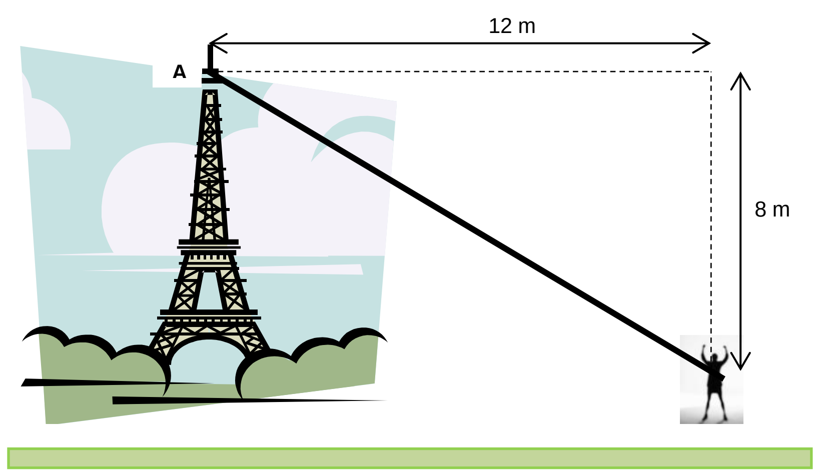
P_x = -(171.0 N)i $\qquad$ P_y = +(469.8 N)j

Q_x = +(323.1 N)i $\qquad$ Q_y = -(134.6 N)j

Y los vectores P y Q se pueden escribir de la manera siguiente:

P = -(171.0 N)i + (469.8 N)j $\qquad$ Q = +(323.1 N)i - (134.6 N)j

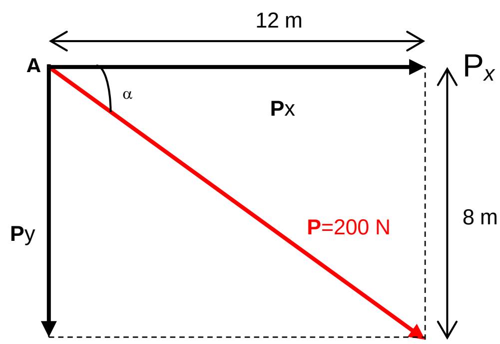
Ejemplo 2.3.3, una persona se encuentra jalando una cuerda sujeta a una torre con una fuerza de 200 N. Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la persona en el punto A.



Solución. Calculando las componentes escalares de las fuerzas.

Determinamos por inspección los signos de los vectores cartesianos P_x, y P_y entonces utilizamos funciones trigonométricas y tenemos:

La hipotenusa c = $\sqrt{a^2 + b^2}$ $\therefore$ c = 14.42 m



P_x = + P cos α = + (200 N) (12 m/14.42 m)

= +166.41 N

P_y = - P sen α = - (200 N) (8 m/14.42 m)

= - 110.94 N

De esta forma las componentes vectoriales son:

P_x = + (166.41 N)i P_y = - (110.94 N)j

Y el vector P se puede escribir de la siguiente forma:

P = +(166.41 N)i - (110.94 N)j

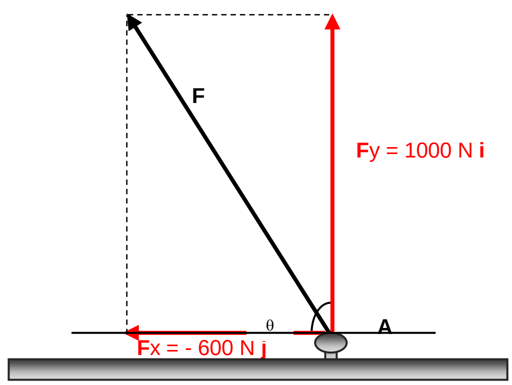
“Cuando una fuerza F está definida por medio de sus componentes rectangulares Fx y Fy, el ángulo θ que define su dirección puede obtenerse a partir de la siguiente relación trigonométrica”.[8]

$$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx}$$

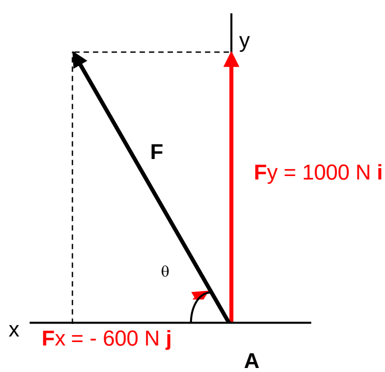
La magnitud F de la fuerza se puede determinar aplicando el teorema de Pitágoras[9] para obtener

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$$

Ejemplo 2.3.4, una fuerza F= (-600 N)i + (1000 N)j es aplicada a un perno en el punto A. Determinar su magnitud y el ángulo θ que está forma con la horizontal.



Solución. Se calcula la magnitud de la fuerza F con el teorema de Pitágoras y el ángulo θ con razones trigonométricas.



$$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx}$$

$\therefore$ θ = 59°

$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2} = F$

$= \sqrt{(-600)^2 + (1000)^2}$

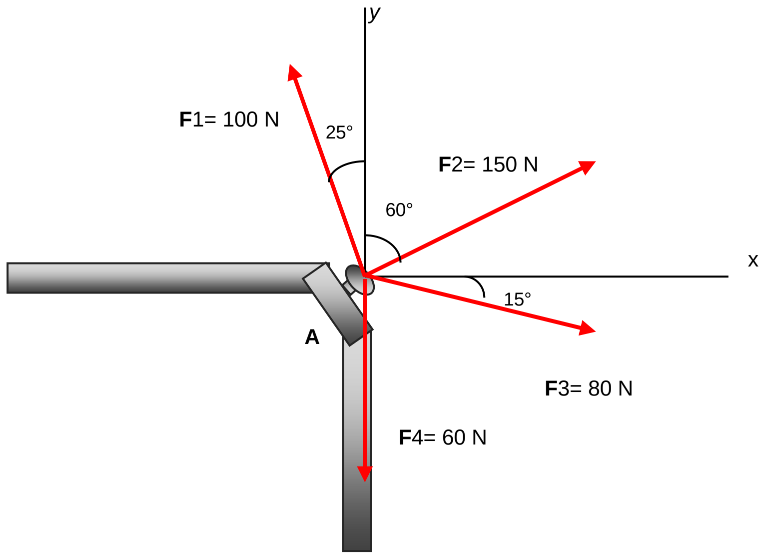
$\therefore$ F = 1166.2 N

---

[8] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 29.

[9] Teorema de Pitágoras: la suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

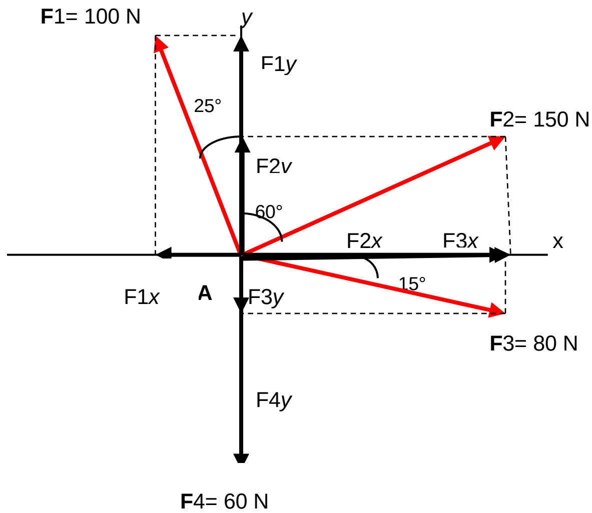
Ejemplo 2.3.5, cuatro fuerzas que actúan sobre un perno en el punto A como es mostrado en la figura. Encontrar la resultante de las fuerzas sobre el perno en el punto A por medio de la suma de sus componentes en *x* y *y*.



Solución. Con uno de la trigonometría se determinarán las componentes *x* y *y* de cada una de las fuerzas. El número escalar que representa una fuerza es positivo si la componente de la fuerza tiene el mismo sentido que el eje coordenado que le corresponde, por ejemplo el escalar en x será positivo si del punto A parte hacia la derecha. Entonces, las componentes *x* que actúan hacia la derecha y las componentes *y* que actúan hacia arriba son números escalares positivos.

Entonces llenamos la tabla de las componentes de las fuerzas

Fuerza	Magnitud N	Componente *x*, N	Componente *y*, N
F1	100.0	-42.3	90.6
F2	150.0	129.9	75.0
F3	80.0	77.3	-20.7
F4	60.0	0.0	-60.0
		$\Sigma Fx = 164.9$	$\Sigma Fy = 84.9$



Y así se obtiene la resultante F de las cuatro fuerzas F1, F2, F3 y F4.

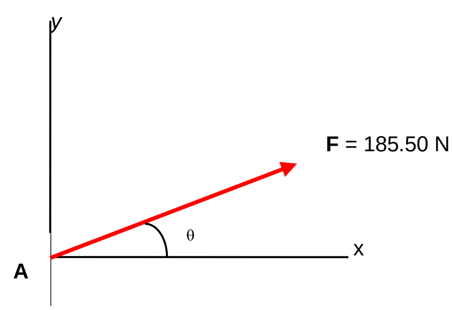
F= (164.9 N)i + (85.9 N)j

Y la magnitud y dirección de la resultante F es de:

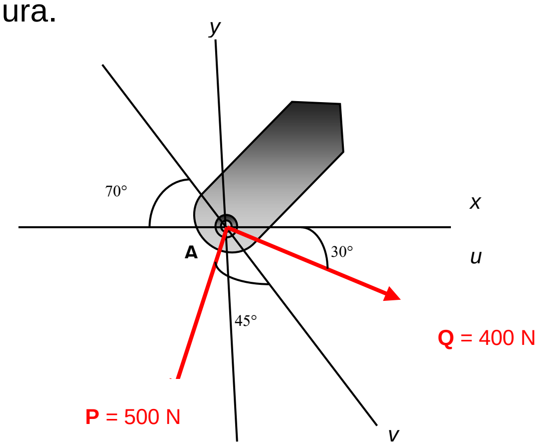
$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx} = \frac{84.9\ N}{164.9\ N}$ $\quad\therefore\ \theta = 27.2\ °$

F= $\sqrt{Fx^2 + Fy^2}$ = F= $\sqrt{(164.9)^2 + (84.9)^2}$

$\therefore$ F = 185.50 N



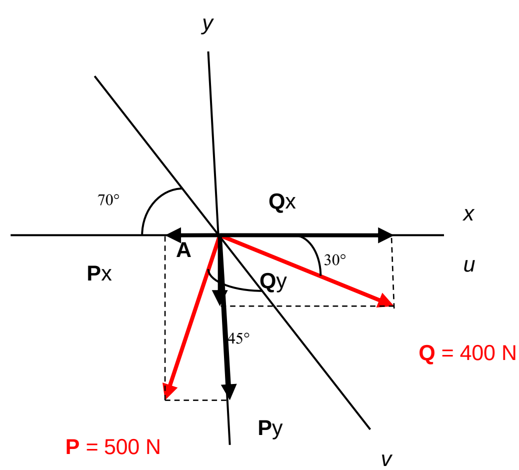
Ejemplo 2.3.6, dos fuerzas P y Q se encuentra actuando sobre el punto A mostrado en la figura.



Determinar las fuerzas P y Q en componentes cartesianos y calcular la resultante F de las fuerzas.

Resolver la resultante F en componentes que actúen a lo largo del eje *u* y determine las magnitudes de las componentes.

Solución. Por trigonometría se determinarán las componentes *x* y *y* de cada una de las fuerzas. En concordancia el número escalar que representa una fuerza es positivo si la componente de la fuerza tiene el mismo sentido que el eje coordenado que le corresponde. Entonces, las componentes *x* que actúan hacia la derecha y las componentes *y* que actúan hacia arriba son números escalares positivos.



Llenamos la tabla de las componentes de las fuerzas

Fuerza	Magnitud N	Componente *x*, N	Componente *y*, N
P	500.0	-211.3	-453.2
Q	400.0	346.4	-200.0
		ΣF*x* =135.1	ΣF*y* = -653.2

Y obtenemos la resultante F de las dos fuerzas actuantes sobre el punto A.

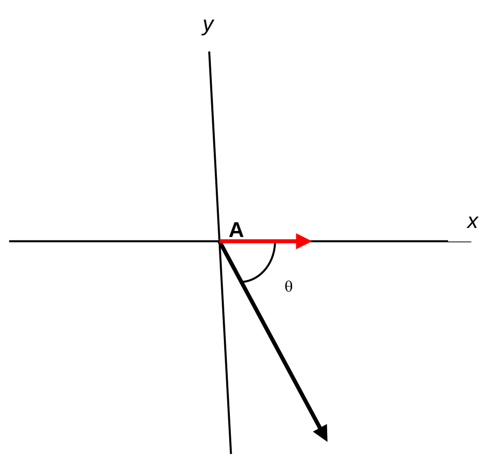
F= (135.1 N)i - (653.2 N)j

La magnitud y dirección de la resultante F es calculada de la siguiente forma:

$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx} = \frac{135.1\ N}{-\ 653.2\ N}$ $\therefore$ θ = 78.3 °

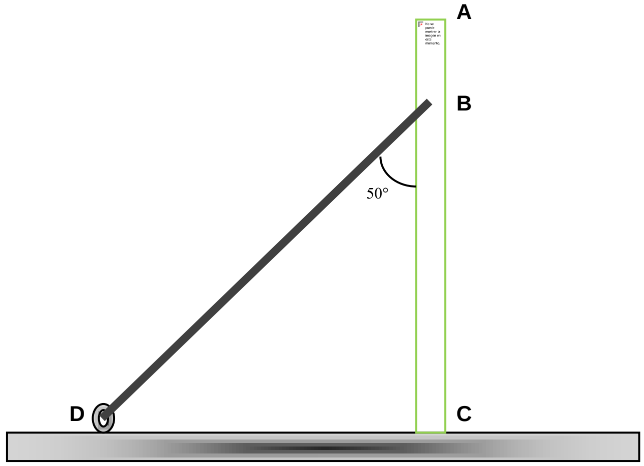
F= $\sqrt{Fx^2 + Fy^2}$ = F= $\sqrt{(135.1)^2 + (-653.2)^2}$

$\therefore$ F = 666.98 N

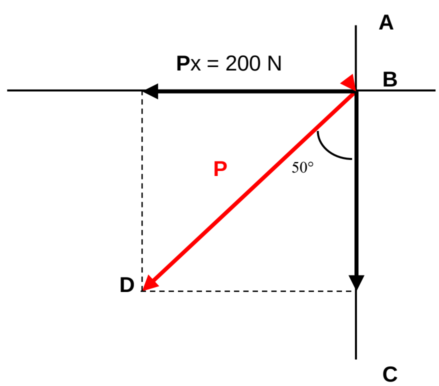


F = 666.98 N

Ejemplo 2.3.7, "el alambre BD de la figura mostrada, ejerce sobre el poste telefónico AC una fuerza P dirigida a lo largo de BD. Si sabemos que P debe tener una componente perpendicular al poste AC de 200 N, determinar la magnitud de la fuerza P y su componente en una dirección perpendicular a AC".[10]



Solución.



$\cos \alpha = \frac{Px}{P} \quad \therefore \quad P = \frac{Px}{\cos \alpha}$

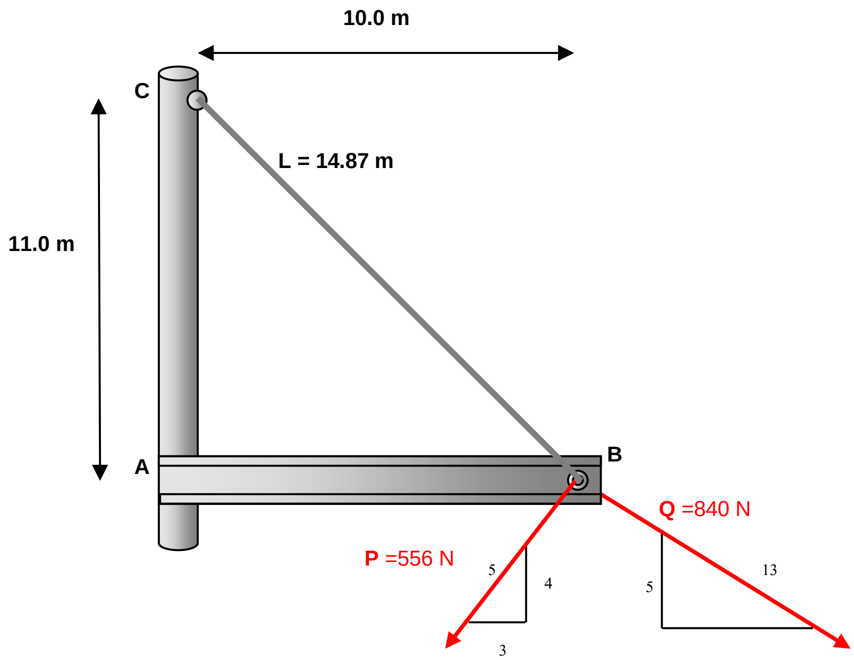
$P = \frac{200\ N}{\cos 40°} = 261.1$ N

$\cos \theta = \frac{Py}{P} \quad \therefore \quad Py = P \cos \theta$

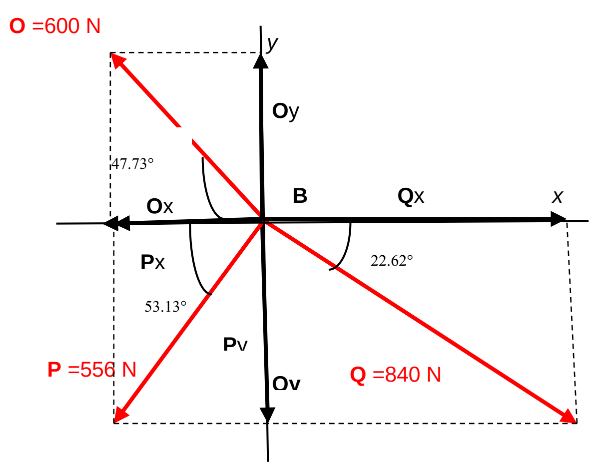
$Py = (261.1)(\cos 50°) = 167.82$ N

[10] http://www.scribd.com/doc/6928509/capitulo-215-311

Ejemplo 2.3.8, si sabemos que la tensión en el cable BC es de 600 N. Determinar la resultante F de las tres fuerzas P, Q y BC que actúan en el punto B de la viga AB.



Solución. Se determinan por trigonometría las componentes *x* y *y* de cada una de las fuerzas. En concordancia el número escalar que representa una fuerza es positivo si la componente de la fuerza tiene el mismo sentido que el eje coordenado que le corresponde. Entonces, las componentes *x* que actúan hacia la derecha y las componentes *y* que actúan hacia arriba son números escalares positivos.



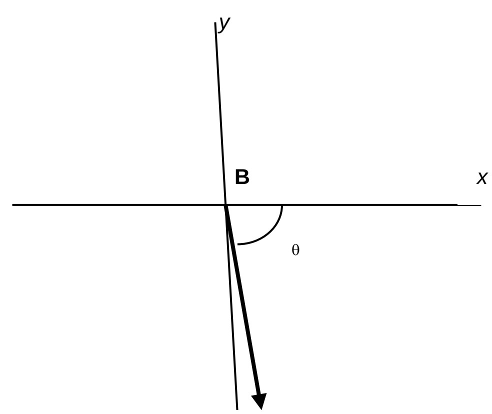
Llenamos la tabla de las componentes de las fuerzas y tenemos que:

Fuerza	Magnitud N	Componente *x*, N	Componente *y*, N
O	600	-405.9	441.9
P	556	-333.6	-444.8
Q	840	775.4	-323.1
		ΣF*x* = 35.9	ΣF*y* = -326

$\tan\theta = \frac{Fy}{Fx} = \frac{-326\ N}{35.9\ N}$ $\therefore$ θ = 83.7 °

F= $\sqrt{Fx^2 + Fy^2}$ = F= $\sqrt{(35.9)^2 + (-326)^2}$

$\therefore$ F = 327.98 N

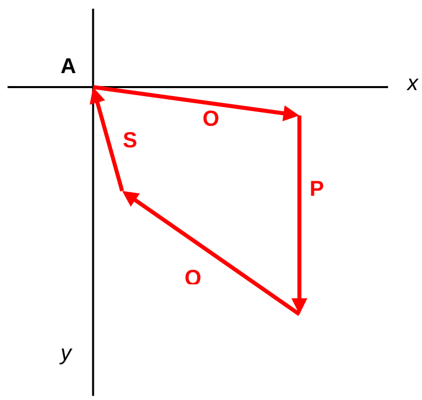


F = 327.98 N

Equilibrio de una partícula

Cuando el valor de la resultante de las fuerzas actuantes es cero, el efecto neto de las fuerzas dadas es igual a cero, por lo tanto se dice que la partícula se encuentra en equilibrio.

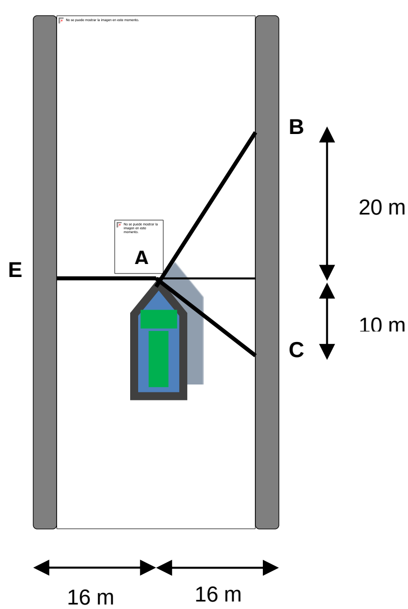
Si queremos ilustrar gráficamente lo anterior dicho debemos dibujar un polígono cerrado de fuerzas y expresar de manera algebraica las condiciones de equilibrio de una partícula.



Descomponiendo cada fuerza en sus componentes rectangulares

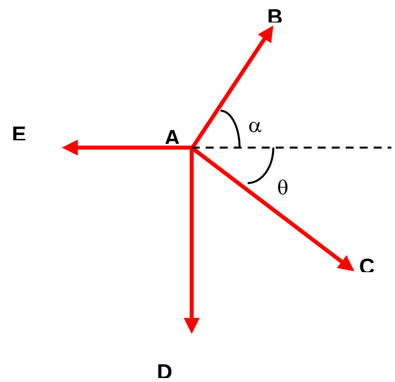
$\Sigma Fx = 0$ $\Sigma Fy = 0$

Ejemplo 2.3.9, se desea encontrar la fuerza de arrastre actuante sobre un bote. Por tal motivo se emplean tres cables AB, AC y AE para mantener la proa del bote en línea central del canal. Las lecturas en un dinamómetro indican que la tensión es de 80 N en el cable AB y de 120 N en el cable AE. Encontrar la fuerza de arrastre sobre el bote y la tensión en el cable AC.



Solución

Se determinarán los ángulos que definen las direcciones de los cables AB y AC, α y θ respectivamente:



$$\tan\alpha = \frac{C.O}{C.A.} = \frac{20.0}{16.0} \quad \therefore\ \alpha = 51.3\ °$$

$$\tan\theta = \frac{C.O}{C.A.} = \frac{10.0}{16.0} \quad \therefore\ \theta = 32.0\ °$$

"La condición de equilibrio es expresada escribiendo la resultante de todas las fuerzas que se encuentran actuando sobre el casco debe ser igual a cero".[11]

$$R = T_{AB} + T_{AC} + T_{AE} + F_D = 0$$

Por lo tanto descompondremos las fuerzas en sus componentes *x* y *y*.

Fuerza	Magnitud N	Componente *x*, N	Componente *y*, N
T_{AB}	80.0	50.02	62.43
T_{AE}	120.0	-120.00	0.00
T_{AC}	T_{AC}	+TAC*COS(32°)	-TAC*SEN(32°)
F_D	F_D	0.00	-FD*SEN(90°)
		ΣFx =50.02-120.00+TAC*COS (32°)	ΣFy = 62.43-TAC*SEN(32°)-FD*SEN(90°)

Estas ecuaciones son satisfechas si las ΣFx y ΣFy son iguales a cero. Por lo tanto estas dos ecuaciones nos dicen que la suma de las componentes

[11] http://www.scribd.com/doc/6928509/capitulo-215-311

en *x* y la suma de las componentes en *y* de las fuerzas dadas tiene que ser iguales a cero.

$$\Sigma F = 0$$

$$(\Sigma Fx)i + (\Sigma Fy)j = 0 \quad \text{entonces}$$

$$(\Sigma F_x = 0) \qquad 50.02 - 120.00 + T_{AC}*\cos(32°) = 0 \qquad (1)$$

$$(\Sigma F_y = 0) \qquad 62.43 - T_{AC}*\mathrm{sen}(32°) - F_D*\mathrm{sen}(90°) = 0 \qquad (2)$$

De la ecuación (1) tenemos que:

$$T_{AC} = 82.52 \text{ N}$$

Y sustituimos en la ecuación (2):

$$F_D = 18.7 \text{ N}$$

Si comprobamos los resultados obtenidos tenemos que:

Fuerza	Magnitud N	Componente *x*, N	Componente *y*, N
T_{AB}	80.00	50.02	62.43
T_{AE}	120.00	-120.00	0.00
T_{AC}	82.52	0.00	-18.70
F_D	18.70	69.98	-43.73
		$\Sigma Fx = 0.00$	$\Sigma Fy = 0.01$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Resolver y entregar un reporte de los ejercicios del libro de R. C. Hibbeler 2.33, 2.39, 2.47, 2.49 y 2.50.

2.4. MOMENTOS DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO, FUERZA NULA, MOMENTO ESCALAR, MOMENTO

Si consideramos una fuerza F que se encuentra actuando sobre un cuerpo rígido, esta fuerza estará representada por un vector el cual define su magnitud y su dirección. El efecto de la fuerza sobre el cuerpo rígido también depende de su punto de aplicación A. La posición del punto A puede es definida de manera conveniente por medio del vector r que une al punto de referencia 0 con A. Al vector r se le conoce como vector de posición del punto de aplicación A.

El momento de la fuerza F con respecto de 0 se define como el producto vectorial de r y F:[12]

$$M_0 = r \times F$$

El momento M_0 tiene que ser perpendicular al plano que contiene al punto 0 y a la fuerza F. El sentido de M_0 está definido por el sentido de rotación que haría al vector r colineal con el vector F. Otra manera de explicar el sentido de rotación es por la regla llamada de la mano derecha, la cual nos indica cerrar la mano derecha y mantenerla de forma tal que los dedos estén doblados en el mismo sentido de la rotación que la fuerza F le impartiría al cuerpo rígido en cuestión alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de M_0 de tal forma dedo pulgar indicará el sentido del momento M_0.

Si se representa por θ el ángulo entre las líneas de acción del vector de posición r y la fuerza F, la magnitud del momento de F con respecto de 0 está dado por:[13]

$$M_0 = r F \operatorname{sen} \theta = Fd$$

Donde d representa la distancia perpendicular desde 0 hasta la línea de acción de la fuerza F. Debido a la tendencia de la fuerza F a hacer girar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo perpendicular a la fuerza depende de la distancia de F a tal eje como de la magnitud de dicha fuerza.[14]

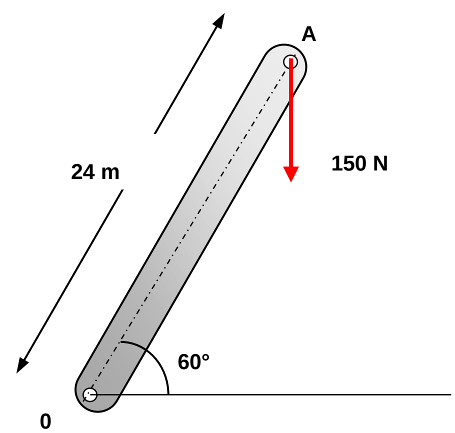
---

[12] Ferdinand P. Beer et al, *Mecánica vectorial para ingenieros,* p. 79.
[13] Ferdinand P. Beer, *et al*, *op. cit.*, p. 79
[14] http://www.scribd.com/doc/6928509/capitulo-215-311

El momento M_0 de una fuerza con respecto a un punto depende de la magnitud, la línea de acción y el sentido de la fuerza.

En el sistema de unidades del SI, la fuerza es expresada en newtons (N) y la distancia en (m), el momento de una fuerza está dado en newtons-metro (N-m).

Ejemplo 2.4.1,"una fuerza de 150 N actuando de manera vertical se aplica en el extremo de una palanca que está unida a una flecha en el punto 0. Encontrar: *a)* el momento de la fuerza vertical de 150 N con respecto al punto 0, *b)* la fuerza horizontal aplicada en el punto A que origina el mismo momento con respecto al punto 0, *c)* la mínima fuerza que puede ser aplicada en el punto A que origina el mismo momento con respecto al punto 0, *d)* que tan lejos de la flecha debe actuar una fuerza vertical de 180 N para originar el mismo momento con respecto al punto 0 y *e)* Revisar si alguna de las fuerzas obtenidas en los incisos *b, c y d* es equivalente a la fuerza original".[15]



Solución:

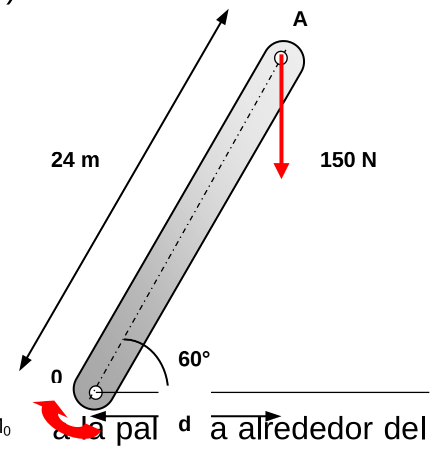
a) "Momento con respecto a 0. La distancia perpendicular desde el punto 0 hasta la línea de acción de la fuerza de 150 N es:

$$d = (24 \text{ m}) \cos 60° = 12 \text{ m}$$

Y la magnitud del momento de la fuerza de 150 N con respecto al punto 0 es igual a:"[16]

[15] http://www.scribd.com/doc/6928509/capitulo-215-311
[16] http://www.scribd.com/doc/6928509/capitulo-215-311

$M_0 = Fd = (150\ N)\ (12\ m) = 1\ 800\ N\text{-}m$



La fuerza de 150 N tiende a hacer a la pal a alrededor del punto 0 en el sentido de las manecillas del reloj, el momento es representado por un vector M_0 perpendicular al plano de la figura y que apunta hacia adentro del plano del papel. Esto se representa de la siguiente manera:

$$M_0 = 1\ 800\ N\text{-}m$$

b) “Fuerza horizontal. En este inciso se tiene que:

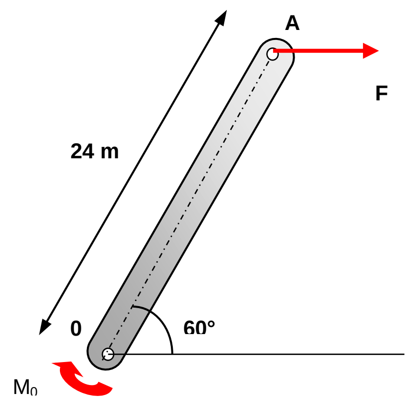
$$d = (24m)\ \text{seno}\ 60° = 20.78\ m$$

“Como el momento con respecto del punto 0 debe ser igual a 1 800 N-m, se escribe:”[17]

$M_0 = Fd$

$1\ 800\ N = F\ (20.78\ m)$

$F = 86.60\ N$



c) “Fuerza mínima. Como $M_0 = Fd$, el mínimo valor es obtenido cuando la distancia d es máxima. Por lo tanto, tomamos la fuerza perpendicular a 0A y se observa que d= 24 m que es la medida de la palanca, entonces:”[18]

---

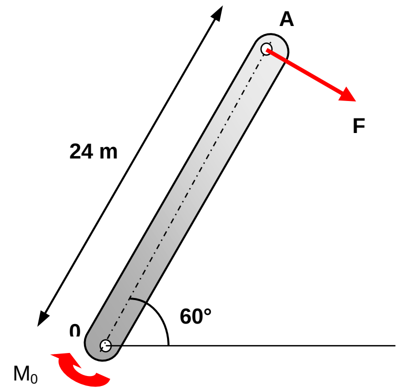
[17] http://www.scribd.com/doc/6928509/capitulo-215-311

[18] http://www.scribd.com/doc/6928509/capitulo-215-311

$M_0 = Fd$

$1\,800$ N-m = F(24m)

F = 75 N $\measuredangle$ 30°



d) Fuerza vertical de 180 N. En este inciso la relación M_0 = Fd proporciona lo siguiente:

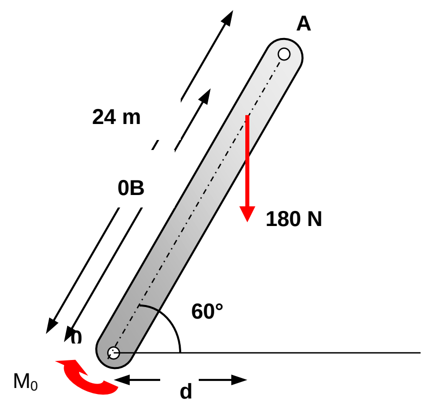
$M_0 = Fd$

$1\,800$ N-m = (180 N)d

d = 10.00 m

0B cos 60° = d

0B = 20.00 m



e) Ninguna de las fuerzas revisadas es equivalente a la inicial de 150 N, aunque cada fuerza tiende a rotar a la flecha de la misma forma, cada una ocasiona que la palanca tire de la flecha en una forma distinta.

Componentes rectangulares del momento de una fuerza

El cálculo del momento de una fuerza en el espacio se puede simplificar si el vector que representa la fuerza y el vector que representa la posición a partir de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares *x, y* y *z*. Por ejemplo el momento M_0. Con respecto a 0, de una fuerza F de componentes F_x, F_y y F_z que está aplicada en el punto A de coordenadas *x*, *y* y *z*. Observando que las componentes del vector de posición r son iguales, entonces las coordenadas *x, y* y *z* del punto A, se puede escribir que[19]:

[19] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 81.

$$r = xi + yj + zk$$

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

Si se sustituye a r y a F en:

$$M_0 = r \times F$$

El momento M_0 de F con respecto a 0 se puede escribir de la siguiente forma:

$$M_0 = M_x i + M_y j + M_z k$$

$$M_x = yF_z - zF_y$$

$$M_y = zF_x – xF_z$$

$$M_z = xF_y – yF_x$$

La tendencia de la fuerza F de impartirle a un cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes *x*, *y* y *z* puede ser medida a través de las componentes escalares M_x, M_y y M_z del momento M_0. También es posible escribir a M_0 en forma de determinante:[20]

$$M_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

Para calcular el momento M_B de una fuerza F aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B, se remplaza al vector de posición r en la ecuación por un vector dibujado desde B hasta A. Este vector es el “vector de posición de A relativo a B” y se representa por $r_{A/B}$. Se observa que $r_{A/B}$ se puede obtener restando r_B de r_A; por lo tanto, se escribe:[21]

$$M_B = r_{A/B} \times F = (r_A – r_B) \times F$$

O en forma de determinante: $x_{A/B}$

$$M_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x\mathrm{A/B} & yA/B & zA/B \\ Fx & Fy & Fz \end{vmatrix}$$

Donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ representan a las componentes del vector $r_{A/B}$.

$$x_{A/B} = x_A\text{-}x_B \qquad y_{A/B} = y_A\text{-}y_B \qquad z_{A/B} = z_A\text{-}z_B$$

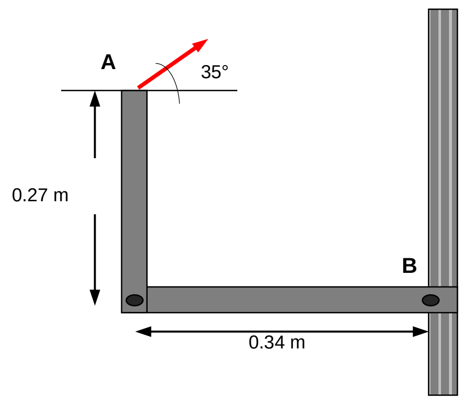
[20] Determinante: matriz cuadrada y expresión que se obtiene de sus elementos aplicando ciertas reglas.
[21] Ferdinand P. Beer, *et al*, *op. cit*., p. 82.

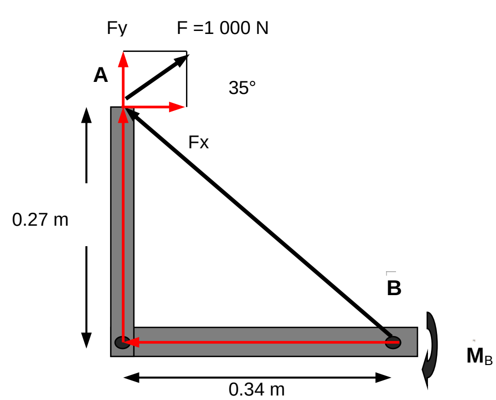
En el caso de problemas referidos a dos dimensiones, se puede suponer que la fuerza F está contenida en el plano cartesiano *xy*. Haciendo $z = 0$ y $F_z = 0$, se tiene que el M_0 puede expresarse:

$$M_0 = (xF_y - yF_x)k$$

Con esto podemos verificar que el momento de la fuerza F con respecto al punto 0 es perpendicular al plano de la figura.

Ejemplo 2.4.2, una fuerza de 1000 N se encuentra actuando sobre una ménsula como se muestra en la siguiente figura. Encontrar el momento de la fuerza de 1 000 N con respecto del punto B.





Solución. El momento M_B de la fuerza F con respecto al punto B se obtiene a través del producto vectorial:

$$M_B = r_{A/B} \times F$$

El vector $r_{A/B}$ es el trazado desde el punto B hasta el punto A. Si descomponemos al vector $r_{A/B}$ y a la fuerza F en sus componentes rectangulares, tenemos que:

$$r_{A/B} = -(0.34 \text{ m})i + (0.27 \text{ m})j$$

$$F = (1\,000N) \cos 35°i + (1\,000N) \text{ seno } 35°j$$

$$= (819.15 \text{ N})i + (573.58 \text{ N})j$$

Encontrando las relaciones para los productos cruz de los vectores unitarios tenemos que:

$$M_B = r_{A/B} \times F = [-(0.34 \text{ m})i + (0.27 \text{ m})j] \times [(819.15 \text{ N})i + (573.58 \text{ N})j]$$

$$V = P \times Q = (P_xi + P_yj + P_zk) \times (Q_xi + Q_yj + Q_zk)$$

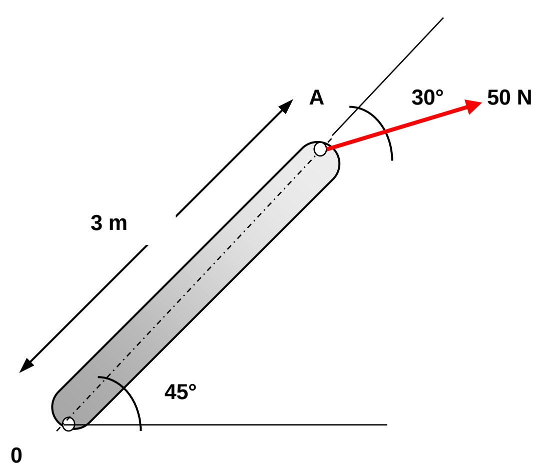
$$= (P_yQ_z - P_zQ_y)i + (P_zQ_x - P_xQ_z)j + (P_xQ_y - P_yQ_x)k$$

$$M_B = r_{A/B} \times F = (0.00)i + (0.00)j - (416.19 \text{ N-m})k$$

Por lo tanto el momento M_B encontrado es un vector perpendicular al plano de la figura y está apuntando hacia adentro del plano del papel.

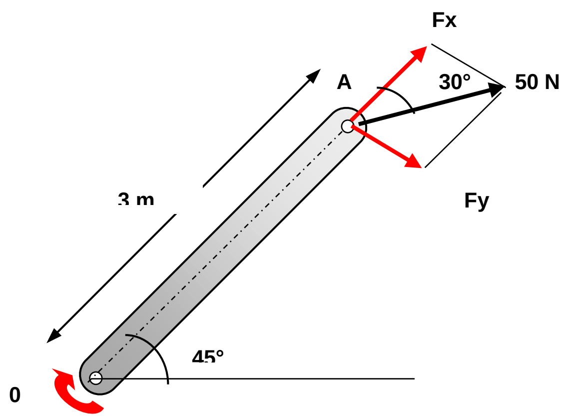
$$M_B = 416.19 \text{ N-m}$$

Ejemplo 2.4.3, una fuerza de 50 N se encuentra actuando sobre el extremo de una palanca de 3 m de largo como se muestra en la figura. Encontrar el momento de la fuerza con respecto al punto 0.



Solución. La fuerza puede ser reemplazada a través de dos componentes, una componente F_x en la dirección de 0A y otra componente F_y

perpendicular a 0A. Como el punto 0 se encuentra en la línea de acción de la componente F_x, el momento de F_x con respecto al punto 0 es igual a cero y el momento de la fuerza de 50 N se reduce al momento de la componente F_y, que tiene el mismo sentido que el de las manecillas del reloj y se representa por un escalar negativo.



$r_{A/0}$ = (3 m)i

F = (50 N) cos 30°i + (50 N) seno 30°j

= (43.30 N)i + (25.00 N)j

Encontrando las relaciones para los productos cruz de los vectores unitarios obtenemos que:

$M_B = r_{A/B}$ x F = [(3.00 m)i] x [(43.30 N)i - (25.00 N)j]

V = P x Q = $(P_x i + P_y j + P_z k)$ x $(Q_x i + Q_y j + Q_z k)$

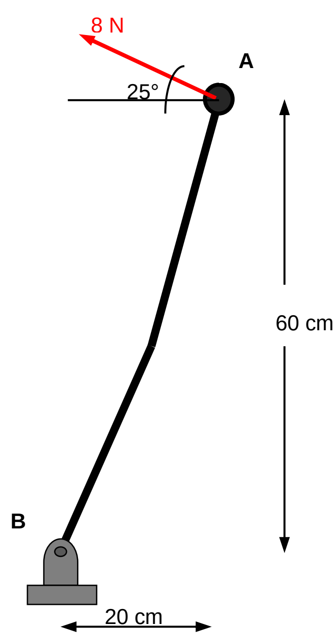
= $(P_yQ_z - P_zQ_y)i + (P_zQ_x - P_xQ_z)j + (P_xQ_y - P_yQ_x)k$

$M_0 = r_{A/0}$ x F = (0.00)i + (0.00)j - (75.00 N-m)k

Entonces el momento M_0 es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia adentro del plano del papel.

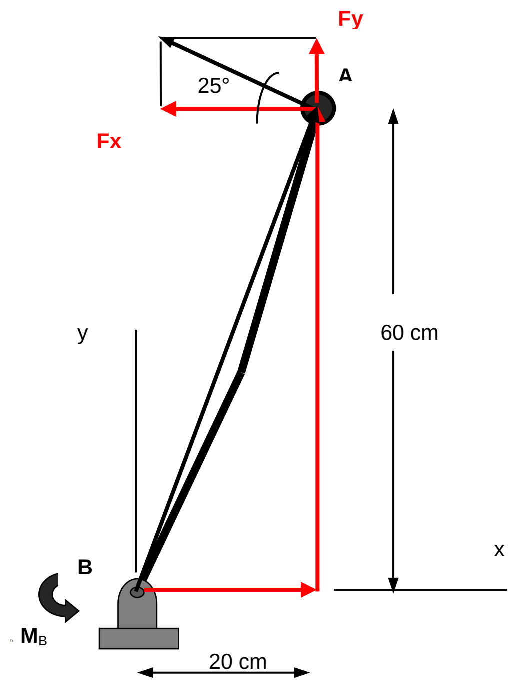
M_0 = 75.00 N-m

Ejemplo 2.4.4, una fuerza P de 8 N es aplicada a la palanca de cambios mostrada en la siguiente figura. Encontrar el momento de la fuerza P con respecto del punto B cuando el ángulo α formado con la horizontal es igual a 25°.



Solución. El momento M_B de la fuerza F con respecto al punto B se obtiene a través del producto vectorial siguiente:

$$M_B = r_{A/B} \times F$$



El vector $r_{A/B}$ es el trazado desde B hasta A. Encontrando las componentes rectangulares del vector $r_{A/B}$ y de la fuerza F se tiene que:

$$r_{A/B} = +(0.20\ m)i + (0.60\ m)j$$

$$F = -(8\ N)\cos 25°i + (8\ N)\text{ seno } 25°j$$

$$= -(7.25\ N)i + (3.38\ N)j$$

Si resolvemos las relaciones para los productos cruz de los vectores unitarios obtenemos:

$$M_B = r_{A/B} \times F = [+(0.2\ m)i + (0.6\ m)j] \times [-(7.25\ N)i + (3.38\ N)j]$$

$$V = P \times Q = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

$$= (P_y Q_z - P_z Q_y)i + (P_z Q_x - P_x Q_z)j + (P_x Q_y - P_y Q_x)k$$

$$M_B = r_{A/B} \times F = (0.00)i + (0.00)j + (5.03\ N\text{-}m)k$$

Entonces el momento M_B es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia afuera del plano del papel.

$$M_B = 5.03\ N\text{-}m$$

Ejemplo 2.4.5, encontrar el momento con respecto al origen punto 0, de la fuerza F = 2Ni – 7Nj – 3Nk que actúa en el punto A. Si sabemos que el vector de posición de A es: a)r = 4mi – 3mj – 5mk y b) r = -8mi – 2mj + 1mk.

Solución. El momento M_0 de la fuerza F con respecto a 0 lo obtenemos a través del producto vectorial

$$M_0 = r_{A/0} \times F$$
$$r_{A/0} = +(4\text{ m})i - (3\text{ m})j - (5\text{ m})k$$
$$F = +(2\text{ N})i - (7\text{ N})j - (3\text{ N})k$$

Inciso A. Encontrando las relaciones para los productos cruz de los vectores unitarios obtenemos:

$$M_0 = r_{A/0} \times F \quad = [+(4\text{ m})i - (3\text{ m})j - (5\text{ m})k] \times [+(2\text{ N})i - (7\text{ N})j - (3\text{ N})k]$$
$$V = P \times Q \quad = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$
$$= (P_yQ_z - P_zQ_y)i + (P_zQ_x - P_xQ_z)j + (P_xQ_y - P_yQ_x)k$$
$$M_0 = r_{A/0} \times F \quad = -(26.00\text{ N-m})i + (2.00\text{ N-m})j - (22.00\text{ N-m})k$$
$$M_0 = r_{A/0} \times F$$
$$r_{A/0} = -(8\text{ m})i - (2\text{ m})j + (1\text{ m})k$$
$$F = +(2\text{ N})i - (7\text{ N})j - (3\text{ N})k$$

Inciso B. Encontrando las relaciones para los productos cruz de los vectores unitarios obtenemos:

$$M_0 = r_{A/0} \times F \quad = [-(8\text{ m})i - (2\text{ m})j + (1\text{ m})k] \times [+(2\text{ N})i - (7\text{ N})j - (3\text{ N})k]$$
$$V = P \times Q \quad = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$
$$= (P_yQ_z - P_zQ_y)i + (P_zQ_x - P_xQ_z)j + (P_xQ_y - P_yQ_x)k$$
$$M_0 = r_{A/0} \times F \quad = +(13.00\text{ N-m})i - (22.00\text{ N-m})j + (60.00\text{ N-m})k$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

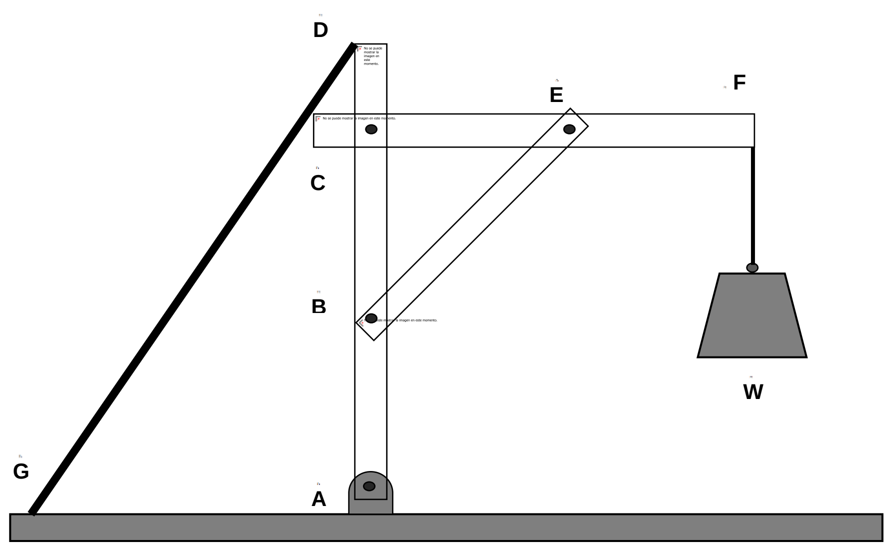
Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Resolver y entregar un reporte de los ejercicios del libro de R. C. Hibbeler 4-5, 4-6, 4-7, 4-10 y 4-23.

2.5. FUERZAS INTERNAS EN ESTRUCTURAS

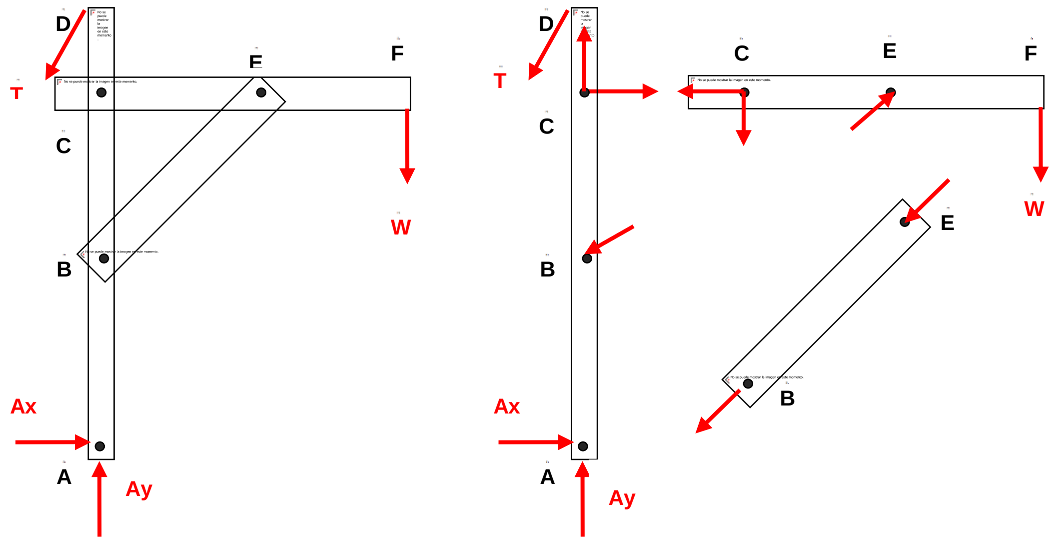
Los subtemas anteriores están relacionados con el equilibrio de un sólo cuerpo rígido y todas las fuerzas que están involucradas eran externas a este cuerpo. Este subtema trata del equilibrio de estructuras formadas por varias partes que están unidas entre sí. Estos problemas ahora requieren de la determinación de las fuerzas externas que actúan sobre la estructura en cuestión y la determinación de las fuerzas que mantienen unidas a las diversas partes que constituyen esta estructura.

Podemos considerar la grúa mostrada en la figura siguiente, la cual soporta una carga W. La grúa está constituida por tres vigas AD, CF y BE que están unidas mediante pernos que no tienen fricción, la grúa es soportada por un perno en el punto A y por un cable entre los puntos D y G.



Si se desarmamos la grúa, al momento de dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que la constituyen la grúa, observamos que las fuerzas que mantienen unidas a las tres vigas son externas, desde el punto de vista de cada una de las partes que integran la grúa.

También podemos representar las fuerzas externas que incluyen al peso de la carga W, a las dos componentes cartesianas Ax y Ay de la reacción en el punto A y a la fuerza T ejercida por el cable en el punto D.



La fuerza actuante en el punto B por el elemento BE sobre el elemento AD es representada como fuerza igual o opuesta a la fuerza ejercida en ese mismo punto por el elemento AD sobre el elemento BE y las componentes de la fuerza ejercida en el punto C por el elemento CF sobre el elemento AD se muestran iguales y opuestas a las componentes de la fuerza ejercida por el elemento AD sobre el elemento CF.

Lo anterior, por motivo a la tercera ley de Newton, la cual nos dice, que las fuerzas de acción y reacción entre cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. Esta ley revisada en los primeros temas del libro, está basada en evidencia experimental y es uno de los seis principios fundamentales de la mecánica elemental, de ahí que constatamos que su aplicación es esencial para la solución de problemas que involucran a cuerpos que están conectados entre sí, como es el caso en estos momentos.

Se han considerado en general tres categorías de estructuras ingenieriles:[22]

[22] Ferdinand P. Beer et al, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 276.

Armaduras. Están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que se encuentran restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nudos localizados en los extremos de cada elemento. Donde cada elemento está sometido a la acción de dos fuerzas.

Marcos. Soportar cargas, son utilizados también como estructuras estacionarias que están totalmente restringidas al igual que las armaduras. Los marcos siempre contienen al menos un elemento sometido a la acción de varias fuerzas.

Máquinas. Son diseñadas para modificar y transmitir fuerzas, este tipo de estructuras contiene partes que se encuentran en movimiento. Las máquinas contienen al menos un elemento sometido a la acción de varias fuerzas al igual que los marcos.

La armadura es uno de los tipos principales de estructuras arquitectónicas e ingenieriles. La armadura proporciona una solución tanto práctica y a la vez económica para el diseño de edificios y puentes. Una armadura esta como se dijo anteriormente constituida de elementos rectos que se conectan en nudos. Los elementos de la armadura están conectados por sus extremos, debido a esto, ningún elemento continúa más allá de un nudo. La mayoría de las estructuras en la práctica están construidas a partir de varias armaduras llamadas simples unidas entre sí para formar una armadura espacial. La armadura su función es soportar cargas que actúan en su plano y, por lo tanto, son tratadas como estructuras bidimensionales.

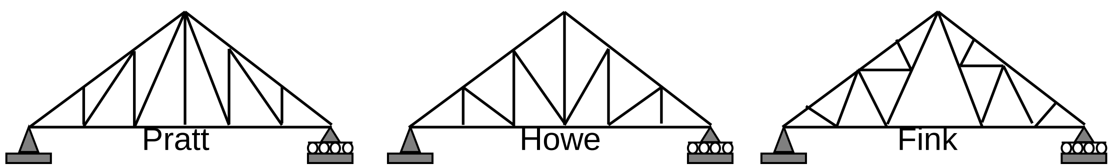
Los elementos de la armadura por lo general son elementos delgados y soportan cargas laterales pequeñas, debido a esto las cargas deben de estar aplicadas en los nudos y no sobre los elementos. Cuando se aplica una carga distribuida o concentrada entre dos nudos, por ejemplo la carga de un puente, deben considerarse un sistema llamado de piso, el cual, con los largueros y travesaños, transmiten la carga a los nudos.

El peso de los elementos que constituyen la armadura está aplicado en los nudos, se considera la mitad del peso de cada elemento a cada uno de los nudos a los cuales éste se conecta.

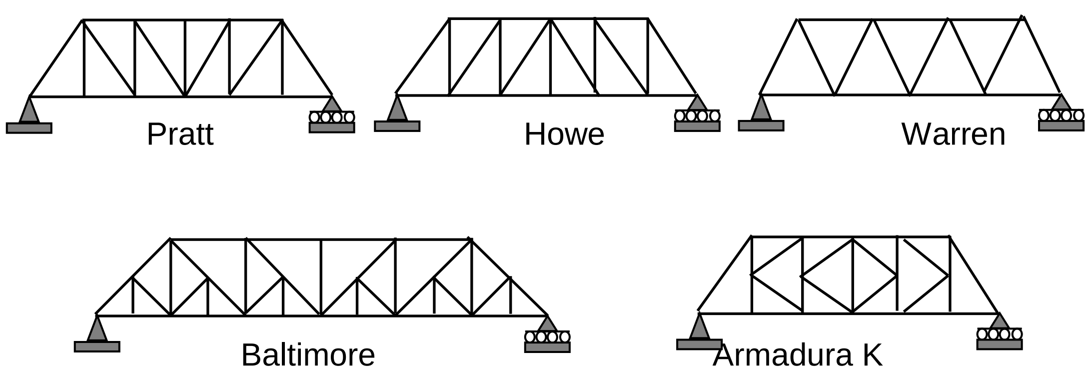
En la realidad los elementos que constituyen la armadura se unen por medio de conexiones soldadas o remachadas, Para simplificar el modelo se supone que los elementos están unidos entre sí por medio de pernos, así las fuerzas se reducen a una sola fuerza y no existe un par como sería en el caso de conexiones soldadas.

A continuación se muestran algunas armaduras típicas.[23]

Armaduras típicas para techo:



Armaduras típicas para puentes:

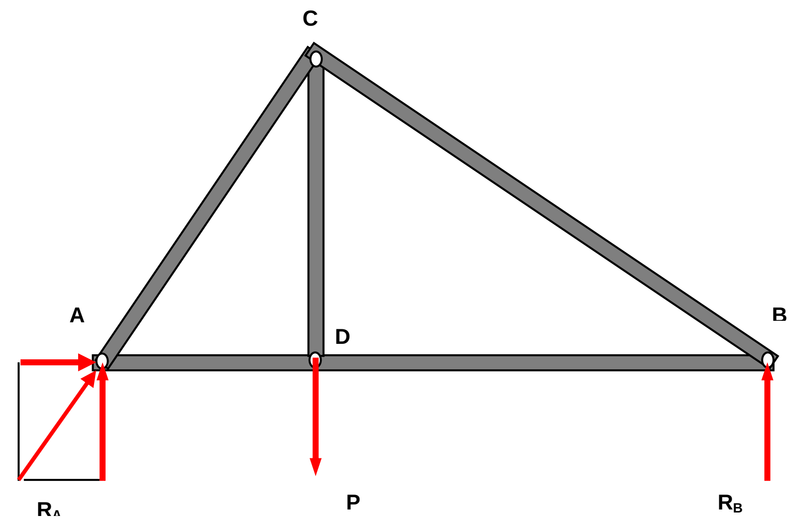


Análisis de armaduras por el método de nudos

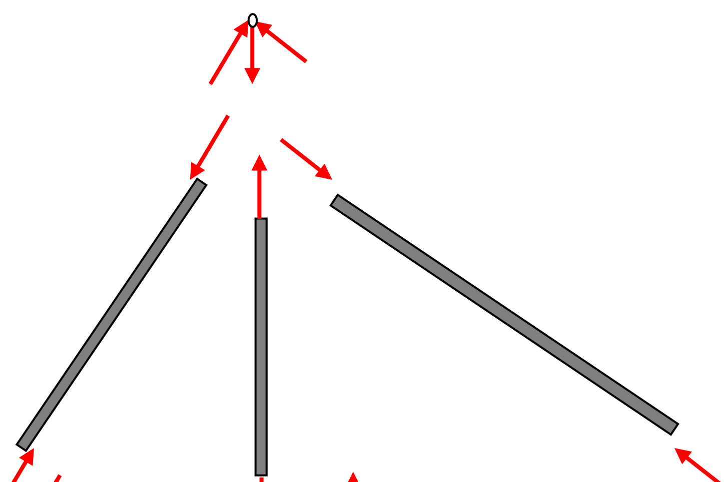
[23] Ferdinand P. Beer et al, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 277.

La armadura en su totalidad se encuentra en equilibrio por lo tanto se escriben dos ecuaciones de equilibrio. Si la armadura tiene un número n pernos, habrá 2n ecuaciones, estas ecuaciones deben resolverse para 2n incógnitas. En el caso de una armadura de las llamadas simple, se tiene que m=2n-3, esto es, 2n=m+3, y el número de incógnitas que pueden determinarse es de m+3.

La armadura es un cuerpo rígido que está en equilibrio y esto se utiliza para escribir tres ecuaciones que involucran a las fuerzas mostradas en la siguiente figura.



Estas ecuaciones que no contienen información nueva, se consideran independientes de las ecuaciones asociadas con los diagramas de cuerpo libre de los pernos. Pero las tres ecuaciones se emplean para determinar las componentes de las reacciones en los apoyos. El arreglo de pernos y elementos en una armadura simple se realiza para encontrar un nudo que involucre únicamente a dos fuerzas desconocidas. Estas fuerzas pueden determinarse por medio de los métodos de equilibrio bajo la acción de más de tres fuerzas.



Si se analiza la armadura mostrada en la figura anterior, debe considerarse el equilibrio de cada perno, y empezamos con el nudo en el cual únicamente dos fuerzas son desconocidas. En la armadura todos los pernos están sujetos por lo menos a tres fuerzas desconocidas. Primero se determinan las reacciones en los apoyos donde se considera a toda la armadura como un cuerpo libre y utilizando las ecuaciones de equilibrio que tenemos para un cuerpo rígido. De esta forma se observamos que la reacción R_A es vertical y se determinan las magnitudes de las reacciones R_A y R_B.

Entonces el número de fuerzas en el nudo A se reduce a sólo dos y estas fuerzas llegan a determinarse considerando el equilibrio del perno A por los elementos AC y AD, respectivamente, esto forma un triángulo de fuerzas. Entonces primero se dibuja la reacción R_A y luego se observa que las fuerzas F_{AC} y F_{AD} están dirigidas a lo largo de los elementos AC y AD, respectivamente, se completa el triángulo de fuerzas y se determina la magnitud y sentido de las fuerzas F_{AC} y F_{AD}. Las magnitudes de las fuerzas F_{AC} y F_{AD} representan las fuerzas en los elementos AC y AD.

Como la fuerza F_{AC} está dirigida hacia abajo y hacia la izquierda, el elemento AC empuja al perno A y tal elemento se encuentra en compresión. Como la fuerza F_{AD} está dirigida alejándose del nudo A, el elemento AD jala al perno A y tal elemento se encuentra en tensión.

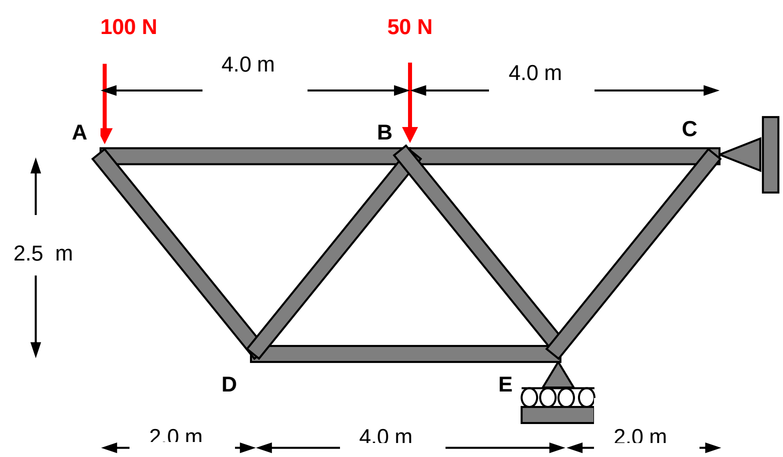
En el nudo D contiene dos fuerzas, F_{DC} y F_{DB} que son desconocidas. Las otras fuerzas que actúan sobre tal nudo son la carga externa P, la cual es conocida y la fuerza F_{DA} ejercida sobre el perno por el elemento AD, que es igual y opuesta a la fuerza F_{AD} ejercida por el mismo elemento sobre el perno A. Al dibujar el polígono de fuerzas correspondientes al nudo D, se determinan las fuerzas F_{DC} y F_{DB} a partir de tal polígono.

Sin embargo, cuando están involucradas más de tres fuerzas en un nudo, es más conveniente resolver las ecuaciones de equilibrio $\Sigma Fx = 0$ y $\Sigma Fy = 0$ para las dos fuerzas desconocidas. Como las dos se alejan del nudo D, los elementos DC y DB jalan el perno y de ahí se concluye que ambas están en tensión.

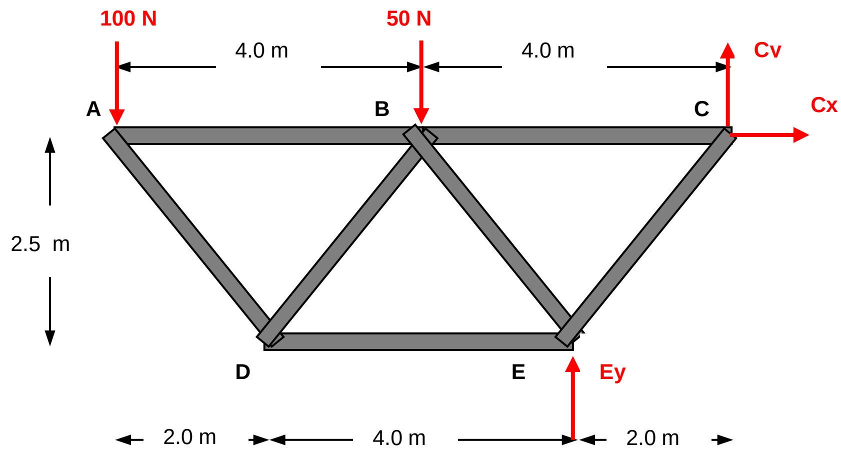
En el nudo C, se observa que tanto la fuerza F_{CD} como la fuerza F_{CA} son ahora conocidas a partir del análisis de nudos anteriores y que sólo la fuerza F_{CB} es desconocida. El equilibrio de cada perno nos proporciona suficiente información para determinar dos incógnitas, se obtiene una comprobación del análisis de este nudo. Se determina la magnitud y sentido de la fuerza F_{CB}, como la fuerza F_{CB} está dirigida hacia el nudo C, el elemento CB empuja el perno C y, por lo tanto, está en compresión. Verificamos que la fuerza F_{CB} y el elemento CB son paralelos.

En el nudo B todas las fuerzas son conocidas. Puesto que le perno correspondiente está en equilibrio, el triángulo de fuerzas debe de cerrar, de ésta manera comprobamos el análisis realizado.

Ejemplo 2.5.1, utilizando el método conocido como de los nudos, determinar la fuerza en cada unos de los elementos de la armadura mostrada.



Solución. Dibujamos un diagrama de cuerpo libre de la armadura en cuestión. Las fuerzas externas que actúan consisten en cargas aplicadas en las reacciones en C y en E.



Tenemos las ecuaciones de equilibrio siguientes:

$+\circlearrowleft \Sigma Mc = 0$: $(100\ N)(8.0\ m) + (50\ N)(4.0\ m) - (F_{Ey})(2.0\ m) = 0$

$$F_{Ey} = \frac{800\ N\text{–}m + 200\ N\text{–}m}{2.0\ m} = 500\ N \uparrow$$

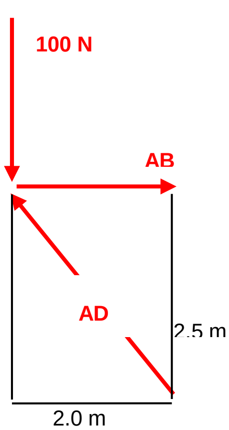
$\underrightarrow{+}\ \Sigma Fx = 0;\quad F_{Cx} = 0$

$+\uparrow \Sigma Fy = 0;\quad -100\ N - 50\ N + 500\ N - F_{Cy} = 0$

$$F_{Cy} = 350\ N \downarrow$$

Ahora revisamos las fuerzas internas que actúan en los nudos de la armadura en cuestión.

El nudo A esta sometido únicamente a dos fuerzas desconocidas ejercidas por los elementos AB y AD, si dibujamos un triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas F_{AB} y F_{AD} tenemos:



$+\uparrow \Sigma Fy = 0;\quad -100\ N + F_{ADy} = 0$

$F_{ADy} = 100\ N \uparrow$

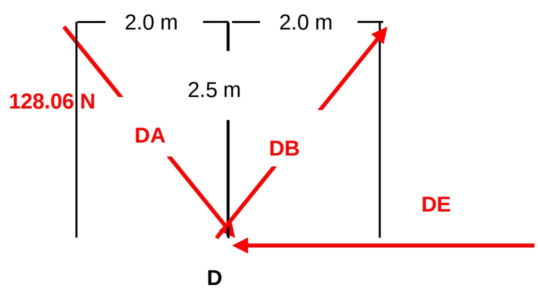
$F_{AD} = 128.06\ N$

$F_{ADx} = 80.00\ N \leftarrow$

$\underrightarrow{+}\ \Sigma Fx = 0;\quad + F_{AB} - F_{ADx} = 0$

por lo tanto $F_{AB} = 80.00\ N \rightarrow$

En el nudo D la fuerza ejercida por el elemento AD ya ha sido determinada, entonces se tienen dos incógnitas involucradas en este nudo. Dibujando el triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas desconocidas en los elementos DB y DE.



$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -100\ N + F_{DBy} = 0$

$F_{DBy} = 100\ N \uparrow$

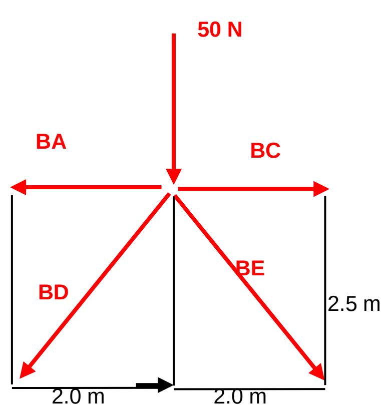
$F_{DB} = 128.06\ N$

$F_{DBx} = 80.00\ N \rightarrow$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0; \quad +80\ N + 80\ N - F_{DE} = 0$

$F_{DE} = 160.00\ N \leftarrow$

En el nudo B actúan más de tres fuerzas, entonces se determinan las dos fuerzas desconocidas y se resuelven las ecuaciones de equilibrio ΣFx =0 y ΣFy = 0. Se supone que las fuerzas desconocidas actúan hacia afuera del nudo, por lo tanto se encuentran a tensión. Un valor positivo en el cálculo indicará que la suposición hecha fue correcta.



$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -50\ N - 100\ N - F_{BEy} = 0$

$F_{BEy} = -150\ N \downarrow$

Por lo tanto corregimos el valor de BEy

$F_{BEy} = +150\ N \uparrow$

Entonces BE es a compresión

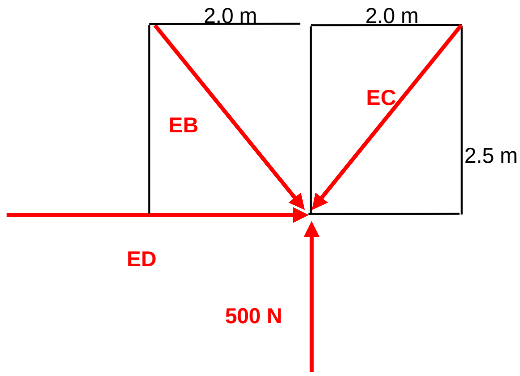
$F_{BE} = 192.09\ N$

$F_{BEx} = 120\ N \leftarrow$

$+ \quad \Sigma F_x = 0; \quad -80\ N - 80\ N - 120\ N + F_{BC} = 0$

$F_{BC} = 280.00\ N \rightarrow$

En el nudo E existe una fuerza desconocida actuando hacia afuera del nudo. Por lo tanto, se realiza la sumatoria de fuerzas en x y así obtenemos



$\xrightarrow{+}\ \Sigma Fx = 0; \quad + 160\ N + 120\ N - F_{ECx} = 0 \quad \therefore\ F_{ECx} = 280.00\ N \leftarrow$

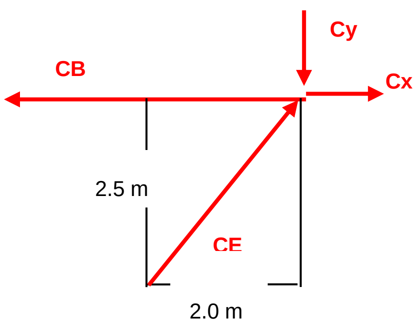
$F_{EC} = 448.22\ N$

$F_{ECy} = 350.00\ N$

Comprobando mediante sumatoria de fuerzas en y.

$+\uparrow \Sigma Fy = 0; \quad - 150\ N + 500\ N - 350\ N = 0 \qquad 0 = 0\ \therefore$ correcto

En el nudo C se comprueba que los valores calculados de todas las fuerzas que actúan sobre este nudo estén en equilibrio.



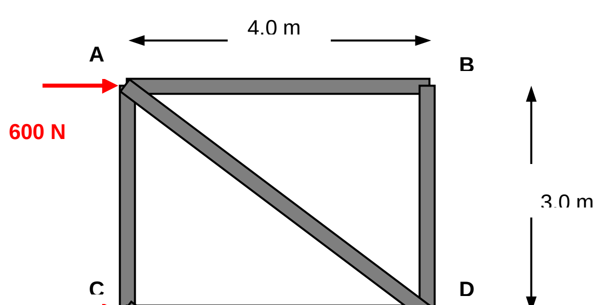
$\xrightarrow{+}\ \Sigma Fx = 0; \quad - 280\ N + 280\ N + F_{Cx} = 0$

$F_{Cx} = 0.00\ N$

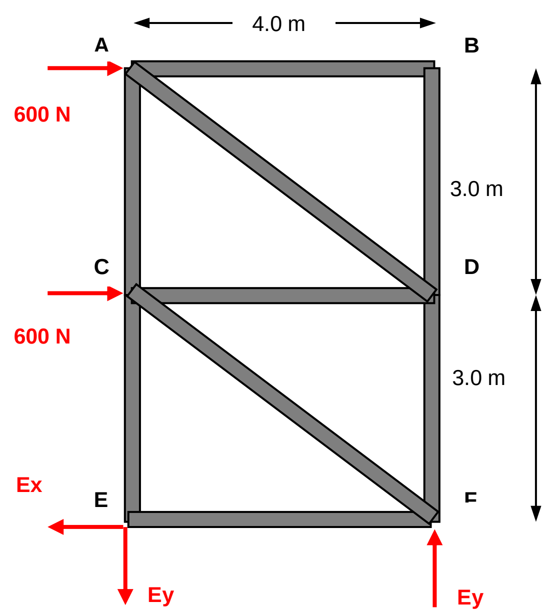
$+\uparrow \Sigma Fy = 0; \quad + 350\ N - F_{Cy} = 0$

$F_{Cy} = 350.00\ N \downarrow$

Ejemplo 2.5.2, usando el método de los nudos, encontrar las fuerzas en cada unos de los elementos de la armadura mostrada.



Solución. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la armadura. Las fuerzas externas que actúan consisten en cargas aplicadas en las reacciones en E y en F.



Se escriben las ecuaciones de equilibrio siguientes:

$+\circlearrowleft\ \Sigma M_E = 0$: $-(600\ N)(6.0\ m) - (600\ N)(3.0\ m) + (F_y)(4.0\ m) = 0$

$$F_{Fy} = \frac{3600\ N\text{–}m + 1800\ N\text{–}m}{4.0\ m} = 1\ 350\ N \uparrow$$

$\xrightarrow{+}\ \Sigma Fx = 0$; $600\ N + 600\ N - F_{Ex} = 0$

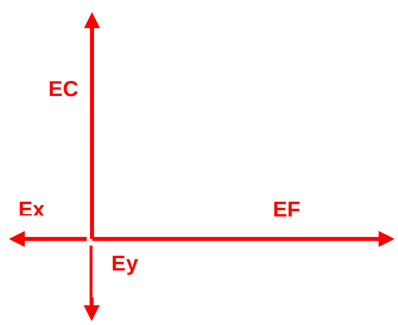
$F_{Ex} = 1200\ N \leftarrow$

$+\uparrow \Sigma Fy = 0$; $-F_{Ey} + 1\ 350\ N = 0$

$F_{Ey} = 1350\ N \downarrow$

Se revisan las fuerzas internas que actúan en los nudos de la armadura.

El nudo E está sometido únicamente a dos fuerzas desconocidas ejercidas por los elementos EC y EF, se dibuja un triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas F_{EC} y F_{EF}.



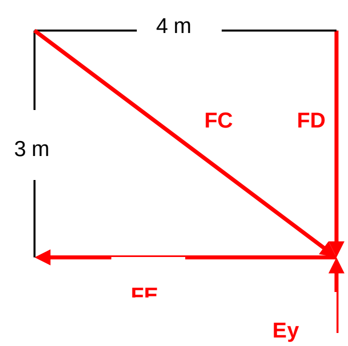
$\xrightarrow{+}\ \Sigma Fx = 0$; $-1200\ N + F_{EF} = 0$

$F_{EF} = 1200.00\ N \rightarrow$

$+\uparrow \Sigma Fy = 0$; $-1350\ N - F_{EC} = 0$

$F_{EC} = 1350.00\ N \uparrow$

Nudo F. Como la fuerza ejercida por el elemento FE se determino en el nudo anterior, entonces se tienen sólo dos incógnitas involucradas en este nudo. Se Dibuja el triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas desconocidas FC y FD.



$\xrightarrow{+}\ \Sigma Fx = 0$; $-1200\ N + F_{FCx} = 0$

$F_{FCx} = 1200.00\ N \rightarrow$

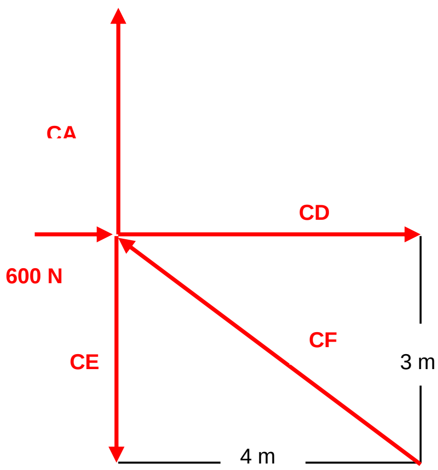
$F_{FC} = 1500\ N$

$F_{FCy} = 900.00\ N \downarrow$

$+\uparrow \Sigma Fy = 0$; $-F_{FD} - 900\ N + 1350\ N = 0$

$F_{FD} = 450.00\ N \downarrow$

Nudo C. Como las fuerzas ejercidas por los elementos CE y CG se determinaron en nudos anteriores, entonces se tienen sólo dos incógnitas involucradas en este nudo. Se Dibuja el triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas desconocidas CA y CD.



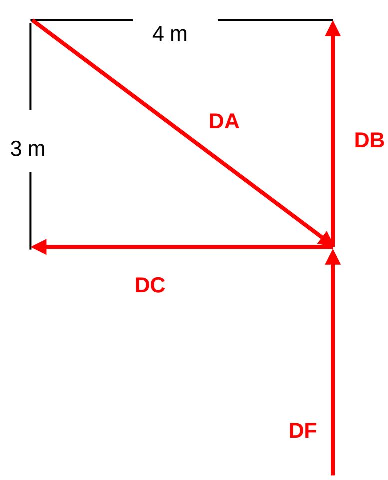
$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x = 0;\quad 600\ N - 1200\ N + F_{CD} = 0$

$F_{CD} = 600.00\ N \rightarrow$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad + F_{CA} - 1350\ N + 900\ N = 0$

$F_{CA} = 450.00\ N \uparrow$

Nudo D. Como las fuerzas ejercidas por los elementos DC y DF ya han sido determinadas, entonces se tienen dos incógnitas involucradas en este nudo. Se Dibuja el triángulo de fuerzas para determinar las fuerzas desconocidas DA y DB.



$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x = 0;\quad - 600\ N + F_{DAx} = 0$

$F_{DAx} = 600.00\ N \rightarrow$

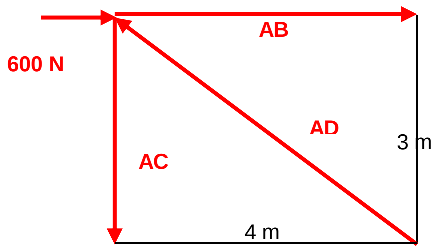
$F_{DA} = 750.00\ N$

$F_{DAy} = 450.00\ N \downarrow$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad + F_{DB} - 450\ N + 450\ N = 0$

$F_{DB} = 0.00\ N$

Nudo A. Existe una fuerza desconocida actuando hacia afuera del nudo. Por lo tanto realizamos la sumatoria de fuerzas en x, y obtenemos



$\xrightarrow{+}$ $\Sigma Fx = 0$; $600\ N - 600\ N + F_{AB} = 0$

$F_{AB} = 0.00\ N$

Comprobando mediante sumatoria de fuerzas en y.

$+\uparrow \Sigma Fy = 0$; $- 450\ N + 450\ N = 0$ $\quad 0 = 0 \quad \therefore$ correcto

Nudo B. Comprobamos los valores calculados de todas las fuerzas que actúan sobre el nudo estén en equilibrio y observamos que en los elementos BA y BD no existen fuerzas actuantes.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Resolver y entregar un reporte de los ejercicios del libro de R. C. Hibbeler 6-1, 6-3, 6-5, 6-7 y 6-9.

AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: Subraya el inciso que contenga la respuesta correcta.

1.- Esto significa que el tamaño y la forma de cuerpo bajo consideración no afectarán significativamente la solución de los problemas y entonces se supondrá que todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dado están aplicadas en el mismo punto. (   )

2.- Representa la acción de un cuerpo sobre otro y, generalmente está caracterizada por su punto de aplicación, su magnitud y su dirección. (   )

3.- Los desplazamientos, las velocidades, las aceleraciones y los momentos constituyen cantidades físicas que poseen magnitud y dirección y que se suman con la ley del…... (   )

4.-. Se definen como expresiones matemáticas que poseen magnitud y dirección. (   )

5.- Diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. (   )

a) Fuerza

b) Vectores

c) Armaduras

d) Efecto sobre una partícula

e) Paralelogramo

Las dos fuerzas P y Q actúan sobre un perno, según las condiciones de la figura mostrada.

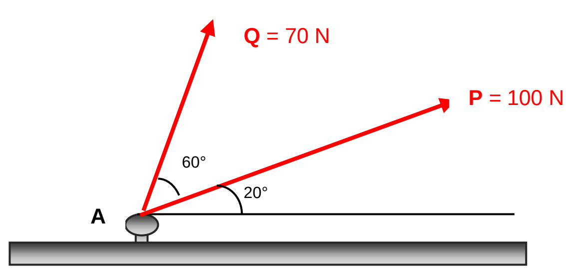


Fig. 1

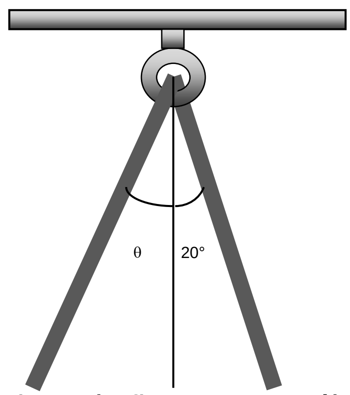
6.- Del perno mostrado en la figura 1, la fuerza resultante es:

a) 173.48 N *b)* 163.83 N *c)* 165.75 N *d)* 175.75 N

7.- Del perno mostrado en la figura 1, la dirección de la resultante son:

a) 60° *b)* 55.75° *c)* 54.75° *d)* 62.15°

El anillo mostrado en la figura está sometido a dos fuerzas P y Q. Si se requiere que la fuerza resultante tenga una magnitud de 600 N y esté dirigida verticalmente hacia abajo, determine las magnitudes de P y Q si θ = 40°



8.- Del anillo mostrado en la figura 2, ¿Cuál es la magnitud de P si θ=40°?

a) 455.15 N *b)* 445.34 N *c)* 450.15 N *d)* 460.20 N

9.- Del anillo mostrado en la figura 2, ¿Cuál es la magnitud de Q si θ=40°?

a) 240.18 N *b)* 230.18 N *c)* 246.96 N *d)* 236.96 N

Respuestas

1. d 2. a 3. e 4. b 5. c 6. b 7. c 8. b 9. c

UNIDAD 3

SISTEMAS DE FUERZAS EN EL ESPACIO

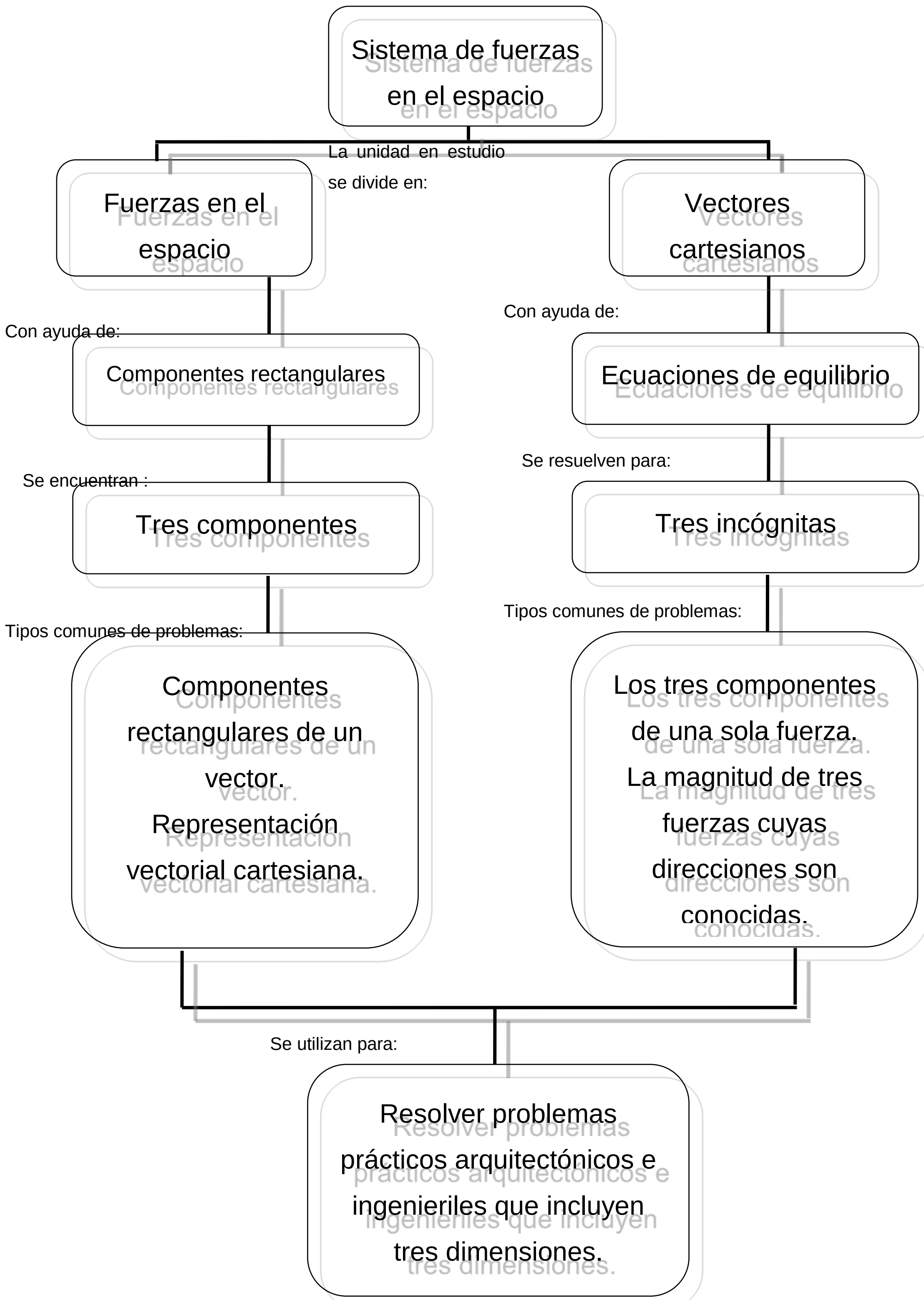
OBJETIVO

Resolver problemas prácticos arquitectónicos e ingenieriles que incluyen tres dimensiones.

TEMARIO

3.1 COMPOSICIÓN Y RESOLUCIÓN DE LAS FUERZAS TRIDIMENSIONALES
3.2 VECTORES CARTESIANOS

MAPA CONCEPTUAL



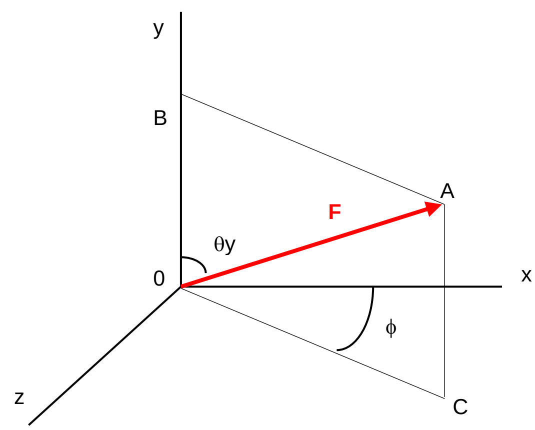
INTRODUCCIÓN

Los problemas considerados en la unidad 2 de éste libro, involucraban únicamente dos dimensiones en los cuales actuaban las fuerzas aplicadas, éstos podían ser formulados y resueltos en un solo plano. En esta unidad los problemas involucrarán las tres dimensiones en el espacio.

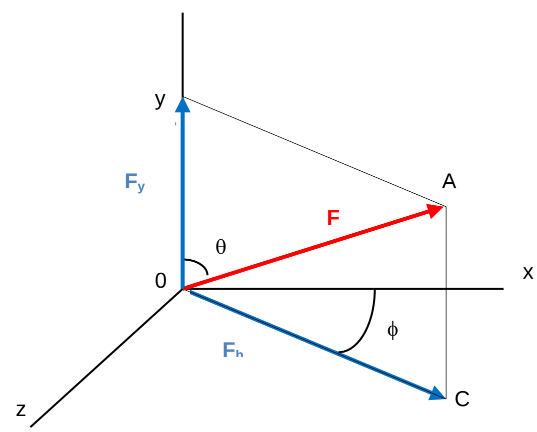
Para lo cual se utilizan operaciones del álgebra vectorial, si los vectores con los que trabajamos se representan en forma vectorial cartesiana la resolución de problemas se simplifica en gran medida. En esta tercera unidad por lo tanto, se representará en el tema 3.1 una forma general de realizarlo y en el tema 3.2 se aplicará el método para la resolución de problemas que involucran la suma de vectores.

3.1. COMPOSICIÓN Y RESOLUCIÓN DE FUERZAS TRIDIMENSIONALES

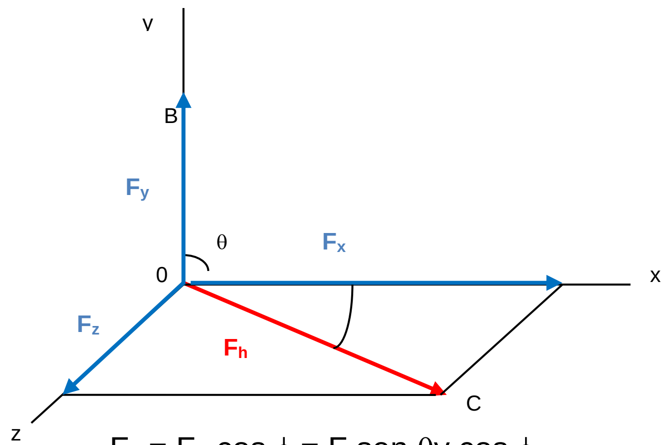
Podemos suponer que una fuerza F se encuentra actuando en el punto de origen 0 del sistema de coordenadas rectangulares cartesianas. Si queremos definir la dirección de la fuerza F, entonces dibujamos el plano vertical uniendo los puntos OBAC que contienen a la fuerza F. El plano dibujado pasa a través del eje vertical *y* de las coordenadas cartesianas, entonces la orientación de la fuerza F está definida por el ángulo ϕ que ésta forma con el plano xy. La dirección de la fuerza F dentro del plano está definida por el ángulo θ_y que F forma con el componente horizontal F_h. De ahí se desprende que las componentes escalares son:



$$F_y = F \cos \theta y \qquad F_h = F \text{ sen } \theta y$$



De lo cual la componente Fh se puede descomponer en dos componentes rectangulares F_x y F_z a lo largo de los ejes *x* y *z* del plano cartesiano respectivamente. De esta manera es posible obtener las componentes escalares correspondientes a F_x y F_z en los ejes antes mencionados.



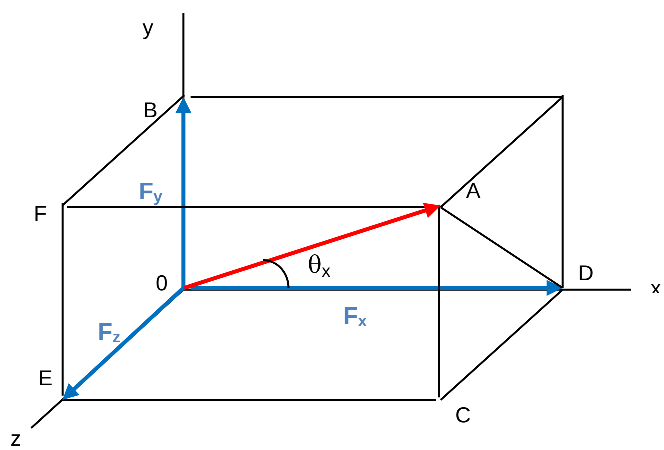
$F_x = F_h \cos \phi = F \operatorname{sen} \theta y \cos \phi$

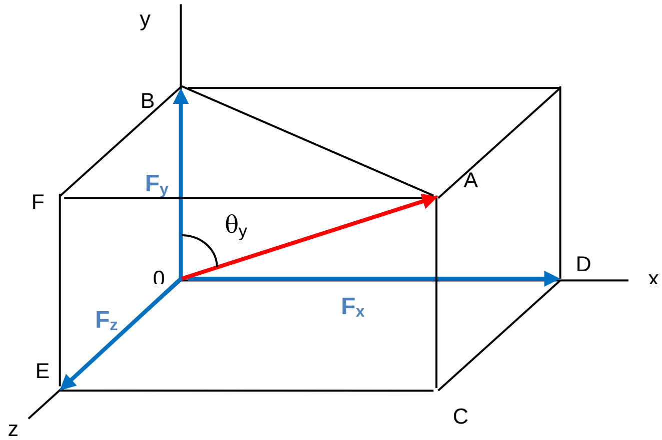
$F_z = F_h \operatorname{sen} \phi = F \operatorname{sen} \theta y \operatorname{sen} \phi$

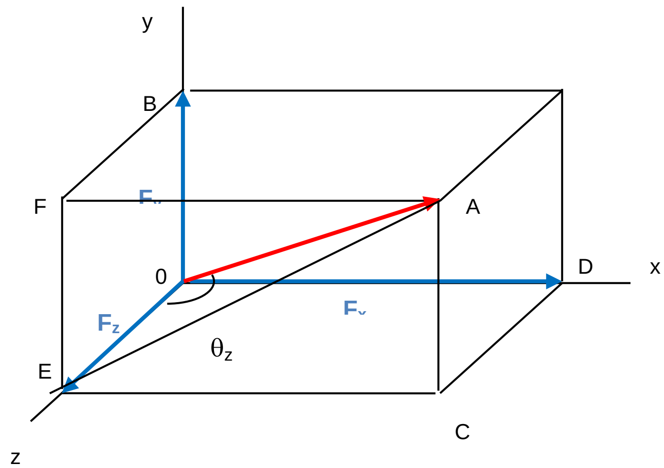
La fuerza F es descompuesta en tres componentes vectoriales rectangulares llamados F_x, F_y y F_z, que están dirigidas a lo largo de los ejes coordenados *x*, *y* y *z*. Con ayuda del teorema de Pitágoras tenemos la siguiente relación:

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2}$$

Si requerimos representar la relación de la fuerza con sus componentes F_x, F_y y F_z, podemos hacerlo a través de una caja que contenga estas componentes como sus aristas y representando la fuerza F por la diagonal 0A de la caja.







Al tener los ángulos θ_x, θ_y y θ_z formados con los ejes *x*, *y* y *z* la fuerza F entonces se tiene:[24]

$$F_x = F \cos \theta_x \qquad F_y = F \cos \theta_y \qquad F_z = F \cos \theta_z$$

Los tres ángulos θ_x, θ_y y θ_z definen la dirección de la fuerza F y llevan el nombre de cosenos directores de la fuerza F, y pueden expresarse de la siguiente forma:

$$F = F_x i + F_y j + F_z k$$

Como en la unidad anterior, un signo positivo nos indicará que la componente rectangular tiene el mismo sentido que el eje que correspondiente y un signo negativo indica que la componente rectangular tiene un sentido contrario del eje.

[24] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 46.

Ejemplo 3.1.1 Una fuerza ejercida de 800 N forma ángulos de 70°, 90°, y 20° con los ejes *x, y* y *z*, respectivamente. Calcular las componentes F_x, F_y y F_z de la fuerza de 800N.

$$F_x = (800\ \text{N}) \cos 70° = 273.62\ \text{N}$$

$$F_y = (800\ \text{N}) \cos 90° = 0.00\ \text{N}$$

$$F_z = (800\ \text{N}) \cos 20° = 751.75\ \text{N}$$

Es necesario tomar en cuenta que los valores de los tres ángulos θ_x, θ_y, y θ_z no son independientes. Además, la suma de los cuadrados de las componentes de un vector es igual a su magnitud elevada al cuadrado, por lo tanto se tiene:[25]

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

Cuando son conocidas las componentes F_x, F_y y F_z de una fuerza F, la magnitud la fuerza F se obtiene a partir de las siguientes relaciones para los cosenos directores[26].

$$\cos \theta_x = \frac{Fx}{F} \qquad \cos \theta_y = \frac{Fy}{F} \qquad \cos \theta_z = \frac{Fz}{F}$$

De estas relaciones es posible encontrarse los ángulos θ_x, θ_y y θ_z, que indican la dirección de la resultante fuerza F.

Ejemplo 3.1.2, una fuerza F tiene las componentes rectangulares $F_x = 100$ N, $F_y = 200$ N y $F_z = -150$ N. Calcular la magnitud de la fuerza F y los ángulos θ_x, θ_y y θ_z que la fuerza F forma con los ejes coordenados.

Solución. Utilizamos el teorema de Pitágoras.

$$F = \sqrt{Fx^2 + Fy^2 + Fz^2}$$

[25] Ferdinand P. Beer *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 47.
[26] Ferdinand P. Beer, *op. cit*., p. 47.

$$F = \sqrt{(100N)^2 + (200N)^2 + (-150N)^2}$$

$$F = 269.56\ N$$

Al sustituir los valores de las componentes rectangulares y la magnitud de la fuerza F en las ecuaciones de cosenos directores tenemos:

$$\cos\theta_x = \frac{Fx}{F} \qquad \cos\theta_y = \frac{Fy}{F} \qquad \cos\theta_z = \frac{Fz}{F}$$

$$\cos\theta_x = \frac{100N}{269.56N} \qquad \cos\theta_y = \frac{200N}{269.56N} \qquad \cos\theta_z = \frac{-150N}{269.56N}$$

Luego calculamos los cocientes y arcos cosenos respectivos obtenemos:

$$\theta_x = 68.20°$$

$$\theta_y = 42.03°$$

$$\theta_z = 123.85°$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Resolver y entregar un reporte de los ejercicios del libro de R. C. Hibbeler 2-63, 22-65, 2-73, 2-75 y 2-80.

3.2. VECTORES CARTESIANOS

Una fuerza F puede ser descompuesta en una componente F_x a lo largo del eje *x* del plano cartesiano, en una componente F_y a lo largo del eje *y* y en una componente F_z a lo largo del eje *z* del mismo plano cartesiano. Las componentes así formadas F_x, F_y y F_z reciben el nombre de componentes rectangulares o vectores cartesianos.

La suma de dos o más fuerzas en el espacio será determinada sumando sus componentes rectangulares o vectores cartesianos. La resultante fuerza R puede ser obtenida con un cálculo similar al de suma de fuerzas coplanares contenidas en un plano. Donde:

$$R = \Sigma F$$

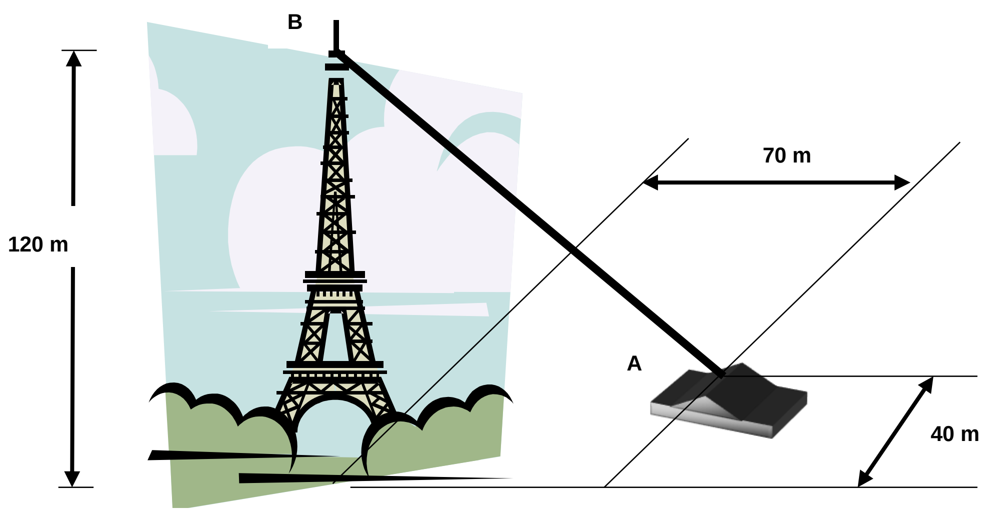
$$R_x = \Sigma F_x; \qquad R_y = \Sigma F_y; \qquad R_z = \Sigma Fz$$

La magnitud de la fuerza resultante y los ángulos directores θ_x, θ_y y θ_z que la fuerza resultante forma con los ejes coordenados cartesianos se obtienen de la siguiente forma:[27]

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$$

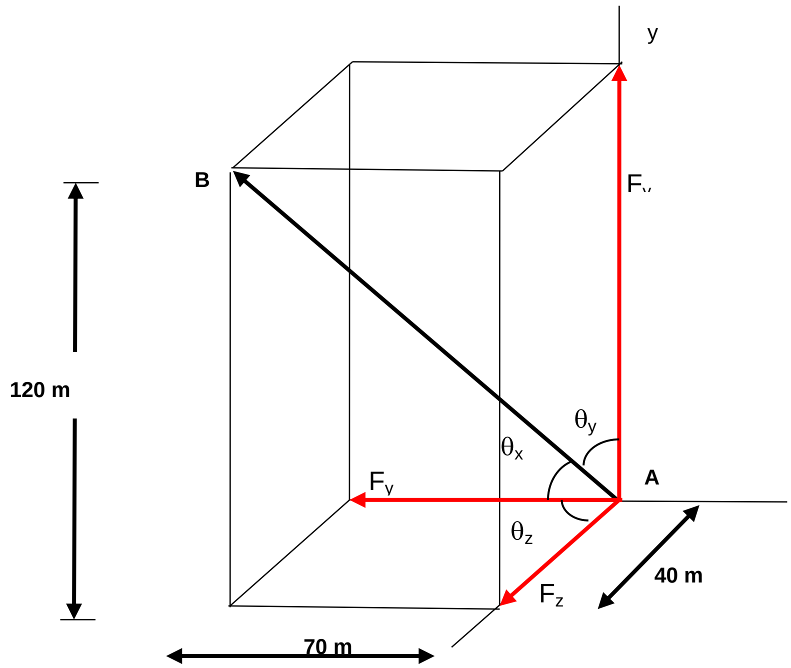
$$\cos \theta_x = \frac{Rx}{R} \qquad \cos \theta_y = \frac{Ry}{R} \qquad \cos \theta_z = \frac{Rz}{R}$$

Ejemplo 3.2.1, el tirante AB de una torre se encuentra anclada por medio de un perno en el punto A. La tensión que ejerce el cable es de 1 000 N sobre la torre. Calcular las componentes rectangulares o vectores cartesianos Fx, Fy y Fz de la fuerza que actúa sobre el perno en el punto A y los ángulos directores θ_x, θ_y y θ_z que está forma con los ejes coordenados.



[27] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 49.

Diagrama de cuerpo libre.



d_x = -70 m $\qquad$ d_y = 120 m $\qquad$ d_z = 40m

La distancia total desde el punto A hasta el punto B es:

AB = d = $\sqrt{(-70)^2 + (120)^2 + (40)^2}$ = 144.57 m

Solución. Al calcular las componentes de la fuerza. Las componentes del vector AB, están dadas y son denotadas por i, j y k que son los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene lo siguiente:

AB = -(70 m)i + (120m)j + (40m)k

El vector unitario $\lambda = \overrightarrow{AB}$ / AB, tenemos:

$$F = F\lambda = F\,\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{1\,000\ N}{144.57\ m}\,\overrightarrow{AB}$$

Al sustituir en la expresión para AB, se tiene:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1\,000\,N}{144.57\,m}\,[-(70\text{ m})i + (120\text{m})j + (40\text{m})k]$$

$$\overrightarrow{AB} = -(484.19\text{ N})i + (830.05\text{ N})j + (276.68\text{ N})k$$

De lo anterior las componentes rectangulares de la fuerza son:

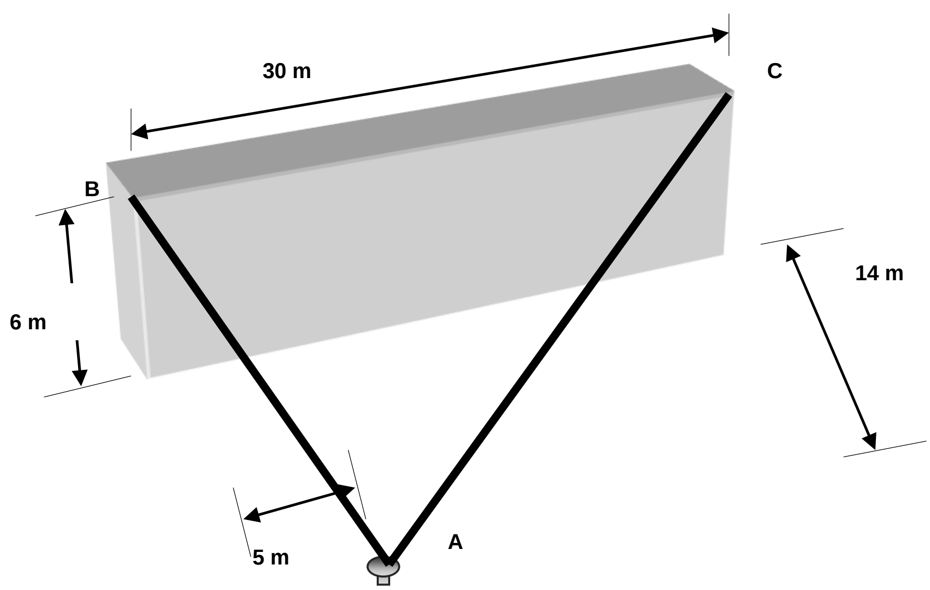
$F_x = -484.19$ N $\quad F_y = 830.05$ N $\quad F_z = 276.68$ N

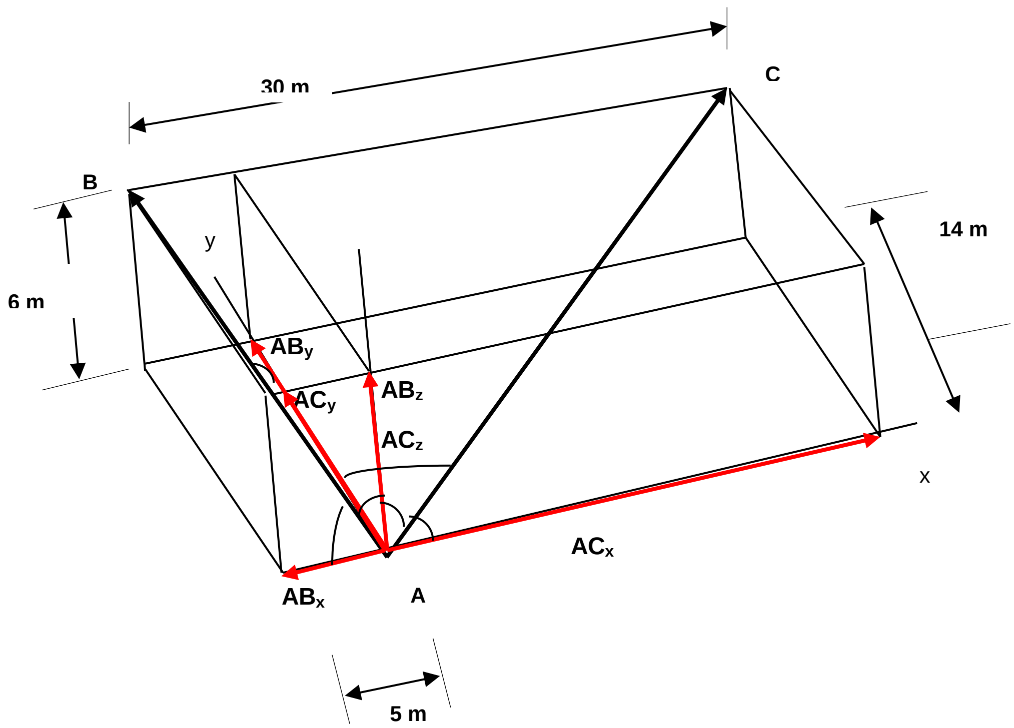
Y con los ángulos directores con el arco coseno tenemos:

$\cos\theta_x = \frac{-484.19\,N}{1\,000\,N}$ $\quad \cos\theta_y = \frac{830.05\,N}{1\,000\,N}$ $\quad \cos\theta_z = \frac{276.68\,N}{1\,000\,N}$

$\cos\theta_x = 118.96°$ $\quad \cos\theta_y = 33.90°$ $\quad \cos\theta_z = 73.94°$

Ejemplo 3.2.2, una muro de concreto está sostenida por los cables AB y AC mostrados. Conociendo que la tensión en el cable AB es de 750 N y la tensión en el cable AC es de 1100 N, calcular la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB y AC sobre la estaca en el punto A.





Solución. La fuerza que ejerce cada cable sobre la estaca en el punto A será descompuesta en sus componentes *x*, *y* y *z*. Como primer paso se determina las componentes y magnitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Describiendo los vectores unitarios i, j y k a lo largo de los ejes coordenados:

$\overrightarrow{AB}$ = -(5m)i + (14m)j + (6m)k = 16.03 m

$\overrightarrow{AC}$ = +(25m)i + (14m)j + (6m)k = 29.27 m

Encontramos los vectores unitarios a lo largo de AB y AC:

$$T_{AB} = T_{AB}\,\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{750\ N}{16.03\ m}\,\overrightarrow{AB}$$

$$T_{AC} = T_{AC}\,\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1100\ N}{29.27\ m}\,\overrightarrow{AC}$$

Al sustituir para encontrar $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se tiene:

$$T_{AB} = \frac{750\ N}{16.03\ m}\,[-(5m)i + (14m)j + (6m)k]$$

T_{AB} = -(233.94N)i + (655.02N)j + (280.72N)k

$T_{AC} = \frac{1100\ N}{29.27\ m}$ [+(25m)i + (14m)j + (6m)k]

T_{AB} = +(939.53N)i + (526.14N)j + (225.49N)k

Entonces calculamos la resultante de las fuerzas ejercidas por los dos cables AB y AC.

R = TAB + TAC = +(705.59N)i + (1181.16N)j + (506.21N)k

Por lo tanto podemos determinar la magnitud y dirección de la resultante.

$$R = \sqrt{Rx^2 + Ry^2 + Rz^2}$$

$$R = \sqrt{(705.59N)^2 + (1181.16N)^2 + (506.21N)^2}$$

R = 1 466.03N

Calculando los cosenos directores obtenemos:

$\cos \theta_x = \frac{Rx}{R}$ $\cos \theta_y = \frac{Ry}{R}$ $\cos \theta_z = \frac{Rz}{R}$

$\cos \theta_x = \frac{705.59\ N}{1\ 466.03\ N}$ $\cos \theta_y = \frac{1181.16\ N}{1\ 466.03\ N}$ $\cos \theta_z = \frac{506.21\ N}{1\ 466.03\ N}$

Y con el arco coseno llegamos a lo siguiente:

$\cos \theta_x = 61.23°$ $\cos \theta_y = 36.32°$ $\cos \theta_z = 69.80°$

Equilibrio de una partícula en el espacio

En concordancia con la definición obtenida en la unidad anterior podemos decir que una partícula A está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre A es igual a cero. Las componentes Rx, Ry y Rz de la resultante R están dadas por las siguientes relaciones:

$R_x = \Sigma F_x$; $R_y = \Sigma F_y$; $R_z = \Sigma Fz$

Al expresar que las componentes de la resultante son iguales a cero, se tenemos que:

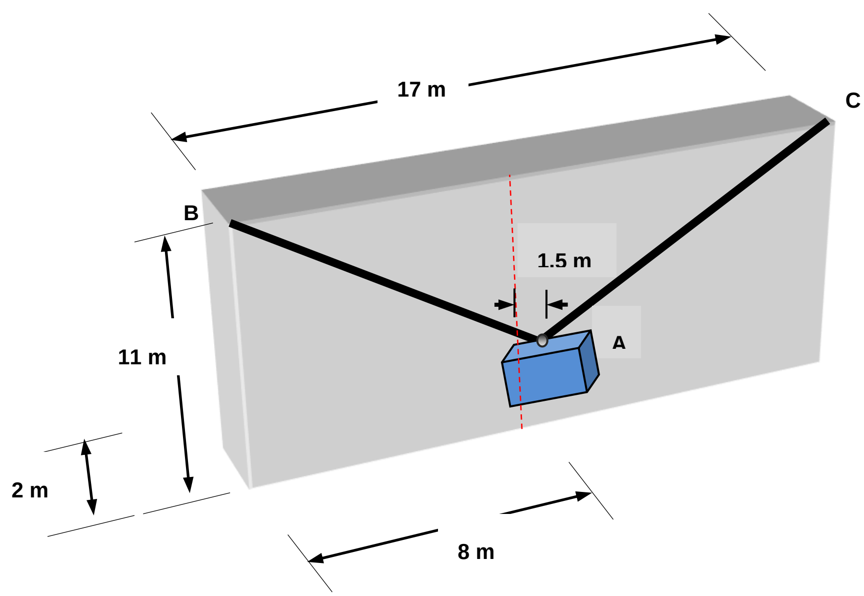
$$\Sigma F_x=0 \qquad \Sigma F_y=0 \qquad \Sigma Fz=0$$

Estas ecuaciones son las que nos representan las condiciones necesarias para establecer el equilibrio de una partícula en el espacio y puede utilizarse para resolver problemas relacionados con el equilibrio de una partícula en el espacio en el cual no involucren más de tres incógnitas.

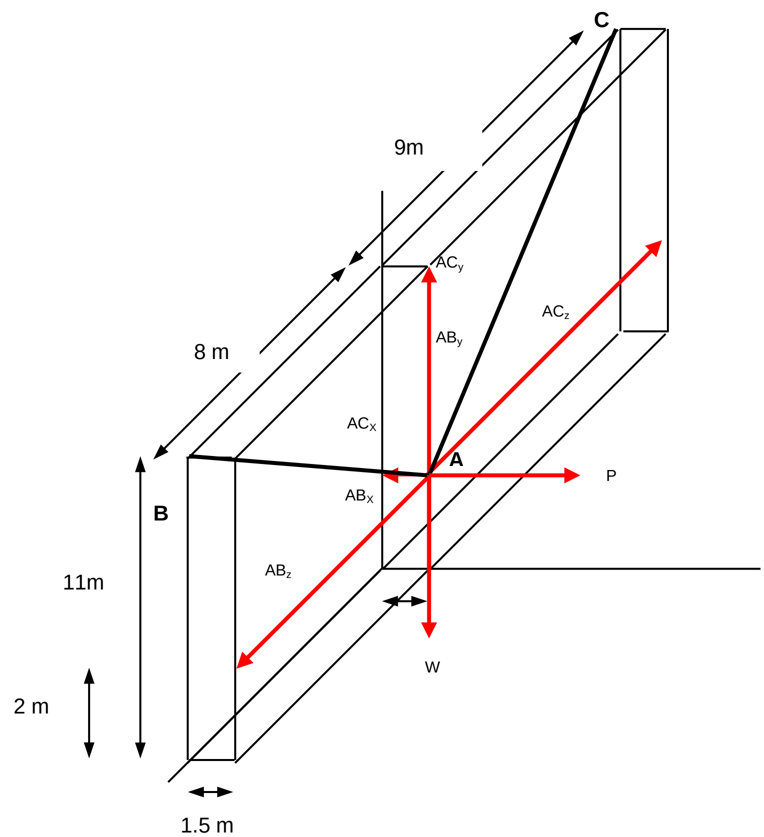
Al resolver este tipo de ejercicios es necesario dibujar una diagrama llamado de cuerpo libre el cual muestra a la partícula en equilibrio y todas las fuerzas que están actuando sobre tal partícula. A partir de esto se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio y resolverlas para tres incógnitas.

Los tipos más comunes de problemas de este tipo, es cuando las incógnitas representarán: *1)* los tres componentes de una sola fuerza o *2)* la magnitud de tres fuerzas cuya direcciones son conocidas.

Ejemplo 3.2.3, un cubo de 150 kg se encuentra colgando por medio de dos cables AB y AC mostrados en la figura, los cuales están unidos a la parte posterior de una pared vertical. Una fuerza horizontal P, perpendicular a la pared, es la que mantiene el cubo en la posición mostrada en la figura. Calcular la magnitud de la fuerza horizontal P y la tensión en los cables AB y AC.



Solución. Al dibujar el diagrama de cuerpo libre se tiene:



Este punto A está sujeto a cuatro fuerzas de las cuales tres son de magnitud desconocida

Con ayuda de los vectores unitarios i, j y k, cada fuerza se puede descomponer en sus componentes rectangulares.

$$P = Pi$$

$$W = -mgj = -(150\ kg)(9.81 m/s^2)j = -1471.50\ Nj$$

Para los tensores T_{AB} y T_{AC}, es necesario determinar las componentes y la magnitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{AB} = -(1.50m)i + (7.00m)j + (9.00m)k = 11.50\ m$$

$$\overrightarrow{AC} = -(1.50m)i + (7.00m)j - (11.00m)k = 13.12\ m$$

$$T_{AB} = \frac{AB}{11.50\ m}\ [-(1.50m)i + (7.00m)j + (9.00m)k]$$

$$T_{AB} = -(0.13T_{AB})i + (0.61T_{AB})j + (0.78T_{AB})k$$

$$\vec{T}_{Ac} = \frac{AC}{13.12\ m}\ [-(1.50m)i + (7.00m)j - (11.00m)k]$$

$$T_{Ac} = -(0.11T_{Ac})i + (0.53T_{Ac})j - (0.84T_{Ac})k$$

Condición de equilibrio. Como el punto A se encuentra en equilibrio, se debe cumplir que:

$$\Sigma F = 0; \qquad T_{AB} + T_{AC} + P + W = 0$$

Por lo tanto sumamos las componentes

Fuerza	Componente *x*, N	Componente *y*, N	Componente *z*, N
T_{AB}	$-0.12T_{AB}$	$+0.74T_{AB}$	$+0.66T_{AB}$
T_{AC}	$-0.12T_{Ac}$	$+0.70T_{Ac}$	$-0.70T_{Ac}$
W	0.00	-1471.50	0.00
P	P	0.00	0.00
	$\Sigma Fx = -(0.12T_{AB}) - (0.12T_{AC}) + P$	$\Sigma Fx = (0.74T_{AB}) + (0.70T_{AC}) – 1471.50$	$\Sigma Fy = +(0.66T_{AB}) - (0.70T_{AC})$

Igualando a cero los coeficientes de i, j y k, es posible escribir tres ecuaciones escalares, las cuales expresan que la suma de las componentes de las fuerzas en *x*, *y* y *z*, son iguales a cero:

$$(\Sigma F_x=0) \qquad -(0.12T_{AB}) - (0.12T_{AC}) + P = 0 \qquad (1)$$

$$(\Sigma F_y=0) \qquad +(0.74T_{AB}) + (0.70T_{AC}) - 1471.50 = 0 \qquad (2)$$

$$(\Sigma F_z=0) \qquad +(0.66T_{AB}) - (0.70T_{AC}) = 0 \qquad (3)$$

Al resolver las ecuaciones (2) y (3) obtenemos:

$$1.40\ T_{AB} - 1471.50 = 0 \qquad T_{AB} = 1050.36\ N$$

Sustituyendo y resolviendo en ecuación (2) obtenemos:

$$(0.74T_{AB})(1\ 050.36\ N) + (0.70T_{AC}) - 1\ 471.50\ N = 0$$

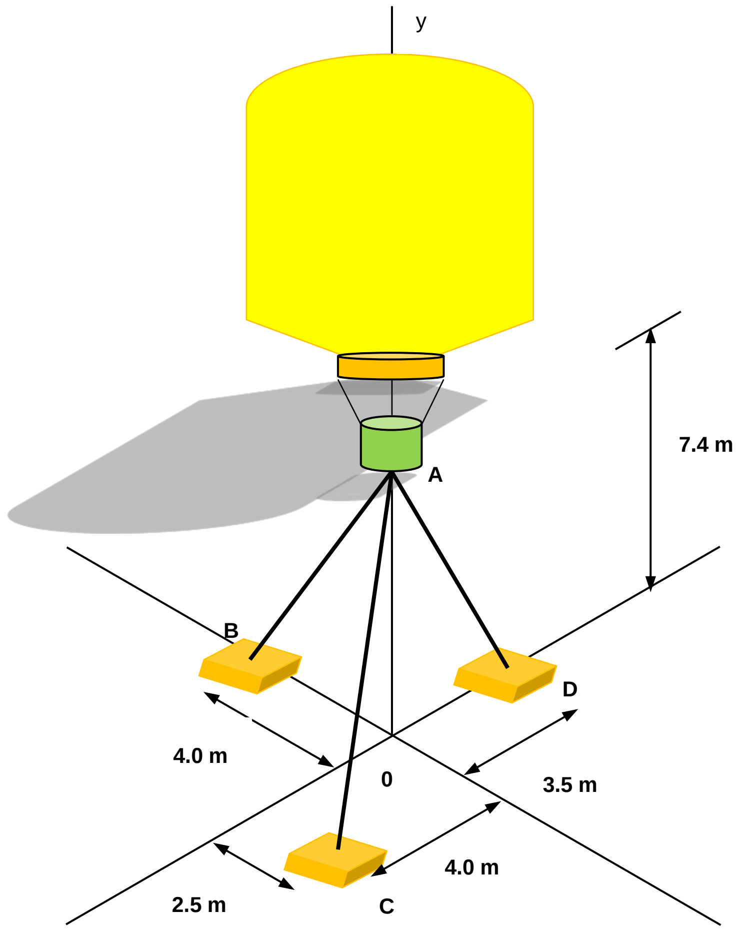
$$T_{AC} = 986.08\ N$$

Sustituyendo y resolviendo en ecuación (1)

$$-(0.12)(1050.36) - (0.12)(986.08) + P = 0$$

$$P = 245.25\ N$$

Ejemplo 3.1.6, son empleados tres cables AB, AC y AD para amarrar al globo mostrado en la siguiente figura. Si se sabemos que la tensión en el cable AB es de 300 N, determinar la fuerza vertical P que el globo ejerce en el punto A.

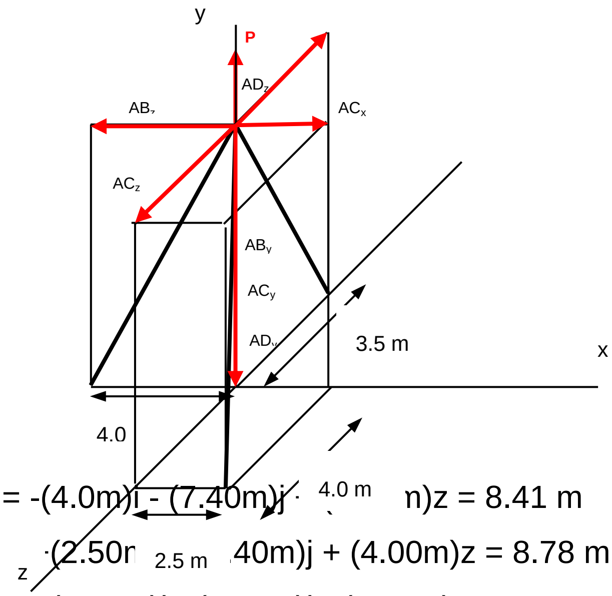


Solución. Con los vectores unitarios i, j y k, cada fuerza se descompone en sus componentes rectangulares.

$$P = Pi$$

Para T_{AB}, T_{AC} y T_{AD}, es necesario determinar las componentes y la magnitud de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Por lo tanto:

Diagrama de cuerpo libre.



$\overrightarrow{AB}$ = -(4.0m)i - (7.40m)j + (0.00m)z = 8.41 m

$\overrightarrow{AC}$ = +(2.50m)i - (7.40m)j + (4.00m)z = 8.78 m

$\overrightarrow{AD}$ = +(0.00m)i - (7.40m)j - (3.50m)z = 8.19 m

$T_{AB} = \frac{300\ N}{8.41\ m}$ [-(4.0m)i - (7.40m)j + (0.00m)z]

T_{AB} = -(142.66 N)i - (263.91 N)j + (0.00 N)z

$T_{Ac} = \frac{\overrightarrow{AC}}{8.78\ m}$ [+(2.50m)i - (7.40m)j + (4.00m)z]

T_{Ac} = +(0.28T_{Ac})i - (0.84T_{Ac})j + (0.46T_{Ac})z

$T_{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{8.19\ m}$ [+(0.00m)i - (7.40m)j - (3.50m)z]

T_{AD} = +(0.00T_{AD})i - (0.90T_{AD})j - (0.43T_{AD})z

Condición de equilibrio. Como el punto A está en equilibrio, se debe cumplir que:

$\Sigma F = 0; \qquad T_{AB} + T_{AC} + T_{AC} + P = 0$

Suma de las componentes

Fuerza	Componente *x*, N	Componente *y*, N	Componente *z*, N
T_{AB}	-142.66	-263.91	+0.00
T_{AC}	+0.28T_{Ac}	-0.84T_{Ac}	+0.46T_{Ac}
T_{AD}	+0.00T_{AD}	-0.90T_{AD}	-0.43T_{AD}

P	0.00	P	0.00
	ΣFx =-(142.66 N) + $(0.28T_{AC})$ + $(0.00T_{AD})$	ΣFx = -(263.91 N) - $(0.84T_{AC})$ - $(0.90T_{AD})$ + P	ΣFy =+(0.00 N) + $(0.46T_{AC})$ - $(0.43T_{AD})$

Igualamos a cero los coeficientes de i, j y k y escribiendo tres ecuaciones escalares las cuales expresan que la suma de las componentes de las fuerzas en *x*, *y* y *z*, son iguales a cero:

$$(\Sigma F_x=0) \qquad -(142.66\ N) + (0.28T_{AC}) + (0.00T_{AD}) = 0 \qquad (1)$$

$$(\Sigma F_y=0) \qquad -(263.91\ N) - (0.84T_{AC}) - (0.90T_{AD}) + P = 0 \qquad (2)$$

$$(\Sigma F_z=0) \qquad +(0.00\ N) + (0.46T_{AC}) - (0.43T_{AD}) = 0 \qquad (3)$$

Al resolver las ecuaciones (1) obtenemos:

$$0.28\ T_{AC} – 142.66\ N = 0 \qquad T_{AC} = 500.75\ N$$

Al sustituir y resolver en la ecuación (3) obtenemos:

$$+(0.00\ N) + (0.46)(500.75N) - (0.43T_{AD}) = 0$$

$$T_{AD} = 533.84\ N$$

Si sustituimos y resolvemos en ecuación (2) tenemos:

$$-(263.91\ N) - (0.84)(500.75N) - (0.90)(533.84) + P = 0$$

$$P = 1\ 168.75\ N$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Resolver y entregar un reporte de los ejercicios del libro de R. C. Hibbeler 2-105, 2-108, 2-111, 2-112 y 2-121.

AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: Subraya el inciso que contenga la respuesta correcta.

1.- Para garantizar el equilibrio, es preciso que las siguientes ecuaciones sean satisfechas. $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$. (   )

2.- Refieren la localización de puntos en el espacio. (   )

3.- Una partícula estará en equilibrio siempre que esté en reposo si originalmente estaba en reposo, o siempre que tenga una velocidad constante si originalmente estaba en movimiento. (   )

4.- Se usa para describir un objeto en reposo. (   )

5.- Utilizado para determinar la magnitud de la fuerza resultante. (   )

6.- Cantidad que tiene tanto magnitud como dirección. Ejemplo: posición, fuerza, momento. (   )

a) Equilibrio de una partícula

b) Equilibrio estático

c) Teorema de Pitágoras

d) Ecuaciones de equilibrio

e) Vector

f) Coordenadas *x*, *y* y *z*

El tirante de una torre está anclada por medio de un perno en A. La tensión de dicho cable es de 800 N.

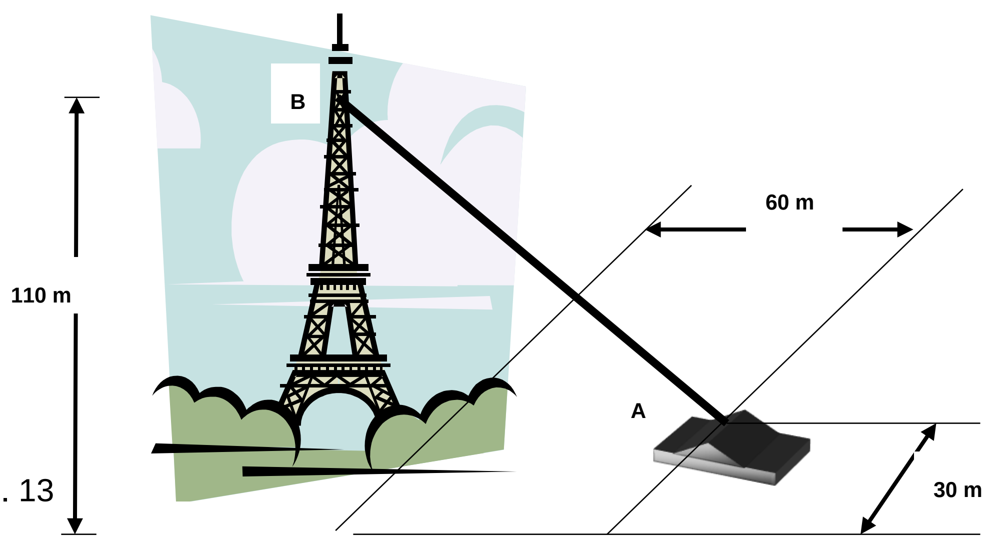


Fig. 13

7.- Del tirante mostrado en la figura 13, ¿Cuáles son los vectores unitarios de los ejes coordenados?

a) AB = +(60 m)i + (110m)j + (30m)k *b)* AB = -(60 m)i + (110m)j - (30m)k

c) AB = -(60 m)i + (110m)j + (30m)k *d)* AB = +(60 m)i + (110m)j - (30m)k

8.- Del tirante mostrado en la figura 13, ¿Cuáles es el vector $\overrightarrow{AB}$?

a) $\overrightarrow{AB}$ =+(372.55 N)i + (683.01 N)j + (186.28 N)k

b) $\overrightarrow{AB}$ =-(372.55 N)i - (683.01 N)j + (186.28 N)k

c) $\overrightarrow{AB}$ =-(372.55 N)i + (683.01 N)j + (186.28 N)k

d) $\overrightarrow{AB}$ =-(372.55 N)i + (683.01 N)j - (186.28 N)k

9.- Del tirante mostrado en la figura 13, ¿Cuál es el ángulo directores θx?

a) 127.75° *b)* 137.75° *c)* 217.75° *d)* 117.75°

10.- Del tirante mostrado en la figura 13, ¿Cuál es el ángulo directores θy?

a) 41.38° *b)* 31.38° *c)* 51.38° *d)* 21.38°

11.- Del tirante mostrado en la figura 13, ¿Cuál es el ángulo directores θz?

a) 86.53° *b)* 96.53° *c)* 66.53° *d)* 76.53°

Respuestas

1. d 2. f 3. a 4. b 5. c 6. e 7. c 8. c 9. d 10. b
11. d

UNIDAD 4

PROPIEDADES GEOMÉTRICAS Y MECÁNICAS DE SECCIONES

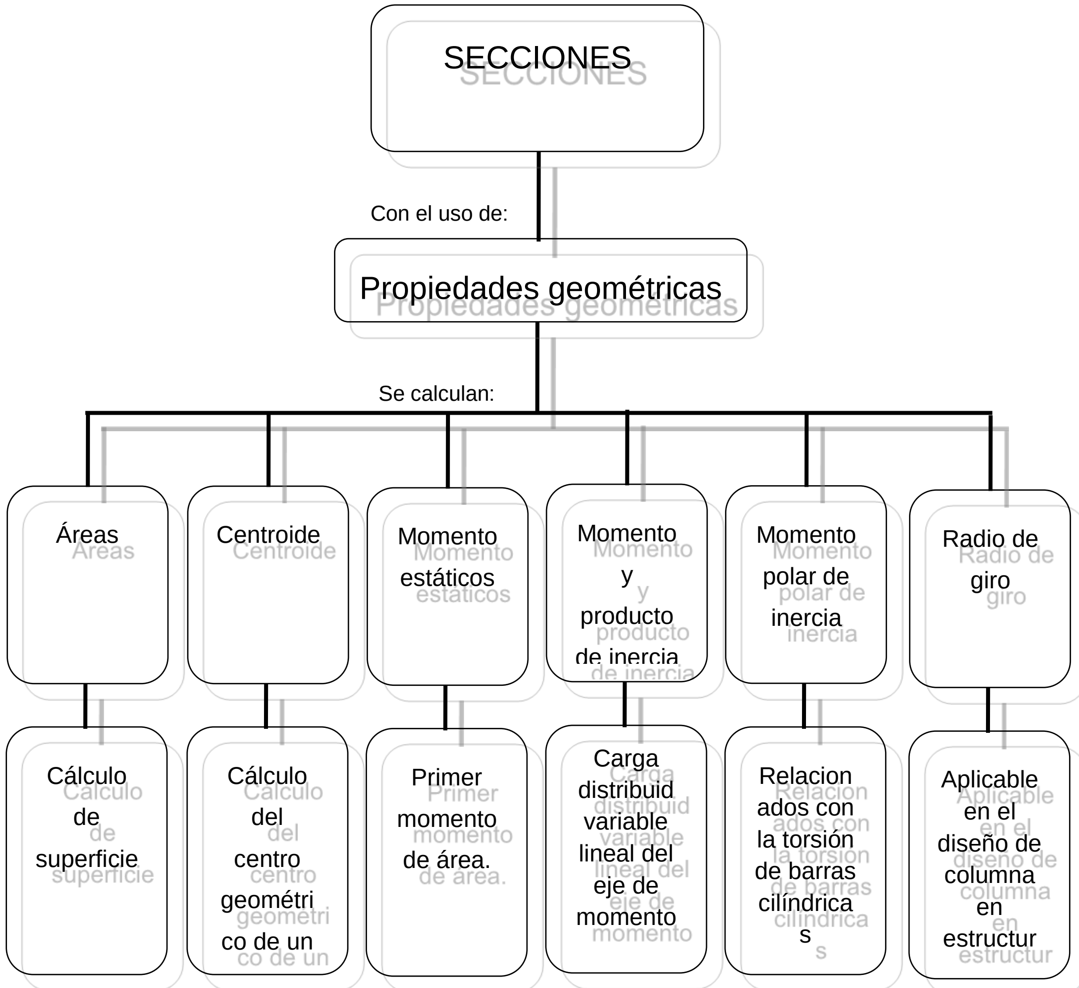
OBJETIVO

Calcular las propiedades geométricas de los cuerpos para determinar áreas, centroides, momentos estáticos, momentos y productos de inercia, momentos polares de inercia.

TEMARIO

4.1 ÁREAS
4.2 CENTROIDES
4.3 MOMENTO ESTÁTICO
4.4 MOMENTO Y PRODUCTO DE INERCIA
4.5 MOMENTO POLAR DE INERCIA
4.6 RADIO DE GIRO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Se dice que la atracción ejercida por la Tierra sobre un cuerpo rígido en estado de reposo o en estado de movimiento puede llegar a representarse por medio de una sola fuerza llamada W. Esta fuerza que representa la fuerza de gravedad o también llamado peso del cuerpo deberá aplicarse en el centro de gravedad de los cuerpos.[28]

También se expresa que la Tierra ejerce una fuerza gravitatoria sobre cada una de las partículas que constituyen a un cuerpo. Por tal motivo, la acción que la Tierra produce sobre un cuerpo rígido se debe representar por un gran número de fuerzas pequeñas distribuidas uniformemente sobre todo el cuerpo.[29]

En la cuarta unidad de nuestro libro de estática, se reemplazará la totalidad de tales fuerzas pequeñas uniformemente distribuidas por una sola fuerza equivalente W y se determinará el centro de gravedad, esto es quiere decir, el punto de aplicación donde se encuentra la resultante W.

Cuando se determinan los centroides de un área, se simplifica el análisis de vigas sujetas a cargas distribuidas y la determinación de fuerzas ejercidas sobre superficies rectangulares que se encuentran sumergidas como ejemplo podemos mencionar las compuertas hidráulicas y elementos de una presa.[30]

[28] http://estaticavhjo.blogspot.com/2009/03/estatica.html
[29] *Ibidem*.
[30] *Ibidem*.

4.1. ÁREA

Al considerar una placa en forma horizontal, ésta puede dividirse en un número *n* de elementos pequeños. Las coordenadas en un plano cartesiano del primer elemento son representadas por x_1 y y_1, las coordenadas de un segundo elemento se representa por x_2 y y_2. Cuando son fuerzas ejercidas por la Tierra sobre los elementos de la placa en mención serán representadas por ΔW_1, ΔW_2, … , ΔW_n. Estas fuerzas o pesos indicados están dirigidos hacia el centro de la Tierra, pero para todos los propósitos fijados de manera práctica, se puede suponer que esas fuerzas se encuentran paralelas y no inclinadas entre sí. Por lo tanto, la resultante encontrada es una sola fuerza en la misma dirección. La magnitud de la fuerza ejercida por la tierra W se obtiene sumando las magnitudes de los pesos.[31]

$$\Sigma F_z: \quad W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + , \ldots , + \Delta W_n$$

Para obtener las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del punto G donde debe aplicarse la resultante W, se escribe que los momentos de W con respecto a los ejes x y y son iguales a la suma de los momentos correspondientes de los pesos elementales, esto es:

$$\Sigma M_y: \quad \bar{x}W = x_1\Delta W_1 + x_2\Delta W_2 + \ldots + x_n\Delta W_n$$

$$\Sigma M_x: \quad \bar{y}W = y_1\Delta W_1 + y_2\Delta W_2 + \ldots + y_n\Delta W_n$$

Y si incrementamos el número de elementos en los cuales se ha dividido la placa y simultáneamente se disminuye el tamaño de cada elemento se obtiene en el límite, las siguientes expresiones.[32]

$$W = \int dW \qquad \bar{x}W = \int x\, dW \qquad \bar{y}W = \int y\, dW$$

Estas ecuaciones definen el peso W y las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad G de una placa plana.[33]

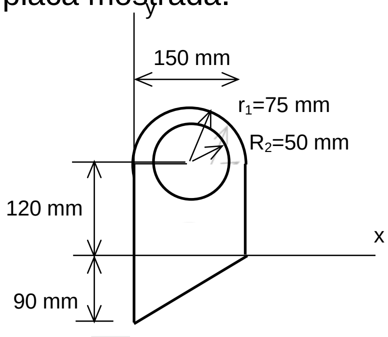
---

[31] Ferdinand P. Beer *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 211. Y en http://estaticavhjo.blogspot.com/2009/03/estatica.html

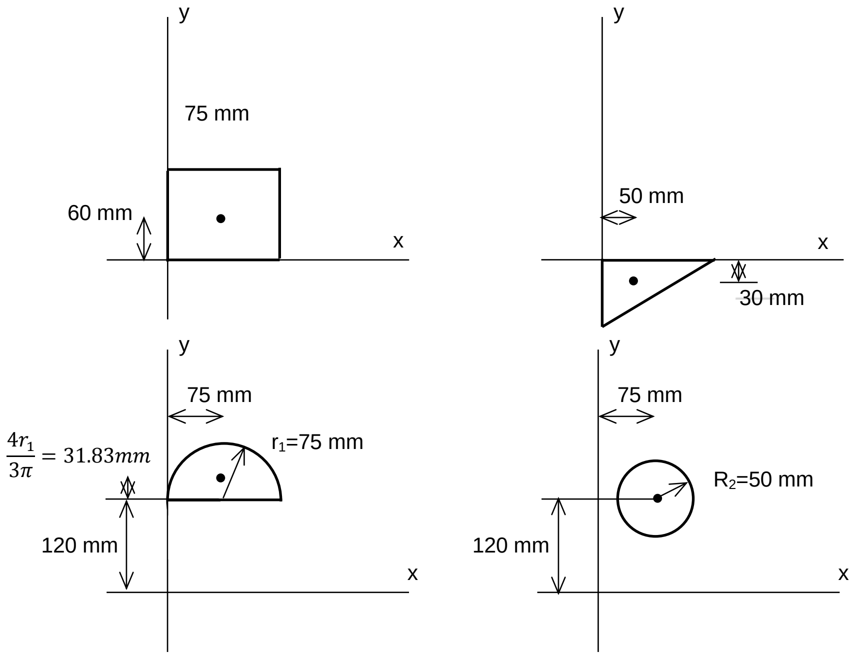
[32] *Ibidem*, p. 211. Y en Y en http://estaticavhjo.blogspot.com/2009/03/estatica.html

[33] http://estaticavhjo.blogspot.com/2009/03/estatica.html

Ejemplo 4.1, para el área plana mostrada en la siguiente figura, calcular el área de la placa mostrada.



Solución. El área se obtiene sumando un rectángulo, un triángulo y un semicírculo para después restar un círculo. Utilizando los ejes coordenados como se muestran, se calcula el área.[34]



Partes de la placa	Operaciones	Área en mm^2
Rectángulo	(120)(150) =	18,000
Triángulo	(90)(150)/2 =	6,750
Semicírculo	$\pi(75)^2/2$ =	8,835.73
Círculo	$-\pi(50)^2$=	-7,853.98

[34] Y en http://www.scribd.com/doc/15771073/Capitulo-Muestra-Estatica-9e-05m

ÁREA TOTAL	$\Sigma A=$	25,731.75

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Calcular las áreas y entregar un reporte de los ejercicios del libro de Ferdinand P. Beer 5.1, 5.3 y 5.7.

4.2. CENTROIDES

En el caso de tratarse de una placa plana homogénea con espesor uniforme, la magnitud ΔW del peso de cada elemento de la placa puede expresarse como:[35]

$$\Delta W = \gamma t\ \Delta A$$

donde $\gamma =$ peso específico (peso por unidad de volumen) del material.

$t =$ espesor de la placa.

$\Delta A=$ área del elemento.

De la misma forma es posible expresar la magnitud W del peso de toda la placa como

$$W = \gamma t A$$

donde A es ahora el área total de la placa.

En el SI, se expresar la gravedad g en unidades N/m^3, al espesor t en metros y a las áreas ΔA y A en metros cuadrados; por lo tanto los pesos ΔW y W estarán expresados en newtons.

Al sustituir a ΔW y a W en las ecuaciones de momento y dividiendo a todos los términos entre γt, obtenemos:

$$\Sigma My: \quad \bar{x}A = x_1\Delta A_1 + x_2\Delta A_2 + \ldots + x_n\Delta A_n$$

[35] Ferdinand P. Beer *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 212. Y en http://www.scribd.com/doc/23753874/fuerza-distribuidas

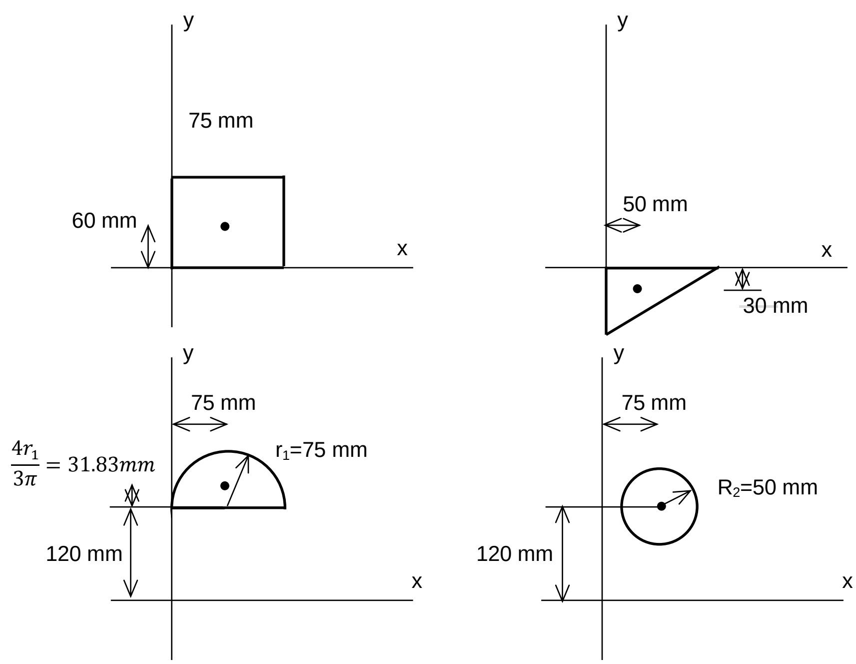
$$\Sigma Mx: \quad \bar{y}A = y_1\Delta A_1 + y_2\Delta A_2 + \ldots + y_n\Delta A_n$$

Al incrementar el número de elementos en los cuales se divide el área A y al mismo tiempo disminuir el tamaño de cada elemento, se obtiene el límite:[36]

$$\bar{x}A = \int x\,dA \qquad \bar{y}A = \int y\,dA$$

Estas ecuaciones definen las coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ del centro de gravedad de una placa homogénea. El punto cuyas coordenadas son $\bar{x}$ y $\bar{y}$ también se conocen como centroide C del área A de la placa. Cuando la placa no es homogénea, estas ecuaciones no se utilizan para determinar el centro de gravedad de la placa en cuestión, sin embargo, éstas aún pueden definir al centroide de área.[37]

Ejemplo 4.2, para el área plana mostrada en la figura 4.1, encontrar el centroide.



Solución:

Partes de la placa	Área en mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm^3	$\bar{y}A$, mm^3
Rectángulo	18,000	75	60	1,350,000.00	1,080,000.00
Triángulo	6,750	50	-30	337,500.00	-202,500.00

[36] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 212. Y en http://www.scribd.com/doc/23810579/Momentos-de-Inercia

[37] http://www.scribd.com/doc/23753874/fuerza-distribuidas

Semicírculo	8,835.73	75	151.83	662,679.75	1,341,528.89
Círculo	-7,853.98	75	120	-589,048.50	-942,477.60
TOTAL	25,731.75			1,761,131.25	1,276,551.29

Dentro de las ecuaciones que definen un centroide de un área tenemos.

$$\bar{X} = \frac{\Sigma \bar{x} A}{\Sigma \mathrm{A}} = \frac{1{,}761{,}131.25}{25{,}731.75} = \quad 68.44 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma \bar{y} A}{\Sigma \mathrm{A}} = \frac{1{,}276{,}551.29}{25{,}731.75} = \quad 49.61 \text{ mm}$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Determinar centroides y entregar un reporte de los ejercicios del libro de Ferdinand P. Beer 5.1, 5.3 y 5.7.

4.3. MOMENTO ESTÁTICO

La integral $\int x\, dA$ se conoce como el primer momento del área A con respecto del eje *y* y se representa por Q_y.

Similarmente, la integral $\int y\, dA$ define el primer momento de A con respecto del eje *x* y se representa por Q_x. Así tenemos:[38]

$$Q_y = \int x\, dA \qquad Q_x = \int y\, dA$$

Los momentos del área A pueden ser expresados como los productos del área con las coordenadas de su centroide:

$$Q_y = \bar{x}A \qquad Q_x = \bar{y}A$$

Entonces se concluye que las coordenadas del centroide de un área pueden obtenerse dividiendo los primeros momentos de un área entre el área misma.

[38] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 213. Y en http://estaticavhjo.blogspot.com/2009/03/estatica.html

Los primeros momentos de un área son útiles para determinar los esfuerzos de corte en vigas sujetas a cargas transversales.

Si el centroide de un área está localizado sobre un eje coordenado, entonces el primer momento del área con respecto de ese eje es igual a cero. Inversamente, si el primer momento de un área con respecto de un eje coordenado es igual a cero, entonces el centroide del área está localizado sobre ese eje.

Ejemplo 4.3., para el área plana mostrada en la figura 4.1, Describir el primer momento de área.

Solución:

Partes de la placa	Área en mm^2	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}$A, mm^3	$\bar{y}$A, mm^3
Rectángulo	18,000	75	60	1,350,000.00	1,080,000.00
Triángulo	6,750	50	-30	337,500.00	-202,500.00
Semicírculo	8,835.73	75	151.83	662,679.75	1,341,528.89
Círculo	-7,853.98	75	120	-589,048.50	-942,477.60
TOTAL	25,731.75			**1,761,131.25**	**1,276,551.29**

Usando las ecuaciones, describimos:

$$Q_x = \Sigma\bar{y}A = 1{,}276{,}551.29 \text{ mm}^3$$

$$Q_y = \Sigma\bar{x}A = 1{,}761{,}131.25 \text{ mm}^3$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Describir los primeros momentos de área y entregar un reporte de los ejercicios del libro de Ferdinand P. Beer 5.1, 5.3 y 5.7.

4.4. MOMENTO Y PRODUCTO DE INERCIA

Si consideramos una viga de sección transversal uniforme la cual está sometida a dos pares iguales y opuestos que están aplicados en cada uno de los extremos de la viga, se dice que la viga se encuentra en flexión pura.

La magnitud de la resultante R de las fuerzas ΔF que actúan sobre toda la sección está dada por:[39]

$$R = \int ky\, dA = k \int y\ dA$$

La última integral obtenida se conoce como el primer momento Q_x de la sección con respecto del eje x. La magnitud M de del momento flexionante debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M_x = y\ \Delta F = ky^2 \Delta A$ de las fuerzas elementales. Integrando en la sección tenemos:

$$M = \int ky^2\, dA = k \int y^2 dA$$

A esta última integral obtenida se conoce como segundo momento o momento de inercia de la viga con respecto del eje x y se representa por I_x.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Realizar un reporte de lectura de la aplicación del tema dentro de la licenciatura.

4.5. MOMENTO POLAR DE INERCIA

Una integral de gran importancia en los problemas relacionados con la torsión de barras cilíndricas y en los problemas relacionados con la rotación de placas es la siguiente:[40]

$$J_0 = \int r^2\, dA$$

donde r es la distancia desde 0 hasta el área elemental dA. Esta integral es el momento polar de inercia del área A con respecto del "polo" 0.

[39] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 457. Y en http://www.scribd.com/doc/23744097/Centroides-y-Momentos-de-Inercia, http://www.scribd.com/doc/23753874/fuerza-distribuidas, y en http://www.scribd.com/doc/23810579/Momentos-de-Inercia

[40] Ferdinand P. Beer, *et al*, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 459.

El momento polar de inercia de un área dada puede calcularse a partir de los momentos rectangulares de inercia I_x e I_y del área si dichas cantidades ya son conocidas. De hecho, observando que $r^2 = x^2 + y^2$ y se escribe:

$$J_0 = \int r^2\, dA = J_0 = \int (x^2 + y^2)\, dA = \int y^2\, dA + \int x^2\, dA$$

esto es,

$$J_0 = I_x + I_y$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Realizar un reporte de lectura de la aplicación del tema dentro de la licenciatura.

4.6. Radio de giro

Si consideramos un área A que tiene un momento que tiene un momento de inercia I_x con respecto del eje *x*. Imaginamos que se ha concentrado esta área en una tira delgada paralela al eje *x*. Si el área A, concentrada de esta forma, debe tener el mismo momento de inercia con respecto del eje *x*, la tira debe ser colocada a una distancia k_x a partir del eje *x*, donde k_x está definida por la relación:[41]

$$I_x = k_x^2 A$$

Resolviendo para k_x, se escribe

$$K_x = \sqrt{\frac{Ix}{A}}$$

Se hace referencia a la distancia k_x como el radio de giro del área con respecto el eje *x*. En forma similar se pueden definir los radios de giro k_y y k_0; así se escribe

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{Iy}{A}}$$

[41] Ferdinand P. Beer et al, *Mecánica vectorial para ingenieros*, p. 460. Y en http://www.slideshare.net/guest562045e/fuerza-distribuida y http://www.scribd.com/doc/23810579/Momentos-de-Inercia

$$J_0 = k_0^2 A \qquad\qquad k_0 = \sqrt{\frac{J0}{A}}$$

Si se escribe la ecuación en términos de los radios de giro, se encuentra que

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2$$

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Modalidad escolarizada y cuatrimestral

1. Realizar un reporte de lectura de la aplicación del tema dentro de la licenciatura.

AUTOEVALUACIÓN

Instrucciones: Subraya el inciso que contenga la respuesta correcta.

1.- Punto que ubica el peso resultante de un sistema de partículas. (   )

2.- Utilizado para estudiar problemas que implican el movimiento de la materia bajo la influencia de una fuerza. (   )

3.- Punto que define el centro geométrico de un objeto. (   )

4.- Significa el producto de inercia del área con respecto a los ejes *x*, *y* y *z*. (   )

5.- Integral que reviste de importancia con la torsión de barras cilíndricas y rotación de placas. (   )

6.- Se relaciona con el momento de inercia y con el primer momento del área. (   )

a) Centroide

b) Centro de masa

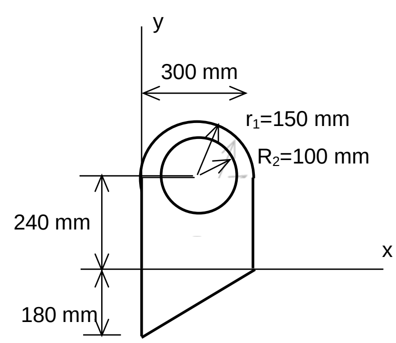
c) Radio de giro

d) $I_{XY} = \int_{XY}\ dA$

e) $JO = \int r^2\ dA$

f) Centro de gravedad

Considere la siguiente figura mostrada.



7.- De la figura plana mostrada, ¿Cuál es su área?

a) 142,927 mm^2 *b)* 122,927 mm^2 *c)* 102,927 mm^2 *d)* 162,927 mm^2

8.- De la figura plana mostrada, ¿Cuál es su centroide $\bar{X}$?

a) $\bar{X}$=146.88 mm *b)* $\bar{X}$=156.88 mm *c)* $\bar{X}$=136.88 mm

d)$\bar{X}$=166.88 mm

9.- De la figura plana mostrada, ¿Cuál es su centroide $\bar{Y}$?

a) $\bar{Y}$=109.22 mm *b)* $\bar{Y}$=99.22 mm *c)* $\bar{Y}$=89.22 mm

d)$\bar{Y}$=79.22 mm

10.- De la figura plana mostrada, ¿Cuál es su primer momento de inercia Q_x?

a) 10,212,407.89 mm^3 *b)* 11,212,407.89 mm^3 *c)* 12,212,407.89 mm^3

d) 13,212,407.89 mm^3

11.- De la figura plana mostrada, ¿Cuál es su primer momento de inercia Q_y?

a) 15,089,048.50 mm^3 *b)* 11,089,048.50 mm^3 *c)* 16,089,048.50 mm^3

d) 14,089,048.50 mm^3

Respuestas

1. f 2. b 3. a 4. d 5. e 6. c 7. b 8. c 9. b 10. a 11. d

BIBLIOGRAFÍA

Hibbeler, Russel C., *Mecánica vectorial para ingenieros–estática,* Pearson Educación, México, 2004.

Pytel, Andrew; Kiusalaas, Jaan, *Estática,* International Thomson, México. 1999.

Beer, Ferdinand P.;Johnston E. Russel, *Mecánica vectorial para ingenieros-Estática,* Mc. Graw-Hill, 1997.

Spiegel, M.R., *Mecánica teórica,* Serie Schaum, Editorial McGraw-Hill, 1976.

GLOSARIO

Armadura plana. Tienen un solo plano y a menudo son usadas para soportar techos y puentes.

Armadura simple. La forma más sencilla para prevenir un colapso establecer un triángulo.

Armadura. Estructura compuesta de miembros esbeltos unidos entre sí en sus puntos extremos.

Centro de gravedad. Punto que ubica el peso resultante de un sistema de partículas.

Centro de masa. Utilizado para estudiar problemas que implican el movimiento de la materia bajo la influencia de una fuerza.

Centroide. Punto que define el centro geométrico de un objeto.

Convención de signos. Establecido para las componentes que tienen un sentido lo largo de los ejes coordenados positivos son considerados como escalares positivos.

Coordenadas x, y y z. Refieren la localización de puntos en el espacio.
Cuerpo rígido. Se considera una combinación de un gran número de partículas en la que todas las partículas permanecen a una distancia fija unas de otras antes y después de aplicar una carga.

Diagrama de cuerpo libre. Sirve para tabular datos necesarios y enfocar atención en aspectos físicos de los problemas. Es importante al resolver problemas de equilibrio.

Dinámica. Trata con el movimiento acelerado de los cuerpos.

Dirección de una fuerza. Está especificada por el ángulo que forma su línea de acción con uno de los ejes, o por medio de un triángulo pendiente.

Ecuaciones de equilibrio. Para garantizar el equilibrio, es preciso que las siguientes ecuaciones sean satisfechas. $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma F_z = 0$

Equilibrio de una partícula. Una partícula estará en equilibrio siempre que esté en reposo si originalmente estaba en reposo, o siempre que tenga una velocidad constante si originalmente estaba en movimiento.

Equilibrio estático. Se usa para describir un objeto en reposo.

Escalar. Cantidad caracterizada por un número positivo o negativo. Ejemplo: masa, volumen y longitud.

Estática. Trata con el equilibrio de los cuerpos, esto es, aquellos que están en reposo o se mueven con velocidad constante.

Fuerza concentrada. Representa el efecto de una carga que se supone está actuando en un punto sobre un cuerpo.

Homogeneidad dimensional. Cada término debe ser expresado en las mismas unidades.

Idealizaciones. Los modelos o idealizaciones, se usan en mecánica para simplificar la aplicación de la teoría.

$I_{XY} = \int_{XY}$ dA. Significa el producto de inercia del área con respecto a los ejes *x*, *y* y *z.*

JO = $\int r^2$ dA. Integral que reviste de importancia con la torsión de barras cilíndricas y rotación de placas.

Ley del paralelogramo. Dos vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Las componentes forman los lados del paralelogramo y la resultante es la diagonal.

Longitud. Necesaria para localizar la posición de un punto en el espacio y así describir el tamaño de un sistema físico.

Magnitud del momento. Determina mediante la fuerza por la distancia perpendicular desde el punto 0 hasta la línea de acción de la fuerza.

Masa. Fuerza considerada como un “empuje” o un “jalón” ejercido por un cuerpo sobre otro.

Mecánica. Rama de la física que trata acerca del estado de reposo o movimiento que están sometidos a la acción de fuerzas.

Método de nudos. Utilizado para analizar o diseñar una armadura, se obtienen la fuerza en cada uno de sus miembros.

Miembros de fuerza cero. Son miembros que no soportan carga, se usan para incrementar la estabilidad de la armadura.

Momento de inercia. Se origina siempre que se relaciona el esfuerzo normal que actúa sobre la sección transversal de una viga elástica.

Momento de par. Producido por dos fuerzas no colineales que son iguales pero opuestas. Su efecto es producir una rotación en una dirección específica.

Momento estático. Momento que proviene de una viga de sección transversal uniforme.

Momento. De una fuerza con respecto a un punto o eje proporciona una medida de la tendencia de la fuerza a ocasionar que un cuerpo gire alrededor del punto o eje.

Partícula. Una partícula tiene masa, pero de un tamaño que puede ser ignorada. Cuando un cuerpo es idealizado como un partícula, los principios de la mecánica se reducen a una forma simplificada ya que la geometría del cuerpo no estará implicada en el análisis del problema.

Peso. Dos partículas o cuerpos cualesquiera tienen una fuerza (gravitatoria) de atracción mutua que actúa entre ellas. En el caso de una partícula localizada en la superficie de la Tierra, la única fuerza gravitatoria de cierta magnitud es aquella que está entre la Tierra y la partícula.

Placa unión. Soldadura en los miembros unidos a una placa común.

Primera Ley de Newton. Una partícula originalmente está en reposo o que se mueve en línea recta con velocidad constante, permanecerá en este estado siempre que no esté sometida a una fuerza que no está balanceada.

Principio de transmisibilidad. Dice que una fuerza F tiene la propiedad de un vector deslizante y puede actuar en cualquier punto a lo largo de su línea de acción y producirá el mismo momento con respecto al punto 0.

Radio de giro. Se relaciona con el momento de inercia y con el primer momento del área.

Regla de la mano derecha. Indica que la dirección de M_0 se obtienen cuando los dedos de la mano derecha son enrollados en forma tal que sigan el sentido de rotación que ocurriría si la fuerza pudiera rotar alrededor del punto 0.

Resultante de fuerzas coplanares. Se utilizan métodos para determinar la resultante de varias fuerzas en el mismo plano.

Segunda Ley de Newton. Una partícula sobre la que actúa una fuerza desbalanceada F experimenta una aceleración a que tiene el mismo sentido que la fuerza y una magnitud que es directamente proporcional a la fuerza.

Teorema de Pitágoras. Utilizado para determinar la magnitud de la fuerza resultante.

Teorema de Varignon. Establece que el momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto.

Tercera Ley de Newton. Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.

Tiempo. Es concebido como una sucesión de tiempo.

Unidades FPS. Sistema empleado comúnmente en Estados Unidos.

Unidades SI. El sistema internacional de unidades, es una versión moderna del sistema métrico que ha recibido reconocimiento mundial.

Vector. Cantidad que tiene tanto magnitud como dirección. Ejemplo: posición, fuerza, momento.

Vectores cartesianos i y j. Se usan para designar las direcciones de los ejes x y y, respectivamente.

Vectores cartesianos. Representa las componentes de una fuerza en términos de vectores unitarios cartesianos.