Álgebra

CARLOS MARCIAL RICO CARMONA

Red Tercer Milenio

ÁLGEBRA

ÁLGEBRA

CARLOS MARCIAL RICO CARMONA

RED TERCER MILENIO

AVISO LEGAL

Viveros de Asís 96, Col. Viveros de la Loma, Tlalnepantla, C.P. 54080, Estado de México.

Datos para catalogación bibliográfica

Carlos Marcial Rico Carmona

Álgebra

ISBN 978-607-733-173-5

Primera edición: 2012

Revisión pedagógica: Aurora Leonor Avendaño Barroeta

Revisión editorial: Ma. Eugenia Buendía López

DIRECTORIO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Con base en el principio de aprender matemáticas mediante el razonamiento, valorando y asimilando los conocimientos, en el presente libro éstos últimos se tratan de forma clara y sencilla, permitiendo al alumno comprender los principios que la denominada era de la información exige.

El contenido del presente libro proporciona las bases necesarias del álgebra para un adecuado desarrollo académico y profesional, ya que el álgebra, y específicamente el método algebraico, está presente en todas las áreas de las matemáticas. Primero, se explica la teoría de conjuntos para una mejor comprensión del tema y de las siguientes unidades.

En la unidad dos, los números reales son descritos y construidos de forma simple, sin perder el rigor necesario para los propósitos formales de las matemáticas, sentando las bases para este curso y los posteriores.

La siguiente unidad sobre expresiones algebraicas se dedica a las manipulaciones algebraicas, que son la base conceptual y material de las siguientes unidades.

Los números complejos se definen y trabajan en la cuarta unidad; y en la cinco, se describen las ecuaciones lineales, cuadráticas y sus soluciones reales o complejas, finalizando con los sistemas de ecuaciones lineales.

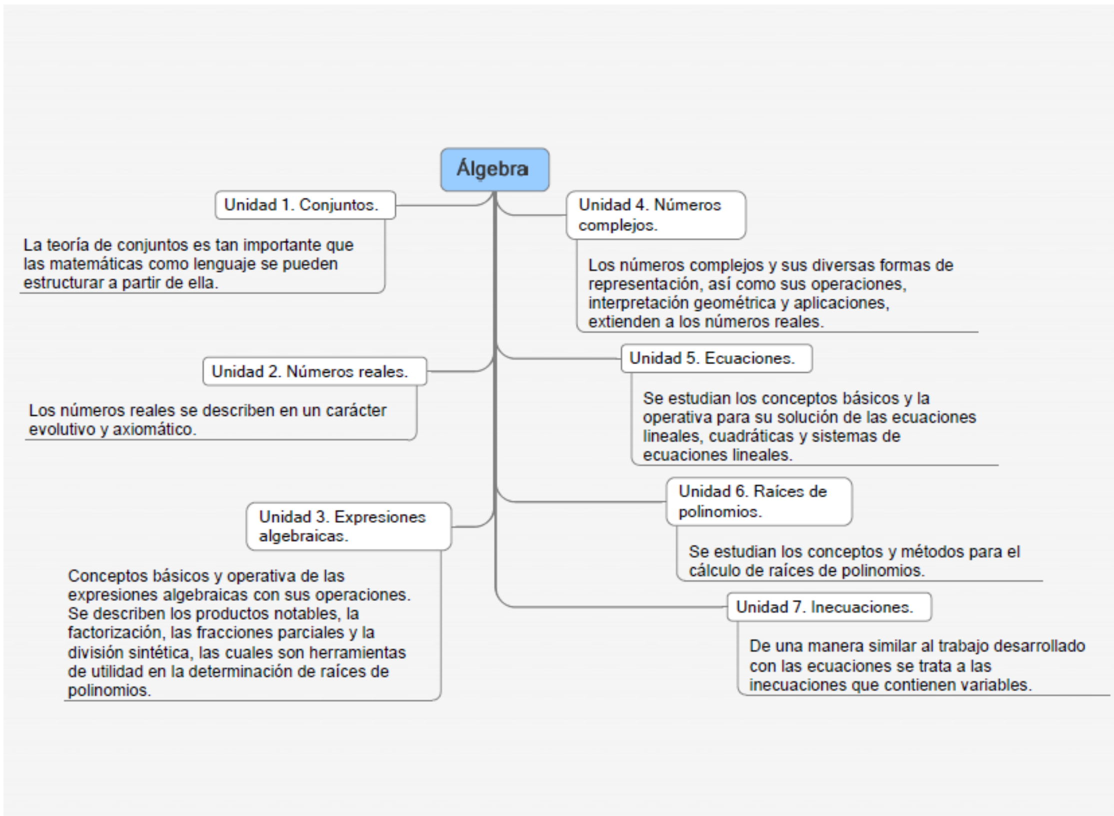
Las raíces de polinomios se detallan en la unidad seis; parte central de esta unidad la constituye el teorema fundamental del álgebra.

Finalmente, en la unidad siete se definen y trabajan los conceptos de las desigualdades, sus propiedades y soluciones en lo individual, y como sistemas de desigualdades.

OBJETIVO GENERAL DE APRENDIZAJE

El estudiante analizará y aplicará los conceptos básicos del álgebra para utilizarlos en la resolución de ecuaciones, inecuaciones, sistemas de ecuaciones lineales y álgebra de los polinomios. Asimismo, estos conceptos permitirán al alumno iniciar en el estudio de la física y de las matemáticas aplicadas.

MAPA CONCEPTUAL



UNIDAD 1

CONJUNTOS

OBJETIVO

El estudiante identificará las bases de la teoría de conjuntos como fundamento principal para una mejor comprensión de las matemáticas.

TEMARIO

1.1 NOCIÓN DE CONJUNTO Y ELEMENTO

1.2 NOTACIÓN, FORMAS DE DESCRIPCIÓN, SUBCONJUNTOS E IGUALDAD DE CONJUNTOS

1.3 OPERACIONES CON CONJUNTOS

1.3.1 Unión

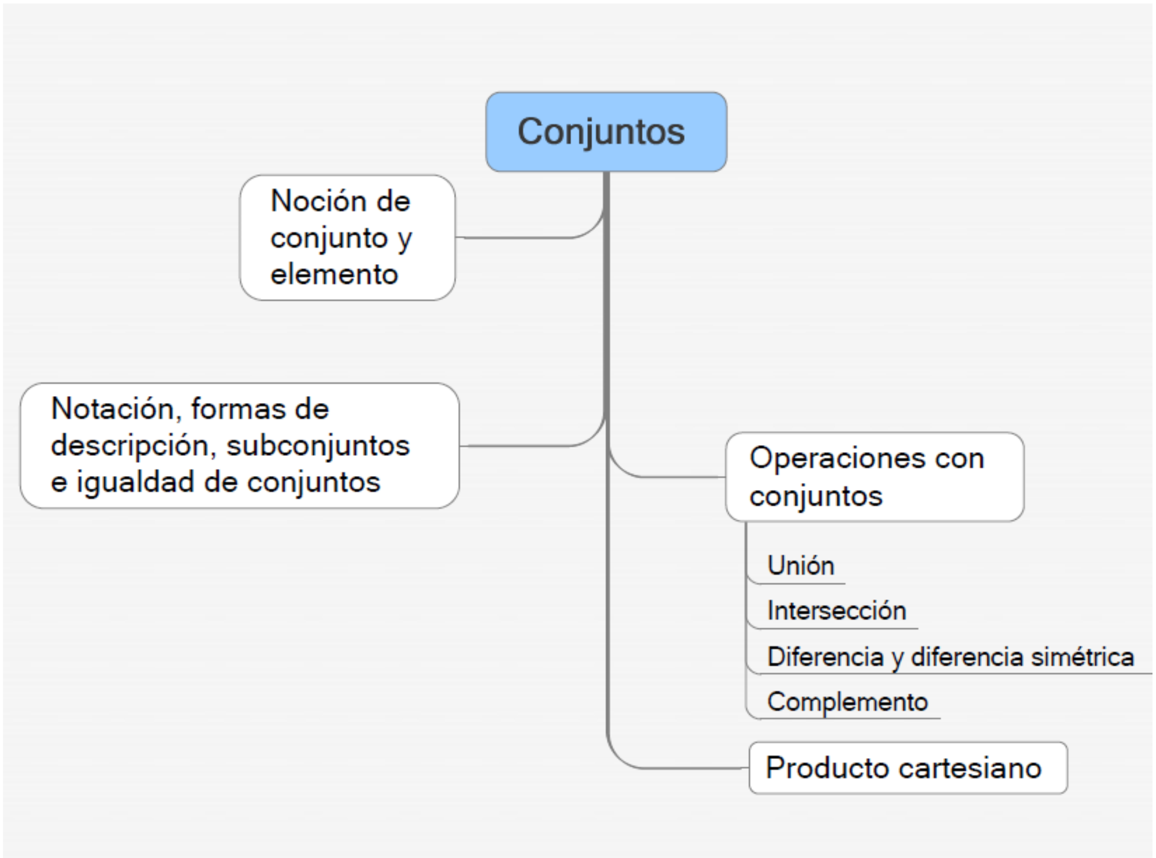
1.3.2 Intersección

1.3.3 Diferencia y diferencia simétrica

1.3.4 Complemento

1.4 PRODUCTO CARTESIANO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudiarán los fundamentos de la teoría de conjuntos de una forma activa, con el objetivo de comprender los conceptos relativos a la definición de conjuntos, notación y representación, y las operaciones básicas entre ellos. La unidad concluye con el concepto de producto cartesiano.

El estudio de la teoría de conjuntos es tan importante que las matemáticas como lenguaje se pueden estructurar a partir de ella.

1.1 Noción de conjunto y elemento

Un conjunto es cualquier colección de objetos del mismo tipo. A los objetos de este conjunto se les denomina elementos del conjunto.

En estos términos, se puede hablar por ejemplo del conjunto de alumnos de la materia de álgebra, del conjunto de libros de la biblioteca o del conjunto de usuarios de telefonía celular de cierta marca, por citar sólo algunos. En el primer caso, los elementos son los alumnos; en el segundo, los elementos son los libros; y en el tercer caso, los elementos son los usuarios.

Se debe observar en cada uno de los ejemplos anteriores, que los conjuntos están bien definidos en el sentido de obedecer a una regla y satisfacer una característica o propiedad especifica. Por lo tanto, un conjunto es cualquier colección de objetos perfectamente definidos.

1.2 Notación, formas de descripción, subconjuntos e igualdad de conjuntos

Los conjuntos se denotan por letras mayúsculas A, B, C,… y los elementos del conjunto se denotan por letras minúsculas a, b, c,… números 1, 2, 3,… o combinación de ambos.

Los elementos de un conjunto se colocan entre llaves { } y separados por comas, por ejemplo, los elementos del conjunto de los números naturales impares menores de 6 son {1, 3, 5}. En este ejemplo, se ha descrito al conjunto por extensión, que es enumerando o listando toda la colección de objetos.

La descripción de un conjunto también se puede hacer por comprensión, es decir, describiendo la propiedad que caracteriza al conjunto. En el ejemplo descrito: los números naturales impares menores de 6. En este caso se utiliza además, la notación abstracta:

$$A = \{x|P(x)\}$$

que se lee como: “A es el conjunto de los elementos x tales que cumplen la condición P(x)”. El símbolo “|"se lee: “tal que”.

Así, si se asigna por A al conjunto de los números naturales impares menores de 6, A se describe de la siguiente manera:

A = {1,3,5}

A es el conjunto de los números naturales impares menores de 6.

$$A = \{x | los\ numeros\ naturales\ menores\ de\ 6\}$$

Para indicar la pertenencia de un elemento a en un conjunto A se utiliza el símbolo $\in$ y la no pertenencia usa el símbolo $\notin$. Con estos términos, algunos ejemplos de conjuntos son los siguientes:

1) La colección de materias de la carrera de sistemas computacionales del primer cuatrimestre.
2) Las letras de la palabra cuatrimestre = {c,u,a,t,r,i,m,e,s,t,r,e} = {c,u,a,t,r,i,m,s,e }.
3) A = {1, 2, 3, 4, 5, a, b, c, x, y, z }.
4) N= el conjunto de los números naturales = {1, 2, 3, 4, 5, …}.
5) Z = el conjunto de los números enteros = {… -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …}.
6) Q = el conjunto de los números racionales = { $\frac{a}{b}$ | $a, b \in Z$, $b \neq 0$ }.
7) R = el conjunto de los números reales.
8) La colección de los números naturales e impares = {2, 4, 6, 8, 10, 12, … } = { $x \mid x \in N; x\ es\ par$}.
9) El conjunto de los dígitos del sistema de numeración binario = {0, 1}.
10) El conjunto de unidades del e-book de álgebra = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Al considerar A y B un par de conjuntos cualquiera. Se dice que A está contenido en B o que A es un subconjunto de B o que A es una parte de B, y se denota $A \subseteq B$, si todo elemento de A lo es también de B.

Dos conjuntos A y B son iguales, denotado $A = B$ si tienen los mismos elementos, es decir, se cumple simultáneamente que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo: $A \subseteq A$.

Se tienen un par de conjuntos de notación especial: el conjunto vacío $\boldsymbol{\phi}$ y el conjunto universo $\boldsymbol{U}$. El primero no contiene elementos y el segundo contiene a todos los elementos de la situación en estudio, es decir, cuando se trabaja con varios conjuntos suponemos que todos son subconjuntos de este conjunto universo.

De esta manera, el conjunto vacío $\boldsymbol{\phi}$ es subconjunto de todos los conjuntos: $\boldsymbol{\phi} \subseteq \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\phi} \subseteq \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\phi} \subseteq \boldsymbol{\phi}$.

Todos los conjuntos son subconjuntos del conjunto universo: $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{U}, \boldsymbol{\phi} \subseteq \boldsymbol{U}, \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{U}$.

Si A es un conjunto, entonces el conjunto de todos los subconjuntos de A se denomina conjunto potencia de A y se denota por ρ(A).

1.3 Operaciones con conjuntos

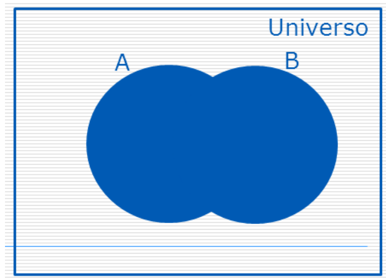
Con el trabajo previo, a continuación se indican las siguientes definiciones de operación entre conjuntos. Para esto, consideremos a los conjuntos A y B dentro de un conjunto U. Además, se usarán los diagramas de Venn que son la representación gráfica que muestra la relación entre los elementos y los propios conjuntos. Para esto, cada conjunto se representa por medio de un círculo inscrito en un rectángulo que representa su conjunto universal. Así, todas las operaciones entre conjuntos se pueden representar gráficamente con el fin de obtener una idea más intuitiva.

1.3.1 Unión

La unión de los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ denotado $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos que contiene a todos los elementos de $\boldsymbol{A}$ y a todos los elementos de $\boldsymbol{B}$. La notación descriptiva de esta operación es:

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \{ x \mid x \in \boldsymbol{A} \ o \, x \in \boldsymbol{B} \}$$

Es conveniente señalar que la palabra “o” significa que x está en alguno de los dos conjuntos. La representación gráfica mediante diagramas de Venn de la operación $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$, se muestra en la siguiente figura:

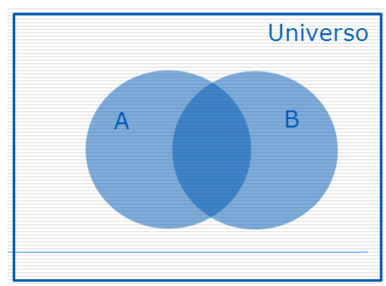


1.3.2 Intersección

La intersección de los conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ denotado $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ es el conjunto de los elementos comunes que contienen tanto $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{B}$. La notación descriptiva de esta operación es:

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \{ x \mid x \in \boldsymbol{A} \ y \ x \in \boldsymbol{B} \}$$

En este caso, la letra “y” significa que x está en ambos conjuntos. La representación gráfica mediante diagramas de Venn de la operación $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ se muestra en la siguiente figura:



Ejemplo: Si A= { 1,2,3,4 } y B = { 2,3,4,5 } y C = { 1,5 } , determinar: A U B, A U C, A ∩ B, A ∩ C y B ∩ C.

Solución:

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \} = \{ 1,2,3,4,5 \}$$

$$A \cup C = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in C \} = \{ 1,2,3,4,5 \}$$

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B\} = \{ 2,3,4 \}$$

$$A \cap C = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in C\} = \{ 1 \}$$

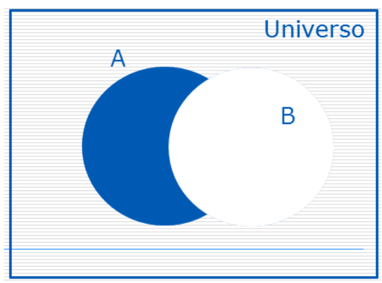
$$B \cap C = \{ x \mid x \in B \text{ y } x \in C\} = \{ 5 \}$$

1.3.3 Diferencia y diferencia simétrica

La diferencia entre los conjuntos A y B denotado A - B es el conjunto de los elementos de A pero que no se encuentran en B:

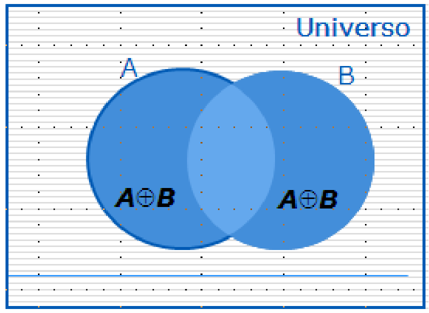
$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

La representación gráfica mediante diagramas de Venn de la operación A - B se muestra en la siguiente figura:



La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B denotado $A \oplus B$ es el conjunto de los elementos de A pero que no se encuentran en B. La expresión que lo describe, y su diagrama de Venn es:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

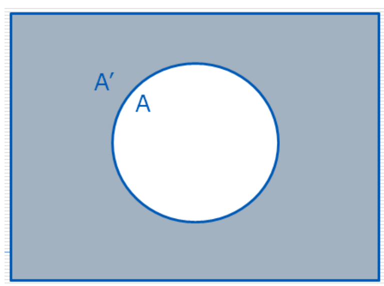


1.3.4 Complemento

El complemento de un conjunto A se denota por A' o por A^c y es el conjunto que contiene al conjunto universo y que no contiene ningún elemento de A, es decir, contiene todos los elementos que no pertenecen, a $\notin$ A.

$$A' = A^c = \{\, x \mid x \in U \ y \ x \notin A \}$$

La representación gráfica mediante diagramas de Venn de la operación A^c se muestra en la siguiente figura:



Ejemplo: Si $A = \{ 1,2,3,4 \}$ y $B = \{ 2,3,4,5 \}$ determinar A-B, B-A, $A \oplus B A \oplus B$, A^c y B^c siendo U el conjunto de los números naturales.

Solución:

A-$B = \{ x \mid x \in A \ y x \notin B \} = \{ 1 \}$

B-$A = \{ x \mid x \in B y x \notin A \} = \{ 5 \}$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{ 1\} \cup \{ 5\} = \{ 1,5 \}$

$B \oplus A = (B - A) \cup (A - B) = \{ 5\} \cup \{ 1\} = \{ 5,1\}$

$A^c = \{ x \mid x \in \boldsymbol{U} \ y x \notin \boldsymbol{A}\}$ = { 5, 6, 7, 8, 9, ….}

$B^c = \{ x \mid x \in \boldsymbol{U} \ y x \notin \boldsymbol{B}\}$ = {1, 6, 7, 8, 9, …}

1.4 PRODUCTO CARTESIANO

Si se considera a $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos conjuntos cualquiera, el conjunto cartesiano de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ denotado como $\boldsymbol{A}$ x $\boldsymbol{B}$ es el conjunto formado por todas las parejas ordenadas (a, b) tales que a $\in \boldsymbol{A}$ y b $\in \boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \{(a, b) \mid a \in \boldsymbol{A}; b \in \boldsymbol{B}\}$$

A cada una de las parejas anteriores se le denomina par ordenado.

Por ejemplo, si se considera al conjunto $\boldsymbol{D}$ como el conjunto de todas las caras de un dado y $\boldsymbol{M}$ las caras de una moneda, entonces $\boldsymbol{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\boldsymbol{M} = \{cara, cruz\}$. El producto cruz $\boldsymbol{D}$ x $\boldsymbol{M}$ está formado por las duplas:

$$\{ (1, cara), (1, cruz), (2, cara), (2, cruz), (3, cara),$$
$$(3, cruz), (4, cara), (4, cruz), (5, cara), (5, cruz), (6, cara), (6, cruz) \}$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Dados A y B conjuntos de un conjunto universal U, entonces las operaciones de unión e intersección definidas en esta unidad cumplen la siguiente matriz de propiedades:

Nombre de la propiedad	Operación de unión	Operación de intersección
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Complementariedad	$A \cup A' = \boldsymbol{U}$	$A \cap A' = \boldsymbol{\phi}$

Realiza la demostración de estas propiedades a partir de la definición de las operaciones de unión e intersección, y efectúa la visualización del resultado mediante diagramas de Venn.

AUTOEVALUACIÓN

1. Enumera los elementos de los siguientes conjuntos:
   a. $A = \{x | x \text{ es una vocal de la palabra "palabra"}\}$
   b. $A = \{x | x \text{ es una cara de una moneda}\}$
   c. $A = \{x | x \in \mathbf{Z} \text{ negativos}, -10 < x < 10\}$

2. Considera los siguientes conjuntos:

   $\boldsymbol{U} = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ y } x < 100\}$

   $\boldsymbol{A} = \{ x \mid x \in \mathbf{N} \text{ y } x \text{ es par y } x < 10\}$

   $\boldsymbol{B} = \{1,2,4,5,6,7\}$

   Desarrollando las operaciones indicadas, verifica las siguientes propiedades:

Propiedad	*Unión*	*Intersección*
Elemento nulo	$A \cup \phi = A$	$A \cap \phi = \phi$
Elemento universal	$A \cup U = U$	$A \cap U = A$
Leyes de Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$

3. En un sistema de coordenadas cartesianas x-y, la circunferencia con centro en el punto (0,0) y radio 2 consta de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación: $x^2 + y^2 = 4$. Describe la circunferencia en términos de conjuntos:

RESPUESTAS

1.

a. $\{a\}$.

b. $\{aguila, sol\}$.

c. $\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$.

2.

Se debe observar que el conjunto $\boldsymbol{A}$ por extensión es:

$\boldsymbol{A}$= { $x \mid x \in \boldsymbol{N}\ y\ x\ es\ par\ y\ x < 10$} = $\boldsymbol{A}$= { 2,4,6,8}, por lo tanto:

Propiedad	*Unión*	*Intersección*
Elemento nulo	$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A}$ { 2,4,6,8} $\cup\ \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}$ { 2,4,6,8} $\cap\ \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}$
Elemento universal	$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$ { 2,4,6,8} $\cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}$ { 2,4,6,8} $\cap\ \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}$
Leyes de Morgan	$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}'$ $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$={ 1,2,4,5,6,7,8} $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})'$={ 3,9,10,11,…} y por otro lado: $\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}'$={ 1,3,5,7,9,10,…} ∩{ 3,8,9,10,…}= { 3,9,10,11,…}	$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{B}'$ $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ = { 2,4,6,8}∩{1,2,4,5,6,7 }={2,4,6 } entonces $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})'$={1,3,5,7,8,9,...} Por otro lado: $\boldsymbol{A}' \cup \boldsymbol{B}'$={ 1,3,5,7,9,10,…} ∪{ 3,8,9,10,…}= {1,3,5,7,8,9,...}

3. $\{(x,y)\ \in \boldsymbol{R} \mid x^2 + y^2 = 4\}$.

UNIDAD 2

NÚMEROS REALES

OBJETIVO

El estudiante identificará a los números reales como uno de los conjuntos más importantes, para ello se iniciará con un enfoque intuitivo, continuando con una visión axiomática hasta llegar a una interpretación geométrica de este conjunto como elementos de una recta numérica.

TEMARIO

2.1 CONCEPTOS GENERALES

2.2 CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL

2.2.1 Definición de números primos

2.2.2 Método de inducción matemática

2.3 NÚMEROS ENTEROS

2.3.1 Definición a partir de los números naturales

2.3.2 Operaciones fundamentales y sus propiedades

2.4 NÚMEROS RACIONALES

2.4.1 Algoritmo de división

2.4.2 Operaciones fundamentales y sus propiedades

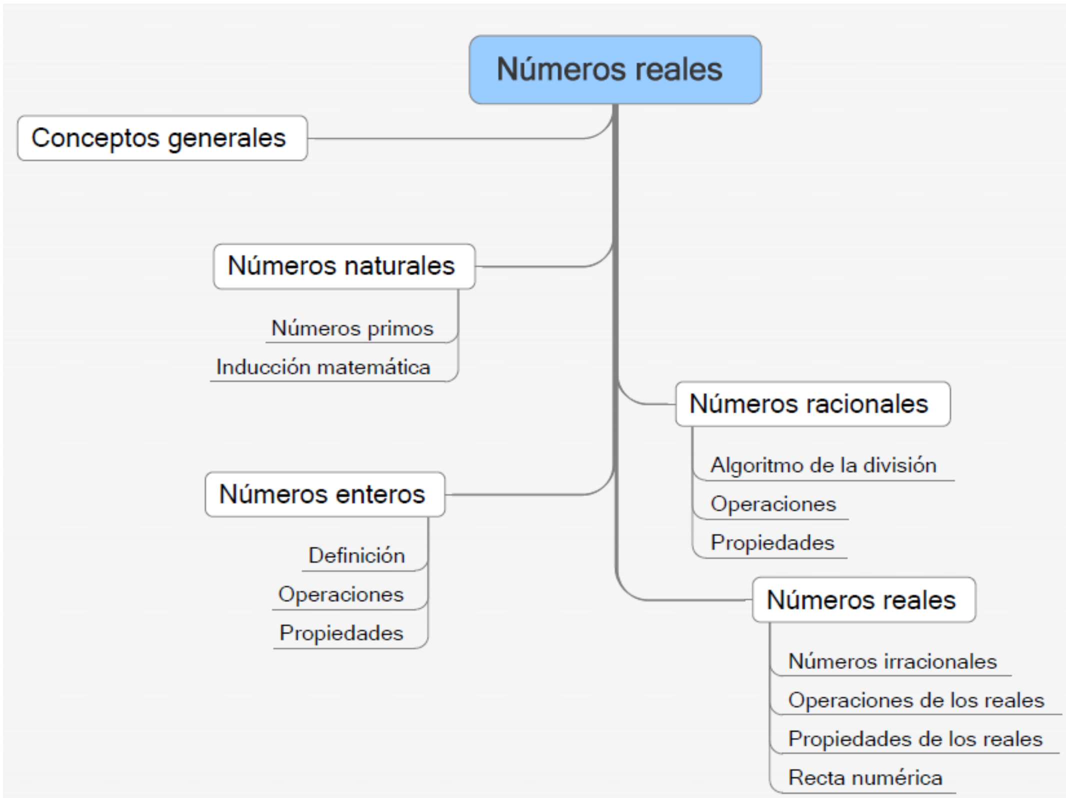
2.5 NÚMEROS REALES

2.5.1 Números irracionales

2.5.2 Operaciones fundamentales y sus propiedades

2.5.3 Recta numérica

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudiarán los números reales, describiendo un carácter evolutivo y axiomático. En el primer caso, se expondrán en el siguiente orden: números naturales, enteros, racionales e irracionales, culminando con los números reales. En el segundo caso, se presentan a los números reales con sus operaciones algebraicas y sus propiedades, con un enfoque formal y asequible.

2.1 CONCEPTOS GENERALES

El primer encuentro con los números surge de la necesidad de cuantificar mediante los números naturales, que son un conjunto infinito, formado por los símbolos: { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...}. En esta cuantificación, para disminuir se agregan los números enteros: {... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,...}. Este conjunto de símbolos se obtiene a partir de los números naturales añadiendo los opuestos para la operación suma.

En esta evolución, el siguiente paso es particionar, de este modo surgen los números racionales. Los números racionales se obtienen a partir de los enteros añadiendo los inversos multiplicativos. En notación de conjuntos, los racionales se definen como sigue: $\left\{\frac{a}{b}\,|a, b \in Z, b \neq 0\right\}$.

Los números que no admiten una representación como racionales, es decir, que no se pueden expresar como cociente de dos números enteros se denominan números irracionales, por ejemplo el número π.

Por último, la unión de los números racionales con los irracionales define al conjunto de los números reales.

2.2 CONCEPTO DE NÚMERO NATURAL

Los números naturales se presentan en todas las actividades del ser humano, y se definen como cualquiera de los números que permiten contar los elementos de un conjunto. Como se indicó, este conjunto está formado por los símbolos: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...} y se denota por la letra N.

2.2.1 Definición de números primos

Un número natural es primo si es mayor que 1 y sólo es divisible por sí mismo y por la unidad. En otras palabras, un número primo no puede ser construido del producto de dos números distintos de él y de la unidad; y al contrario, los números compuestos son aquellos que no son primos, es decir, tienen por lo menos un divisor distinto de 1 y de sí mismo. Por convenio, el número 1 no es primo ni compuesto.

Por ejemplo, los números: 5, 7, 11 y 13 son primos, ya que sólo son divisibles por ellos mismos y por 1. Los números 14 y 27 no son primos pues: 14=2x7x1 y 27=3x3x3x1.

2.2.2 Método de inducción matemática

En cualquier área del conocimiento, un proceso de inducción da por resultado una conclusión a partir del estudio de casos particulares. En matemáticas, este proceso recibe el nombre de inducción matemática, y consiste en la demostración de resultados generales que dependen de los números naturales.

Previo al planteamiento del método de inducción que sustenta al propio método, se debe señalar que para el conjunto de los números naturales está el principio de buena ordenación, el cual establece que todo conjunto no vacío de números naturales posee un elemento mínimo.

Con los elementos anteriores, el principio de inducción matemática establece que: *Si un conjunto S de números naturales contiene a 1, y por cada elemento n del conjunto S también n+1 pertenece a S, entonces el conjunto S=N*.

Se propone el siguiente ejemplo como muestra del proceso de aplicación del método de inducción matemática:

Demostrar la validez de la fórmula que determina la suma de los n primeros naturales:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = n(n + 1)/2$$

Se propone la demostración en los siguientes tres pasos (método de inducción):

1. La fórmula se satisface para n=1.

$$1 = 1(1+ 1)/2$$

2. Se supone (hipótesis de inducción) que la igualdad se satisface para cierto valor natural, por ejemplo k:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k = k(k+1)/2$$

3. Dado este valor de k, se debe probar que la fórmula es válida para el siguiente valor: k+1. Tomar la hipótesis de inducción y sumar k+1 a ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\ldots+k &= k(k+1)/2 \\ (k+1) &= (k+1) \\ \hline 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + k + k + 1 &= k(k+1)/2 + (k+1) \\ &= (k+1)(k/2+1) \\ &= (k+1)(k+2)/2 \end{aligned}$$

Con lo anterior, se ha demostrado que para todo n número natural, la proposición siguiente es verdadera:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = n(n+1)/2$$

2.3 NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros amplía el conjunto de los números naturales. En ese conjunto hay dos operaciones definidas: suma (+) y producto (.), así como una relación de orden.

2.3.1 Definición a partir de los números naturales

Con respecto a los números naturales, los números enteros son una ampliación de este conjunto, agregando los números que son el resultado de restar a un número natural otro mayor. Así, los números enteros que se denotan por Z, se definen como el conjunto formado por los números: {...-4,-3,-2,-1, 0,1, 2, 3, 4,...}. Algunos números enteros son: 123, -456, 7, -8 y 10.

2.3.2 *Operaciones fundamentales y sus propiedades*

En Z se tienen dos operaciones: 1) +: Z x Z → Z y 2) . : Z x Z → Z, que se denominan suma (o adición) y producto (o multiplicación)[1], respectivamente. Estas operaciones son cerradas, es decir, el resultado de cualquiera de ellas vuelve a ser un número entero. Además, + y . cumplen las siguientes propiedades:

1) *Conmutatividad:* a + b = b + a y ab = ba, para cada a, b Є Z.
2) *Asociatividad:* a+(b+c) = (a+b)+c y a(bc) = (ab)c, para cada a, b c Є Z.
3) *Existencia de elemento neutro:* Existen los elementos 0 y 1 tales que a + 0 = a y a 1 = a, para cada a Є Z.
4) *Existencia de inversos aditivos:* Para cada a Є Z existe un único -a Є Z tal que a + (-a) = 0.
5) *Ley de cancelación:* Para cada a, b, c Є Z, con a ≠ 0, si ab = ac entonces b = c.

En los números enteros se establece la relación de orden: "menor que (<)" y "mayor que (>)", de tal forma que para a y b dos enteros cualquiera, a es menor que b o mayor que si existe un número natural , tal que $\mathrm{a} + \mathrm{c} = \mathrm{b}$, y se denota por: "$\mathrm{a} < b$" o "$\mathrm{b} > a$".

2.4 Números racionales

El concepto de divisibilidad se establece a partir de los números enteros, y es básico en la definición de los números racionales. Dados dos números enteros a y b (con distinto de 0), se dice que divide a , lo que se denota por $\mathrm{a}|\mathrm{b}$, si existe un número en los enteros, tal que $\mathrm{b} = \mathrm{ac}$. También se dice que es un factor o divisor de , y que es un múltiplo de .

[1] Para la operación producto o multiplicación denotada por "." en la práctica suele omitirse el "punto", por ejemplo es equivalente la notación a . b = c con ab =c e incluso se usara la notación mediante paréntesis (a)(b)=c.

Con la definición anterior, y como ya se ha descrito, los números racionales son aquellos que resultan de un cociente entre dos números enteros; de manera intuitiva, provienen de la necesidad de cuantificar una parte de un todo; la letra Q denota a este conjunto: $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0\right\}$. Algunos ejemplos de números racionales son: $\frac{7}{8}$ y $\frac{2}{3}$.

2.4.1 Algoritmo de división

Al considerar a, b números enteros con $b \neq 0$. Existen números enteros q y r tales que se puede expresar como sigue:

$$a = bq + r \text{ con } 0 \leq r < |b|$$

En la expresión anterior se denomina dividendo, es divisor, se denomina cociente, se llama residuo y $|b|$ es el valor absoluto del número , y es el número natural que sigue al signo, y se indica colocando al número entero entre barras.

Por ejemplo, si $a = 21$ y $b = 2$, ambos son enteros positivos, el objetivo es determinar el número de veces que el dividendo cabe en el divisor, es decir; hallar el cociente y el residuo:

$$21 = 2q + r$$

$$21 = 2(10) + 1$$

Además, satisfaciendo las desigualdades $0 \leq r < |b|$ ya que: $0 \leq 1 < |2|$ que es condición del algoritmo.

Una división es exacta cuando el residuo es cero, cumpliendo la definición de divisibilidad previamente establecida.

El trabajo desarrollado conduce al resultado del teorema fundamental de la aritmética, que establece: “Cualquier número natural n >1 es primo, o bien, se descompone como un producto de factores primos con una descomposición única, salvo por el orden de los factores primos”.

2.4.2 Operaciones fundamentales y sus propiedades

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división en los números racionales son cerradas, es decir, el resultado de una operación con cualquier par de números racionales dará como resultado un racional. El siguiente teorema determina la manera en la que se deben operar los números racionales. Sean , , y números racionales con ≠0, ≠0. Entonces:

1. $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$
2. $\frac{ad}{bd}=\frac{a}{b}$
3. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si y sólo si $ad=bc$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ad+bc}{bd}$

Las siguientes expresiones son consecuencia inmediata del teorema:

5. $\left(\frac{a}{b}\right)/\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ad}{bc}$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)-\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ad-bc}{bd}$

Ejemplos: $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}$; $\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{4+6}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$.

2.5 Números reales

El conjunto de los números reales resulta de la unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales. Pero, ¿cuál es el conjunto de los números irracionales? Para responder esta interrogante, se analizarán las siguientes situaciones, así como la necesidad de los números irracionales.

2.5.1 Números irracionales

¿Cuál es la relación entre la longitud de una circunferencia cualquiera con su diámetro?, ¿cuánto mide la diagonal de un cuadrado de lado unitario?

Para resolver este tipo de problemas que no admiten una representación del número racional con números de decimales finitos o periódicos, es necesario ampliar el concepto de número a otro conjunto denominado: números irracionales.

Entonces, para la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro se tiene al número irracional denominado “pi”, que se denota por “π” y tiene un valor aproximado de:

$$\pi = \frac{longitud\ \ de\ \ circunferencia}{diametro} = 3.14162255515515145620$$

En el segundo planteamiento, y aplicando el teorema de Pitágoras, un valor de la diagonal de un cuadrado unitario está dado por: $\sqrt{2}$ para el cual se tiene la siguiente aproximación:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.4142135623730950488$$

Con el desarrollo anterior, se concluye que el conjunto de los números reales es la unión de los racionales con los irracionales.

2.5.2 Operaciones fundamentales y sus propiedades

Con el enfoque axiomático, se establece que el sistema de los números reales es un conjunto que se denota por R, que contiene más de un elemento y tiene dos operaciones básicas: adición (denotada por +) y multiplicación (denotada por .), que cumplen los siguientes axiomas:

1) *Conmutativo:* a + b = b + a y ab = ba, para todo a, b ЄR.
2) *Asociativo:* a+(b+c) = (a+b) + c y a(bc) = (ab)c, para todo a, b, c ЄR.
3) *Distributivo:* a (b+c) = (ab) + (ac) y (b + c) a = (ba) + (ca), para todo a, b, c ЄR.
4) *Existencia de elemento neutro:* Existen los elementos 0 y 1, tales que a + 0 = a y a 1 = a, para cada a ЄR.
5) *Existencia de inversos:*
   Aditivos, para cada a ЄR existe un único -a ЄR tal que a + (-a) = 0.

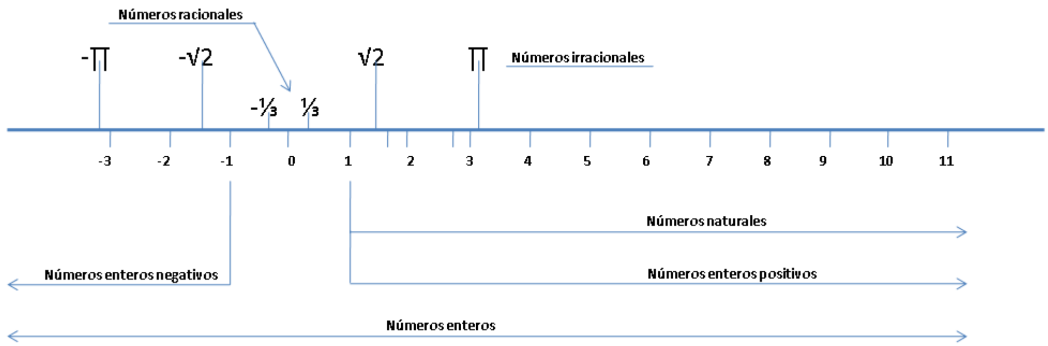
Multiplicativos, para cada a ЄR distinto de cero, existe un único elemento denominado el inverso multiplicativo denotado por $\frac{1}{a}$ o a^{-1} en R tal que a (a^{-1}) = 1.

Finalmente, se enuncian algunas de las propiedades de los números reales:

- *Ley de cancelación del producto:* Para todo a, b, c Є R, con a ≠ 0, si ab = ac, entonces b = c.
- *Ley de cancelación de la suma:* Para todo a, b, c Є R, si a + b = a + c, entonces b = c.
- *Relación de orden:* En el conjunto de los números reales hay una relación de orden que extiende la relación de orden de los números naturales, enteros, racionales e irracionales.
- *Valor absoluto:* El valor absoluto de un número real a, es el número real no negativo, y como se ha descrito su notación es: |a|.
- *Distancia entre dos reales:* La distancia entre a y b números reales, es el número real no negativo dado por el valor absoluto de su diferencia: |a−b|.
- Desigualdad triangular: Si a y b son dos números reales cualquiera, se cumple la desigualdad $|a + b| \leq |a| + |b|$ denominada desigualdad triangular.
- *Sustracción:* Si a y b son números reales, entonces "a menos b" a – b = a +(-b).
- *División:* Si a y b son números reales con b ≠0, entonces "a entre b" a/b = ab^{-1}.
- *Ley de los signos:* La multiplicación y la división de dos números reales distintos de cero es un número positivo si ambos tienen el mismo signo, y es un número negativo si tienen diferente signo.

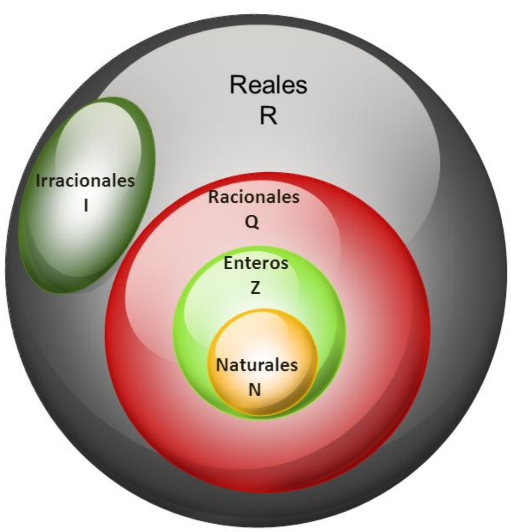
2.5.3 Recta numérica

Una representación gráfica de los números reales denominada recta real, corresponde a aquella que describe puntos de una línea recta y que permite visualizar principalmente, la relación de orden de estos números. La siguiente figura ilustra esta recta real con algunos números:



Recta real con algunos números.

Los diagramas en la notación de conjuntos son una visión adicional del conjunto de los números reales:



Números reales, contención como conjuntos.

Con base en la teoría desarrollada y analizando las gráficas anteriores, se concluye que todo número natural es subconjunto propio de los números enteros, que todo número entero es un subconjunto propio de los números racionales, y que todo número racional es subconjunto propio de los números reales.

Además, y como ya se ha indicado, el conjunto de los números reales es la unión de los racionales con los irracionales, y la intersección del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales es igual al conjunto nulo.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

1. A partir de las figuras anteriores y de las conclusiones, indica si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas:

1) $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{Z}$,
2) $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{N}$,
3) $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{Q}$,
4) $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{Z}$,
5) $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{Q}$,
6) $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{N}$,
7) $\boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{R}$,
8) $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{R}$,
9) $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{R}$,
10) $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$,
11) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{Z} \cup \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$
12) $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$

2. Realiza un escrito sustentando tus respuestas; los casos de afirmaciones verdaderas se deberán soportar por la teoría desarrollada, y en los casos con afirmaciones falsas debes indicar un contra ejemplo que justifique tu respuesta.
3. Con una visión evolutiva, investiga si con los números reales se satisfacen las necesidades humanas o existe algún otro sistema de números por conocer, si es así, indica cuál o cuáles son, y en una cuartilla detalla sus axiomas y sus propiedades básicas.

AUTOEVALUACIÓN

En los siguientes enunciados, justifica la igualdad con alguno de los axiomas, considera a, b, c, d como números reales:

1. $a + (b + c) + d = (a + b) + c + d = a + b + (c + d)$
2. $(0)(1) = 0$
3. $aba^{-1} = b, a \neq 0.$
4. $\left(\frac{a}{d}\right) + \left(\frac{b}{d}\right) = \frac{a+b}{d}, d \neq 0.$
5. Indica un contra ejemplo donde demuestres que: $\frac{a+c}{b+c} \neq \frac{a}{b}$.

RESPUESTAS

1. Asociativo.
2. Elemento idéntico de la multiplicación.
3. Inverso multiplicativo.
4. Consecuencia de la operación 4 (suma: $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ad+bc}{bd}$) en el teorema de los números racionales.
5. $\frac{2+1}{3+1} \neq \frac{2}{3}$

UNIDAD 3

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

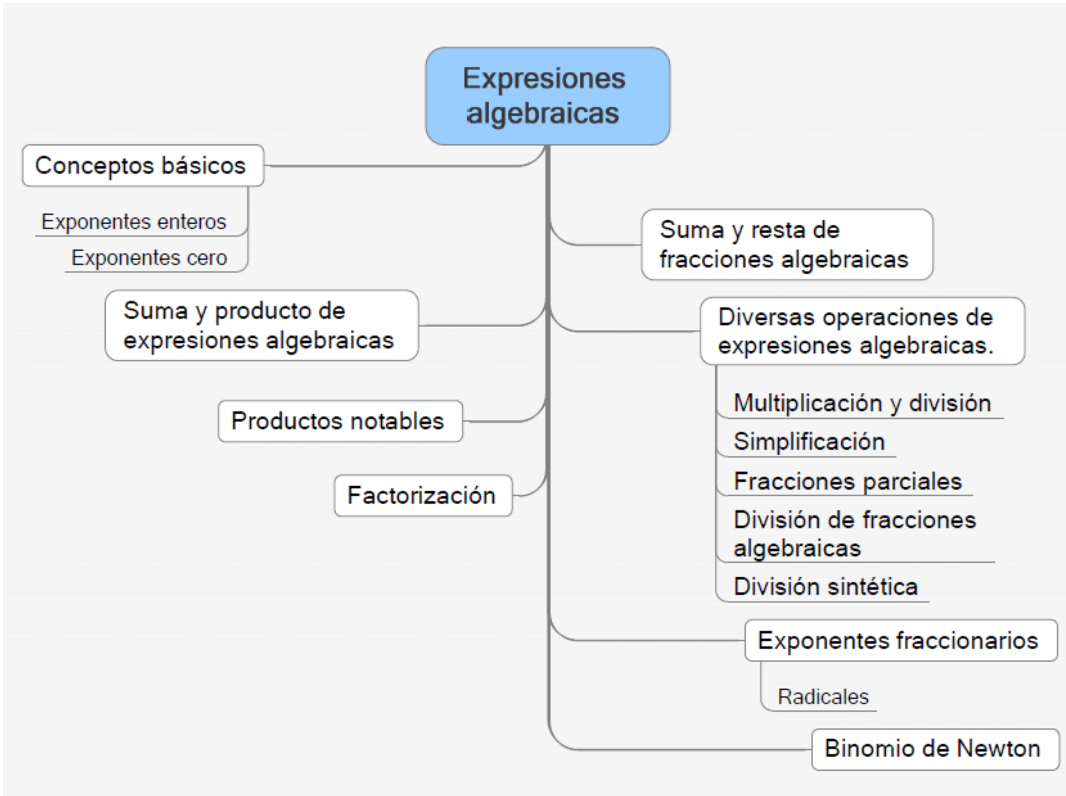
OBJETIVO

El estudiante desarrollará destrezas y habilidades en el uso de las expresiones algebraicas para comprenderlas y aplicarlas en su entorno matemático y profesional.

TEMARIO

3.1 CONCEPTOS BÁSICOS: EXPONENTES ENTEROS Y EXPONENTE CERO
3.2 SUMA Y PRODUCTO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS
3.3 PRODUCTOS NOTABLES ESPECIALES
3.4 FACTORIZACIÓN
3.5 SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS
3.6 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS: SIMPLIFICACIÓN, FRACCIONES PARCIALES Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS, DIVISIÓN SINTÉTICA
3.7 EXPONENTES FRACCIONARIOS: RADICALES
3.8 TEOREMA DEL BINOMIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudiarán los conceptos básicos y la operativa de las expresiones algebraicas con las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, exponentes y radicales. Además, se describirán los productos notables, la factorización, las fracciones parciales y la división sintética, las cuales son herramientas de utilidad en la determinación de raíces de polinomios.

Al final de la unidad se detalla el teorema del binomio de aplicación en diversas áreas de la matemática aplicada.

Es esta unidad, todas las operaciones y símbolos utilizados corresponden al sistema de los números reales.

3. 1 CONCEPTOS BÁSICOS: EXPONENTES ENTEROS Y EXPONENTE CERO

De manera cotidiana se utiliza la siguiente fórmula para calcular el área de círculo:

$$A = \pi r^2$$

En esta fórmula, π representa al número irracional que se indicó en la unidad 2; r al radio de la circunferencia y A al área del círculo; ¿ésta es una expresión algebraica?, ¿qué denota r^2?

Una expresión algebraica en una combinación cualquiera de constantes, variables y signos interrelacionados mediante una cantidad finita de operaciones del tipo: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación, permitiendo traducir situaciones expresadas en lenguaje habitual al lenguaje matemático. Por lo anterior, la fórmula para el cálculo del área de un círculo es una expresión algebraica, en la que además π, por tratarse de un número, se denomina coeficiente, r es la variable que puede tomar cualquier valor, y el resultado de las operaciones indicadas es asignada a una literal A.

Por otro lado, r^2 denota el producto del valor del radio por sí mismo. En general, dada la operación de producto y un número x cualquiera en los reales, es posible realizar la siguiente operación: $x\,x$, que se reescribe por x^2, es decir, es el resultado de multiplicar el número real x por sí mismo. En general, si n es cualquier número entero y positivo, la expresión:

$$x^n = x\ x\ x \ldots x$$

representa el producto de xn veces y se representa por x^n. A la literal x se le denomina base; al valor n se le llama exponente; y x^n se lee: “x elevado a la n potencia” y se denomina notación exponencial. Los exponentes obedecen a las siguientes reglas:

i. $x^n x^m = x^{n+m}$

ii. $(x^n)^m = x^{nm}$

iii. $(xy)^n = x^n y^n$

iv. $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}, si\ x \neq 0$

v. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}, si\ y \neq 0$

En particular, si $n = m$ y $x \neq 0$, entonces $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} = x^0 = 1$.

A continuación, algunos ejemplos:

$$2^3 2^4 = 2^{2+4} = 2^6,\ (3 \cdot 4)^2 = 3^2 4^2,\ \frac{4^2}{4^5} = 4^{2-5} = 4^{-3} = \frac{1}{4^3}.$$

Ejemplo: Desarrollar mediante las reglas anteriores la expresión algebraica:

$$(9x^4y^{-3})(\tfrac{1}{3}x^{-6}y^2) = (9 \cdot \tfrac{1}{3})(x^4x^{-6})(y^{-3}y^2) = 3x^{-2}y^{-1} = \frac{3}{x^2y}$$

3.2 SUMA Y PRODUCTO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

El ejemplo anterior: $(9x^4y^{-3})(\frac{1}{3}x^{-6}y^2)$, desarrollado mediante la regla de los exponentes, muestra el siguiente paso en el estudio de las expresiones algebraicas, que es la realización de sumas y productos de estas expresiones. Para ello, es necesario definir ciertos términos como monomio, coeficiente, literal o variable, monomios semejantes.

Se considerarán las siguientes expresiones algebraicas: $2x + 3,\ 4x^2 - 2y + 3z + 1$, para ejemplificar los términos por definir.

Monomio se refiere a cada una de las expresiones separadas por un operador de suma o resta, su expresión general es: ax^n y se integra de una parte numérica denominada coeficiente a, y otra parte formada por las literales con sus exponentes x^n, tal que n es una potencia entera y no negativa. *Monomios semejantes* son aquellos que tienen la misma literal. En las expresiones anteriores son monomios: $2x,\ 3,\ 4x^2,\ 2y,\ 3z,\ 1$.

El grado de un monomio no nulo es el exponente de la variable, por ejemplo: $2x,\ 2y,\ 3z$ son variables de exponente uno, y el grado de la expresión $2x^n y^m z$ es la suma de los exponentes: $n+m+1$.

Binomio es la suma de dos monomios, se denomina binomio y polinomio a cualquier suma de monomios. Por ejemplo, la expresión $2x+3$ es un binomio y $4x^2-2y+3z+1$ es un polinomio.

La expresión: $\frac{1}{x}+2x-\sqrt{3x}$ ¿es un polinomio? No es un polinomio, ya que no puede escribirse como suma de monomios por contener potencias no enteras y negativas en algunos de sus términos.

En la unidad 6 se estudiará con mayor detalle a los polinomios en una variable, así como diversos teoremas, esta unidad se ocupa de las operaciones de suma y producto de polinomios en una o más variables, además de adquirir habilidad en su manejo.

La suma de monomios es otro monomio que se expresa como resultado de agrupar con su signo, los términos semejantes sumando algebraicamente los coeficientes. Ejemplo: $4x^2-2x+x^2+x=5x^2-x$.

El producto de monomios es otro monomio que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes de los monomios, y su parte literal es el producto de las partes literales de los monomios, sumando los exponentes de las letras que en ellos aparezcan. Ejemplo: $(4x^2y)(2x^3y^2)=8x^5y^3$.

En las operaciones de polinomios se aplican todas las propiedades, reglas y teoremas de los números reales que se estudiaron en la unidad 2. Ejemplos: $(4x^3+y)(2x^3-y)=8x^6-4x^3y+2yx^3-y^2=8x^6-2x^3y-y^2$,

$$\frac{(4x^4y^3)}{(2x^3y^2)}=\frac{4xxxxyyy}{2xxxyy}=2xy$$

3.3 PRODUCTOS NOTABLES ESPECIALES

Se denominan productos notables a ciertos resultados que ocurren dentro del álgebra. Se enuncian bajo el siguiente teorema:

i. $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$
ii. $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$
iii. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
iv. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
v. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
vi. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
vii. $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$
viii. $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

Se debe verificar el desarrollo de cada uno de los incisos, ahora se desarrollará la expresión $(x-y)^3$ como ejemplo:

$$(x-y)^3 = (x-y)^2(x-y) = (x^2 - 2xy + y^2)(x-y)$$

$$= x^3 - x^2y - 2x^2y + 2xy^2 + y^2x - y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

3.4 FACTORIZACIÓN

Al considerar el producto notable: $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$, un caso particular de éste es: $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$. ¿Qué pasa si se observa el proceso en sentido inverso?, es decir, ¿qué significa $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$?

En general, si un polinomio está escrito como el producto de otros polinomios, a cada uno de éstos se le denomina *factor*, y al proceso de encontrar todos los factores se le llama factorización. La expresión algebraica anterior: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ muestra un ejemplo de factorizacion para el polinomio $x^2 - 1$ con los factores: $(x+1)$ y $(x-1)$.

3.5 SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Los números racionales se determinan como el cociente de dos números enteros con el denominador distinto de cero. La extensión de este concepto a las expresiones algebraicas define una expresión algebraica racional entera como el cociente de dos polinomios. A este tipo de expresiones también se le denomina fracciones algebraicas, algunos ejemplos son: $\frac{x^2-1}{x+1}, \frac{x^2-1}{x-1}, \frac{x^2-x-6}{x-3}$.

Las reglas, propiedades y teoremas de los números reales que se estudiaron en la unidad 2, se extienden a las expresiones algebraicas racionales, debido a que estas últimas representan números reales. Por lo anterior, las fórmulas desarrolladas para las operaciones de suma y resta de los números racionales se extienden a las expresiones algebraicas racionales.

Ejemplo de suma: $\left(\frac{x}{2}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2}{2x}$

Ejemplo de resta: $\left(\frac{x-1}{x}\right)-\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{3(x-1)-x^2}{3x}$

3.6 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS: SIMPLIFICACIÓN, FRACCIONES PARCIALES Y DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS, DIVISIÓN SINTÉTICA

Como se efectuó en la sección anterior retomando las reglas, propiedades y teoremas de los números reales para la multiplicación y división, se presentan los siguientes ejemplos.

Ejemplo de multiplicación: $\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{2x}=\frac{1}{x}$

Ejemplo de división: $\left(\frac{x-1}{x}\right)\div\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{3(x-1)}{x^2}$

Ejemplo de simplificación: $\frac{x^2-x-6}{x-3}$, es decir, realizar la operación de factorización y cancelar términos semejantes.

$$\frac{x^2-x-6}{x-3}=\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=(x+2)$$

Por otro lado, al considerar el siguiente ejemplo de suma de fracciones racionales:

$$\left(\frac{4}{x}\right)+\left(\frac{3}{x+2}\right)=\frac{4(x+2)+3x}{x(x+2)}=\frac{4x+8+3x}{x(x+2)}=\frac{7x+8}{x(x+2)}$$

De este ejemplo, al analizar el proceso inverso, es decir, a partir de la expresión racional: $\frac{7x+8}{x(x+2)}$ y mediante operaciones algebraicas se debe llegar a los términos: $\left(\frac{4}{x}\right)+\left(\frac{3}{x+2}\right)$ que son las fracciones racionales originales.

La base teórica establece que toda expresión algebraica racional se puede descomponer como suma de expresiones racionales más simples. A estas expresiones se les denomina fracciones parciales.

Con el objetivo de establecer las reglas para obtener fracciones parciales, se debe señalar que una fracción propia es aquella expresión algebraica racional de polinomios en la que el polinomio del numerador es de menor grado que el polinomio del denominador.

Las reglas de factibilidad para realizar un proceso de fracciones parciales son:

1. Las fracciones deben ser propias.

2. El denominador debe ser factorizado sólo en expresiones de potencias con grado uno o dos.

También se debe comentar que la obtención de una fracción parcial no siempre es posible.

Existen varios métodos para la obtención de fracciones parciales cuando esto es posible; el siguiente ejemplo ilustra una posibilidad:

Determinar las fracciones parciales del cociente: $\frac{1}{x(x+2)}$.

El método que se aplicará en este caso, se denomina de *factores lineales no repetidos* e indica por la estructura del cociente de polinomios que existen constantes reales A y B, tal que se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

Realizar las operaciones indicadas del lado derecho:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x)}{x(x+2)}$$

Igualando numerador a numerador, y desarrollando las operaciones indicadas en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$1 = A(x+2) + B(x)$$

$$1 = Ax + 2A + Bx$$

$$1 = Ax + Bx + 2A$$

$$1 = x(A+B) + 2A$$

El polinomio 1 (término del lado izquierdo de la ecuación) se puede expresar como: $0x + 1$, y al igualar término a término de la ecuación:

$$0x + 1 = x(A+B) + 2A$$

Entonces:

$$0x = x(A+B)$$

$$1 = 2A$$

Las soluciones de este sistema de ecuaciones $\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$ y $1 = 2\mathrm{A}$, es: $\mathrm{A} = 1/2$ y $\mathrm{A} = -\mathrm{B}$; por lo tanto, al regresar a la ecuación original:

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x+2}$$

que es la equivalencia de la expresión algebraica en fracciones parciales.

Por otro lado, el proceso de división de fracciones algebraicas y específicamente, la división de polinomios, tiene estrecha relación con la división de números enteros. De la unidad 2 se tiene que para a, b números enteros con $\mathrm{b} \neq 0$, existen números enteros q y r, tal que a se puede expresar como sigue:

$$\mathrm{a} = \mathrm{bq} + \mathrm{r} \text{ con } 0 \leq \mathrm{r} < |b|$$

Aplicando este concepto a polinomios, se trata de determinar, si es posible, dos polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tales que: $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$, de modo que el grado de $R(x)$ sea menor que el grado de $B(x)$, o bien, $R(x)$ sea el polinomio cero para: $A(x)$ y $B(x)$ polinomios en los reales con $B(x) \neq 0$.

El siguiente ejemplo muestra la operativa del algoritmo de la división de polinomios, para ello se debe considerar: $A(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10$ y $B(x) = x - 2$, y se pide determinar: $Q(x)$y $R(x)$ del teorema anterior.

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

$$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10 = (x-2)\,Q(x) + R(x)$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5 \quad \leftarrow Q(x) \\
B(x) \longrightarrow (x-2) & \overline{\big)\, 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10} \quad \leftarrow A(x) \\
 & \underline{-2x^4 + 4x^3} \\
 & \quad + 3x^3 - 2x^2 \\
 & \quad \underline{- 3x^3 + 6x^2} \\
 & \qquad + 4x^2 - 13x \\
 & \qquad \underline{- 4x^2 + 8x} \\
 & \qquad\quad - 5x + 10 \\
 & \qquad\quad \underline{+ 5x - 10} \\
 & \qquad\qquad 0 \quad \leftarrow R(x)
\end{array}
$$

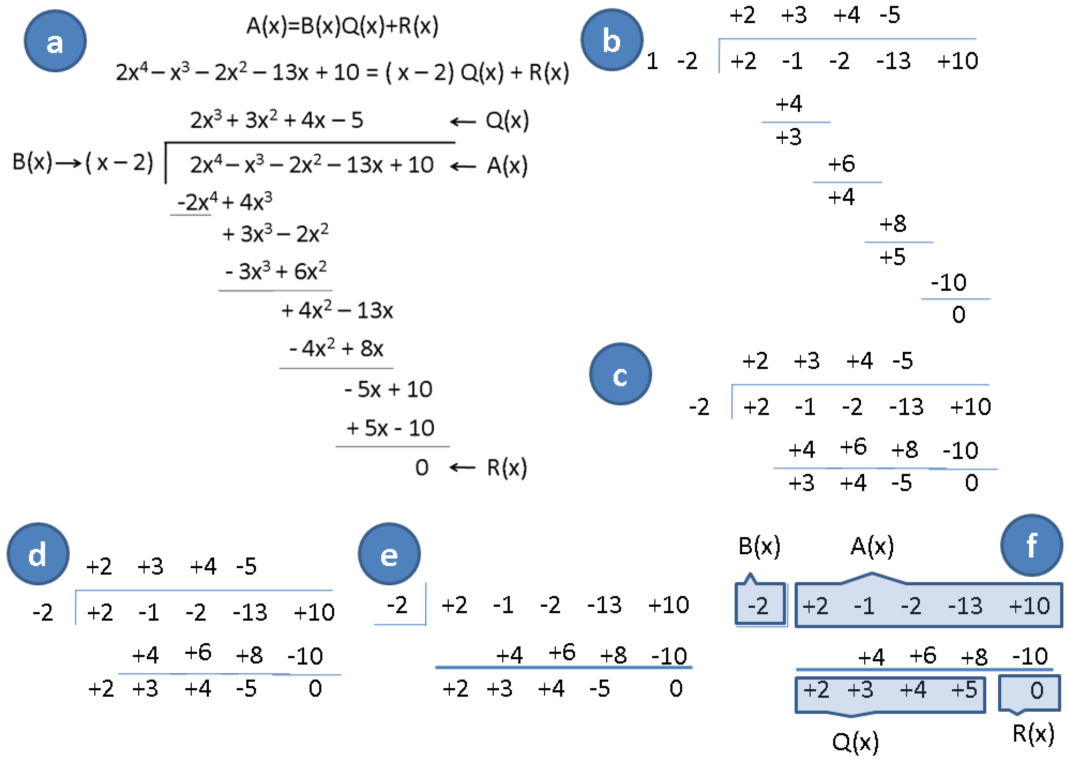
$$2x^4/x = 2x^3$$

$$3x^3/x = 3x^2$$

$$4x^2/x = 4x$$

$$-5x/x = -5$$

Para agilizar el cálculo anterior, existe un algoritmo denominado *división sintética,* por medio del cual se puede dividir un polinomio de una variable x, y de grado mayor a 1 entre un polinomio de la forma $(x-a)$. La siguiente figura ilustra paso a paso el procedimiento para los polinomios del ejemplo anterior: $A(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10$ y $B(x) = x - 2$ para calcular: $Q(x)$y $R(x)$.



Esta secuencia presenta una forma de homologar el procedimiento normal de división de polinomios con el de la división sintética, a continuación se describe esta secuencia:

a. Es el resultado del procedimiento normal de división del ejemplo anterior.

b. Con la misma estructura sólo se consideran los coeficientes.

c. Se realiza un corrimiento de los coeficientes residuo hacia arriba hasta quedar en una sola línea.

d. A la alineación anterior se le agrega el coeficiente principal del polinomio A(x), en este caso +2.

e. Se elimina la línea de división, en este caso es innecesaria y se señala el término independiente del polinomio B(x) para su identificación.

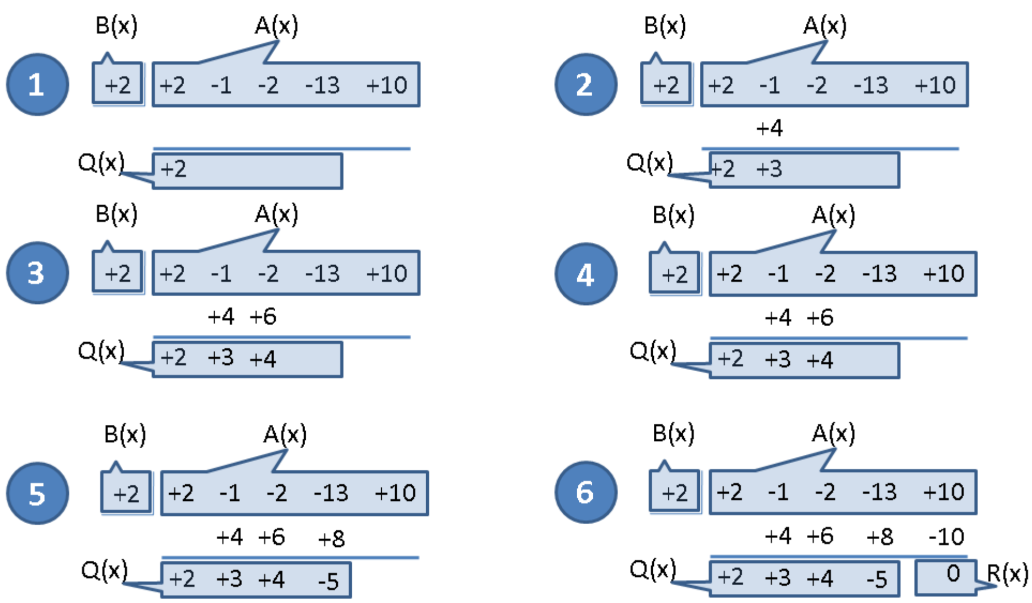
f. Se ha construido y se muestra la estructura del algoritmo de división sintética.

Se debe observar que una vez realizado el arreglo de coeficientes, el algoritmo de la división sintética plantea que los números de la segunda fila se obtienen al multiplicar el número de la tercera fila de la columna precedente por el término$-a$ del binomio $B(x) = (x - a)$, en este caso -2, cambiando el signo al resultado para realizar una suma aritmética natural en la obtención del coeficiente del siguiente término de la fila tres (porque el resultado final del coeficiente de la tercera línea proviene de una resta). Una práctica en este algoritmo consiste en tomar el término $-a$ en lugar de a, de esta manera, se eliminan las sustracciones realizadas.

La siguiente figura ilustra paso a paso este procedimiento con el ejemplo desarrollado:

$$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$$

$$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10 = (x - 2)\,Q(x) + R(x)$$



Por lo tanto: $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10 = (x - 2)(2x^3 + 3x^2 + 4x - 5) + 0(x)$

3.7 EXPONENTES FRACCIONARIOS: RADICALES

Como parte de los conceptos básicos de los números reales, se encuentra la definición de *radical,* y más específicamente, la raíz enésima de un número. Al considerar n un número natural, si a y b son dos números reales no negativos, entonces:

$$\sqrt[n]{a} = b \ si \ y \ solo \ si \ b^n = a.$$

Esta definición aplica también para a y b negativos, y n entero positivo impar. Al número b se le denomina raíz enésima de a, y se denota por: $\sqrt[n]{a}$ llamado radical, que se integra por las partes: a radicando, n índice y el símbolo $\sqrt{\ }$ se denomina radicando.

Un caso particular ocurre para $n = 2$, y se llama raíz cuadrada de a, denotada por: $\sqrt[2]{a}$, o simplemente: $\sqrt{a}$.

Una vez definido el concepto de radical, es posible retomar el concepto de exponente racional mediante la siguiente definición:

Si x es un número real y n es un entero positivo, entonces $(x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ si esta última raíz existe. De manera general, para m entero y n entero positivos, si $\frac{m}{n}$ es un número racional en el cual m y n no tienen factores primos comunes, entonces para x un número real cualquiera tal que $\sqrt[n]{x}$ existe, se tiene: $(x)^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$.

Las leyes de los exponentes revisadas en la primera sección de esta unidad son aplicables a los exponentes racionales. El siguiente ejercicio de simplificación utiliza algunas de ellas: $x\ \sqrt[5]{x^2} = x\ (x^{2/5}) = x^{7/5} = \sqrt[7]{x^5}$

3.8 TEOREMA DEL BINOMIO

El teorema del binomio de Newton expresa la enésima potencia de una expresión algebraica del tipo binomio como un polinomio, su expresión matemática es: $(x+y)^{n}$ para n un número natural, y su desarrollo se observa en la siguiente expresión algebraica:

$$(x+y)^{1}=x+y$$

$$(x+y)^{2}=(x+y)(x+y)=x^{2}+2xy+y^{2}$$

$$(x+y)^{3}=(x+y)(x+y)(x+y)=x^{3}+3x^{2}y+3xy^{2}+y^{3}$$

$$(x+y)^{n}=$$
$$x^{n}+\frac{n}{1}x^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1(2)}x^{n-2}y^{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1(2)(3)}x^{n-3}y^{3}+$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1(2)(3)(4)}x^{n-4}y^{4}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1(2)(3)(4)(5)}x^{n-5}y^{5}+\ldots+y^{n}$$

Ejemplo: Desarrollar la siguiente expresión algebraica mediante el binomio de Newton.

$$(1+i)^{5}=1^{5}+\frac{5}{1}1^{5-1}i+\frac{5(5-1)}{1(2)}1^{5-2}i^{2}+\frac{5(5-1)(5-2)}{1(2)(3)}1^{5-3}i^{3}$$
$$+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1(2)(3)(4)}1^{5-4}i^{4}$$
$$+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{1(2)(3)(4)(5)}1^{5-5}i^{5}$$

$$(1+i)^{5}=1+5i+10i^{2}+10i^{3}+5i^{4}+i^{5}$$

El desarrollo del binomio de Newton es de gran utilidad y se presenta en diversas aplicaciones, por ejemplo, la expresión $(1+i)^{n}$ es un factor para el cálculo del monto final al término del periodo n, en un esquema de interés compuesto con i como tasa de interés (la demostración del teorema está fuera del alcance del objetivo de este libro).

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Como se indicó, existen cuatro métodos para la obtención de fracciones parciales:

1. Descomposición en fracciones parciales con factores lineales no repetidos.
2. Descomposición en fracciones parciales con factores lineales repetidos.
3. Descomposición en fracciones parciales con un factor cuadrático no repetido.
4. Descomposición en fracciones parciales con factor cuadrático repetido.

   Investiga cada uno de estos métodos, y realiza un escrito con las bases teóricas y la solución de tres ejercicios de cada caso.

AUTOEVALUACIÓN

1. Completa la siguiente tabla. Se trata de identificar para cada renglón el polinomio o los elementos que lo integran (algunos renglones pueden tener varias posibilidades):

Expresión algebraica	*Monomio, polinomio, otro*	*Grado*	*Número de términos*	*Variables*
$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10$				
	Monomio	7	1	x, y
$3x^2y + 3y^2x$				x, y
$4x^2 - 2y + 3z + 1$		2		x, y, z
$\frac{1}{x} + 2x - \sqrt{3x}$	Otro			

2. Para los polinomios: $A(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10$ y $B(x) = x - 2$, calcular $A(x) + B(x)\ y\ A(x)B(x)$.

3. Re-expresa $4x^2 + 4x + 1$ como binomio de Newton con grado 2.

4. Realiza las siguientes operaciones y simplifica: $\frac{2}{x} - \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x^2}$.

5. Factoriza y simplifica términos: $\frac{x^2-x-6}{x^2-4}$.

RESPUESTAS

1.

Expresión algebraica	*Monomio, Polinomio, otro*	*Grado*	*Numero de términos*	*Variables*
$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10$	Polinomio	4	5	x
$4x^4y^3$	Monomio	7	1	x, y
$3x^2y + 3y^2x$	Polinomio	3	2	x, y
$4x^2 - 2y + 3z + 1$	Polinomio	2	4	x, y, z
$\frac{1}{x} + 2x - \sqrt{3x}$	Otro	1	3	x

2. $A(x) + B(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10 + x - 2$

   $= 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 12x + 8$.

   $A(x)B(x) = (2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10)(x - 2)$

   $= 2x^5 - x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 10x - 4x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 26x - 20 = 2x^5 - 5x^4 - 9x^2 + 36x - 20$

   .

3. $(2x+1)^2$.

4. $\frac{5x+2}{2x^2}$.

5. $\frac{x+3}{x+2}$.

UNIDAD 4

NÚMEROS COMPLEJOS

OBJETIVO

El estudiante definirá los números complejos en sus diversas formas de representación. Además, describirá y realizará las operaciones entre números complejos.

TEMARIO

4.1 NÚMEROS IMAGINARIOS: OPERACIONES FUNDAMENTALES Y POTENCIACIÓN

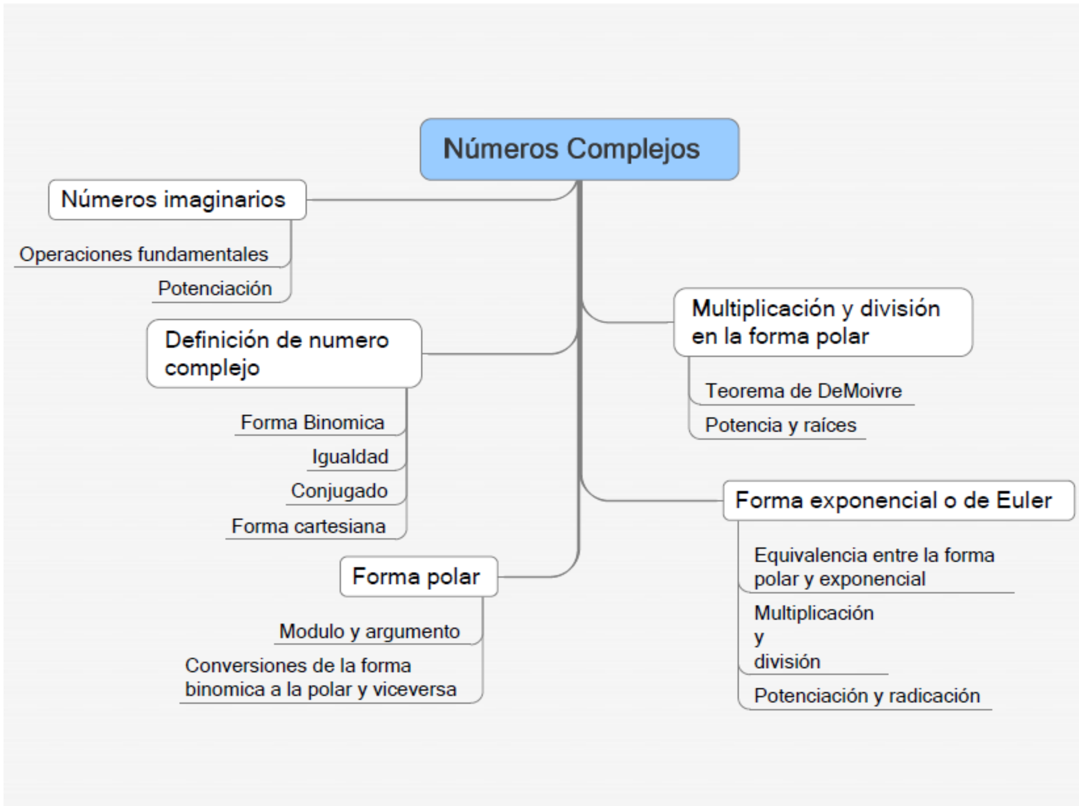
4.2 DEFINICIÓN DE NÚMERO COMPLEJO, FORMA BINÓMICA, IGUALDAD, CONJUGADO Y FORMA CARTESIANA (PAREJA ORDENADA)

4.3 FORMA POLAR, MÓDULO Y ARGUMENTO, CONVERSIONES DE LA FORMA BINÓMICA A LA POLAR Y VICEVERSA

4.4 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN FORMA POLAR: TEOREMA DE DE MOIVRE, POTENCIA Y RAÍCES

4.5 FORMA EXPONENCIAL O DE EULER: EQUIVALENCIA ENTRE LA FORMA POLAR Y EXPONENCIAL. MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN, POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudiarán los números complejos y sus diversas formas de representación, así como sus operaciones, interpretación geométrica y aplicaciones.

Se enfatiza la creación de este sistema para la solución de ecuaciones de tipo $x^2 + k = 0$ donde k es un número real.

La unidad finaliza con la explicación de la forma exponencial de Euler, utilizando el número e denominado número de Euler, que se usa de diversas maneras en las matemáticas y su entorno.

4.1 NÚMEROS IMAGINARIOS: OPERACIONES FUNDAMENTALES Y POTENCIACIÓN

En las expresiones algebraicas que se han estudiado hasta este momento, se han omitido de manera intencional algunas situaciones como: $\sqrt[2]{-1}$ ¿Por qué? ¿Tiene sentido esta notación? ¿Existe este número en los reales?

Se sabe que el cuadrado de un número real nunca es negativo, por lo tanto, la evaluación de ecuaciones del tipo: $x^2 + k = 0$ donde k es un número real no es posible en el sistema de los números reales. En particular, la existencia del número $\sqrt[2]{-1}$ permitiría evaluar la expresión algebraica: $x^2 + 1 = 0$ y obtener la identidad, pero al no estar definido este tipo de números en los reales, esto conduce a la construcción de otro sistema de números denominados complejos, que contendrá a los reales y además, entre otras aplicaciones, dará solución a este tipo de ecuaciones.

Con la propuesta anterior, se construye un nuevo sistema de números en los que sea posible siempre la potenciación de cualquier base y exponente. El conjunto de los números complejos se designa por C.

En este contexto se crea la unidad en este sistema de números, se denota por i, se le llama unidad imaginaria y se define por: $i = \sqrt[2]{-1}$ o equivalentemente: $i^2 = -1$.

Con lo anterior, se pueden manipular expresiones algebraicas y números de la forma: $\sqrt[2]{-4} = \sqrt[2]{4}\sqrt[2]{-1} = 2i$, este ejemplo muestra como los números imaginarios son el producto de un número real por i. Además, se debe observar que el producto reiterado de i por sí mismo tiene el siguiente patrón:

$$i^0 = 1,$$

$$i^1 = i,$$

$$i^2 = -1,$$

$$i^3 = i^2 i = -1i = -i,$$

$$i^4 = i^3 i = -ii = -i^2 = 1,$$

$$i^5 = i^4 i = 1i = i, \ldots$$

Los valores de i se repiten de cuatro en cuatro.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

Los valores de i se repiten de cuatro en cuatro. Verifica el patrón para las potencias desde 0 hasta 10, es decir, calcula: $i^0, i^1, i^2, i^3, i^4 i^5, i^6, i^7, i^8, i^9, i^{10}$ y compara los valores identificando el patrón propuesto.

4.2 Definición de número complejo, forma binómica, igualdad, conjugado y forma cartesiana (pareja ordenada)

Un número complejo es un par ordenado de números reales (a, b), en donde al número a se le denomina *parte real* y al número b *parte imaginaria*. De esta forma, el sistema C de los números complejos, es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales sujetos a las siguientes leyes:

i. (a, b) = (a', b') si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$.
ii. $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$.
iii. $(a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$

Al par ordenado (0,1) se le denomina unidad imaginaria y como se indicó se denota por la letra i latina.

Se ha establecido que los números imaginarios son el producto de números reales por i. Con este hecho y la parte real e imaginaria de un número complejo cualquiera (a, b), los números complejos también se expresan como la suma del número real: a más el número imaginario: bi: $a + bi$ denominada la forma binómica.

ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE

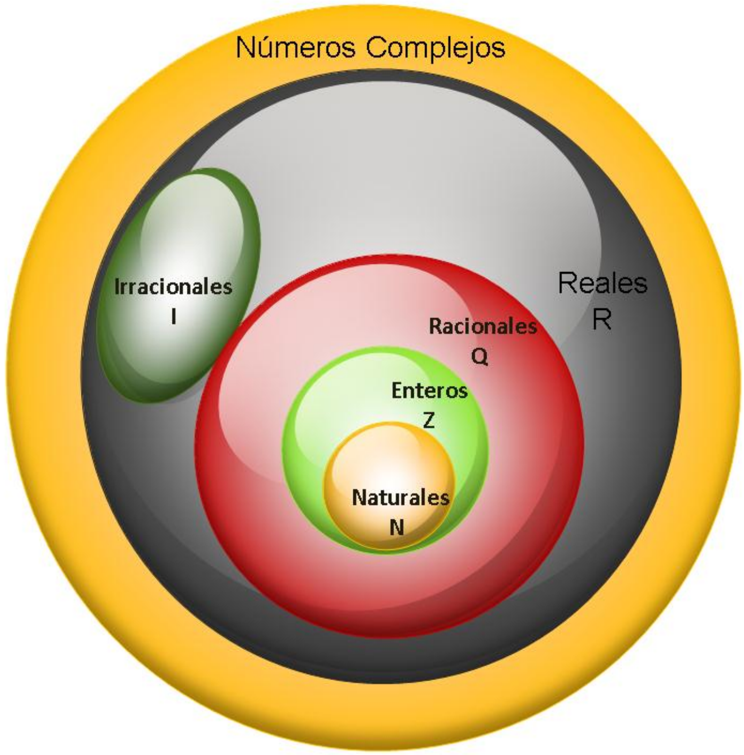
Verifica que se cumplen las siguientes leyes de los números complejos:

a. $a + bi = a' + b'i$ si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$
b. $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
c. $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$

Con lo anterior y la notación de conjuntos, los números complejos C se definen como la unión del conjunto de los números reales y el conjunto de los números imaginarios:

$$C = \{ a + bi | a, b \in R,\ i = \sqrt[2]{-1} \}$$

Identificando cada número real a con el número complejo $a + 0i$ y con el par ordenado $(a, 0)$, R es un subconjunto de C. La siguiente figura muestra como conjunto el sistema de los complejos:



Por lo tanto, el número complejo (a, b) puede expresarse en la siguiente forma: $(a, b) = (a, 0) + (0, b) \cdot (0,1) = a + bi$.

Se deben observar las siguientes precisiones: Sea $c = a + bi$ un número complejo cualquiera, entonces:

1) Si $b = 0$, c es un número real.

2) Si $a = 0$, c es un número imaginario.

3) $c = a + bi$ y $-c = -a - bi$, c y $-c$ se denominan opuestos.

4) $c = a + bi$ y $c' = a - bi$, c y c' se llaman conjugados.

5) Dos números complejos cualquiera son iguales si poseen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

Ejemplo

Dados los números complejos: (4,2) y (2,1), determinar la suma, diferencia y producto de ambos números en el orden en que se presentan:

Suma: (4,2) + (2,1) = (6,3)

Diferencia: (4,2) - (2,1) = (2,1)

Producto: $(4,2)(2,1) = (8-2, 4+4) = (6,8)$

Ejemplo

Sea $c = 1 + 2i$ un número complejo, entonces $-1 - 2i$ es el opuesto de c.

$1 - 2i$ es el complejo conjugado de c.

4.3 Forma polar, módulo y argumento, conversiones de la forma binómica a la polar y viceversa

A partir de la igualdad $(a, b) = (a, 0) + (0, b) \cdot (0,1) = a + bi$ y utilizando la representación gráfica de un par ordenado en el plano cartesiano, se tiene que todo número complejo $c = a + bi$ admite una representación gráfica, de tal forma que las abscisas son los números a reales y las ordenadas son los números b imaginarios; esta es la forma cartesiana del número c.

Todo número complejo admite una representación en forma polar[2]. Para esto, se toma el módulo denotado por “ ρ ” que se define por la expresión:

$$\rho = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

y al ángulo θ se le denomina el argumento, y su valor está implícito; está dado por:

$$\theta = \text{Arc}\tan\frac{b}{a}$$

Con lo anterior, se denomina la forma polar de un número complejo c con módulo ρ y argumento θ a la expresión:

$$c = (\rho, \theta)$$

Se debe aclarar que el argumento de un número complejo expresado en forma polar no es único y se repite por periodos $\theta + 2\pi k$ (es lo mismo considerar

[2] Esta forma polar también suele denominarse trigonométrica, aunque algunos autores distinguen la forma polar y la forma trigonométrica con cuestiones de notación.

a θ que $\theta + 360°$, $\theta + (2)360°, \theta + (3)360°, \dots)$, por lo que para efectos de la representación y unicidad del número polar en el presente libro θ está en el intervalo [-π, π) a menos que se especifique otra situación.

Las fórmulas para el módulo ρ y el argumento θ permiten convertir cualquier numero complejo dado en su forma binómica a su forma polar. ¿Cómo deberá efectuarse la conversión inversa, es decir, de polar a binómica?

Para todo número complejo en forma polar con parámetros ρ y θ, es posible determinar los valores a y b del número complejo $a + bi$ mediante las ecuaciones:

$$a = \rho \,\mathrm{Cos}\theta,\ b = \rho \ \mathrm{Sen}\theta$$

Ejemplo

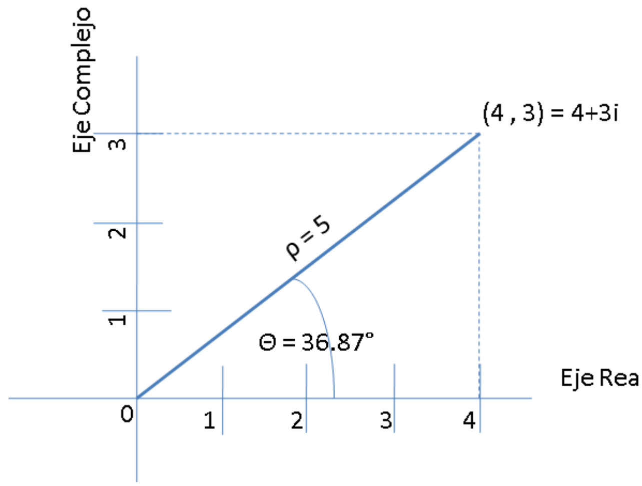
Dado el número complejo $4 + 3i$ determinar su forma polar y representarlo gráficamente en el plano.

Del sistema de ecuaciones $\rho = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$ y $\theta = \mathrm{Arc\,tan}\,\frac{b}{a}$, sustituyendo valores y efectuando las operaciones de los números reales que se indican:

$$\rho = \sqrt[2]{4^2 + 3^2} = \sqrt[2]{25} = 5$$

$$\theta = \mathrm{Arc\,tan}\,\frac{b}{a} = \mathrm{Arc\,tan}\,\frac{b}{a} = \ \mathrm{Arc\,tan}\,\frac{3}{4} = 36.87°$$

Con los valores anteriores, la siguiente figura es una representación gráfica del número complejo en tres de sus notaciones: a) par ordenado (4,3) b) forma binómica $4 + 3i$ y c) polar (5, 36.87°). Nótese que el módulo del número complejo es la distancia del origen del sistema coordenado al par ordenado que denota al número complejo.



4.4 Multiplicación y división en forma polar: teorema de de Moivre, potencia y raíces

De la sección anterior, se tiene que para un número complejo $c = a + bi$ cualquiera, son válidas las siguientes expresiones:

$$\rho = \sqrt[2]{a^2 + b^2}, \text{ módulo de } c.$$

$$\theta = \text{Arc}\tan\frac{b}{a}, \text{ argumento de } c.$$

$$a = \rho\,\text{Cos}\theta, \text{ parte real de } c.$$

$$b = \rho\,\text{Sen}\theta, \text{ parte imaginaria de } c.$$

Con estos elementos, la forma binómica de c conduce a la forma polar, como ya se ha descrito:

$$c = a + bi = (\rho\,Cos\theta) + (\rho\,Sen\theta)i = \rho\,(Cos\theta + i\,Sen\,\theta)$$

$$c = \rho\,(Cos\theta + i\,Sen\,\theta)$$

¿Cómo se efectúan las operaciones básicas de los números complejos en esta representación polar?

Considera los números $c = \rho\,(Cos\theta + i\,Sen\,\theta)$ y $d = \upsilon(Cos\alpha + i\,Sen\,\alpha)$.

Multiplicación:

$$c\,d = \rho\,(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta)\,\upsilon(Cos\,\alpha + i\,Sen\,\alpha)$$

$$c\,d = \rho\,\upsilon(Cos\,(\theta + \alpha) + i\,Sen(\theta + \alpha)\,)$$

Es decir, el producto de dos números complejos cualesquiera c y d en su forma polar da por resultado otro número complejo con módulo igual al producto de sus módulos y argumento igual a la suma de los argumentos.

División:

$$\frac{c}{d} = \frac{\rho\,(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta)}{\upsilon(Cos\,\alpha + i\,Sen\,\alpha)} = \frac{\rho}{\upsilon}\;Cos\,(\theta - \alpha) + i\,Sen(\theta - \alpha)$$

En este caso, el módulo es el cociente de los módulos y el argumento es la diferencia de los argumentos.

El teorema de De Moivre

Considera $c = \rho\,(Cos\theta + i\,Sen\,\theta)$ un número complejo, elevando a la potencia n ambos miembros con n un número natural:

$$\mathrm{c}^{n} = (\,\rho\,(Cos\theta + i\,Sen\,\theta))^{n}$$

$$\mathrm{c}^{n} = \rho^{\,n}(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta)^{n}, por\ regla\ de\ los\ exponenets$$

$$\mathrm{c}^{n} = \rho^{\,n}(Cos\,n\theta + i\,Sen\,n\theta), por\ identidad\ trigonometrica$$

$$\mathrm{c}^{n} = 1^{n}(Cos\,n\theta + i\,Sen\,n\theta), \mathrm{si}\ \rho = 1$$

$$\mathrm{c}^{n} = (Cos\,n\theta + i\,Sen\,n\theta), \mathrm{entonces:}$$

$$(Cos\,\theta + i\,Sen\,\theta)^{n} = Cos\,n\theta + i\,Sen\,n\theta$$

Esta es la denominada fórmula de De Moivre: se debe notar en este caso la exigencia del módulo unitario.

Potencias y raíces:

La expresión algebraica general de la fórmula de De Moivre es:

$$c^n = \rho^n(Cos\, n\theta + i\, Sen\, n\theta)$$

Esta fórmula, de su propia construcción, permite el cálculo de la potencia enésima de un número complejo.

Ejemplo:

Determinar la potencia cuadrada del número $4 + 3i$. La representación polar de este número es $5(\text{Cos}\, 36.87° + iSen\, 36.87°)$, por lo tanto, la potencia cuadrada es:

$$\begin{aligned}(4 + 3i)^2 &= 5^2\big(\text{Cos}\ (2)(36.87°) + iSen\ (2)(36.87°)\big)\\ &= 25(\text{Cos}\ 73.74° + iSen\ 73.74°)\end{aligned}$$

La raíz enésima de un número complejo $\sqrt[n]{c}$ (recuerda que n>0) que puede expresarse como $(c)^{\frac{1}{n}}$, implica el uso de la fórmula de De Moivre para las potencias:

$$c^{1/n} = \rho^{1/n}\left(Cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\, Sen\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

4.5 Forma exponencial o de Euler: equivalencia entre la forma polar y exponencial. Multiplicación y división, potenciación y radicación

Para determinar la forma de Euler de los números complejos se debe retomar la ecuación polar descrita en la sección anterior, es decir, $c = \rho\,(Cos\theta + i\,Sen\,\theta)$:

$$c = a + bi = (\rho\,Cos\theta) + (\rho\,Sen\theta)i = \rho\,(Cos\theta + i\,Sen\,\theta)$$

$c = \rho\,(Cos\theta + i\,Sen\,\theta)$

Usando la fórmula de Euler:

$e^{i\theta} = cos\theta - isen\theta$

Se concluye que el número complejo c([3]para θ en el intervalo [-π, π)), se puede representar por:

$$c = \rho\, e^{i\theta}$$

Con la notación anterior, las operaciones en los números complejos c y d con $c = \rho\, e^{i\theta}$ y $d = \upsilon e^{i\alpha}$ en su forma exponencial quedan definidos por:

Producto: $c\,d = \rho\, e^{i\theta} \upsilon e^{i\alpha} = \rho\, \upsilon e^{i\theta} e^{i\alpha} = \rho\, \upsilon e^{(i\theta + i\alpha)} = \rho\, \upsilon e^{i(\theta+\alpha)}$

División: $\frac{c}{d} = \frac{\rho\ e^{i\theta}}{\upsilon e^{i\alpha}} = \frac{\rho}{\upsilon} e^{i\theta} e^{-i\alpha} = \frac{\rho}{\upsilon} e^{i\,(\theta-\alpha)}$

Potenciación: $c^n = (\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^{\,n} e^{ni\theta}$

Con el binomio de Newton para $c = a + bi$, se tiene $c^n = (a + bi)^n$.

[3] El ángulo θ no está determinado de manera única para c, la fórmula de Euler señala que $c = \rho\ e^{i(\theta + 2\pi k)}$ para k en los naturales.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Con el binomio de Newton para $c = a + bi$, se tiene $c^n = (a + bi)^n$. Desarrolla este binomio y comprueba que es una manera alterna de calcular la potencia de un número complejo.

Ejemplo:

Si $c = 4e^{i\frac{\pi}{2}}$ y $d = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$determina el producto cd y el cociente $\frac{c}{d}$:

$$c\,d = 8e^{i\pi}$$

$$\frac{c}{d} = 2e^{i(0)} = 2$$

La potenciación es la operación inversa de la radicación, esto es:

$$c = \sqrt[n]{d} \quad \text{si y sólo si} \quad c^n = d$$

Si $c = \rho\, e^{i\theta}$ y $d = \upsilon e^{i\alpha}$ entonces $c^n = d$ implica:

$$c^n = (\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{ni\theta}$$

$$d = \upsilon e^{i\alpha} = \upsilon e^{i(\alpha+2\pi k)}$$

Por lo tanto, $\rho^n e^{ni\theta} = \upsilon e^{i(\alpha+2\pi k)}$ implica: $\rho^n = \upsilon$ y $n\theta = (\alpha + 2\pi k)$, entonces:

$$\boldsymbol{\rho} = \sqrt[n]{v}, \boldsymbol{\theta} = (\alpha + 2\pi k)/n, \text{ para } k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

Son las fórmulas para determinar las n raíces enésimas de cualquier número complejo. Por ejemplo, la raíz cuadrada de $4e^{i\pi}$ es:

$$\rho = \sqrt[2]{4},\ \theta = \frac{\alpha+2\pi k}{2}, para\ k = 0,1$$

Para $k = 0$: la raíz cuadrada es $2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Para $k = 1$: la raíz cuadrada es $2e^{i\frac{3\pi}{2}}$

Finalmente, es necesario acotar que el conjunto de los números complejos no es cerrado bajo la operación de producto y no existe una relación de orden como ocurre con los reales.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Un campo de conocimiento y con gran uso en las matemáticas y su entorno es el número e o número de Euler. Como se ha descrito en esta unidad, este número se conecta con los números complejos mediante la ecuación: $e^{i\theta} = cos\theta - isen\theta$.[4]

En este sentido, deberás investigar y entregar un escrito de tres cuartillas como mínimo que contenga los siguientes temas:

a. El numero e, conceptos generales, definición y su interrelación con los números complejos.

b. Demostración del teorema de Pitágoras usando el número e.

c. Demostración de la ley de los cosenos usando el número e.

[4] Esta referencia te puede ayudar: Rivera Mendoza, Francisco, Artículo: *Una Introducción a los números complejos*, Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes Mérida, Venezuela, 2001.

AUTOEVALUACIÓN

1. El cociente de los números complejos se define por: $(a,b)/(c,d)=(a,b)(c/c^2+d^2,-d/c^2+d^2)$ para $(c,d)\neq(0,)$. Calcula $(4,2)/(2,1)$.

2. Realiza la interpretación geométrica del conjugado de un número complejo. Calcula el conjugado de (4,3).

3. A partir de la expresión:

   $(Cos\ \theta + i\ Sen\ \theta)^n = \ Cos\ n\theta + i\ Sen\ n\theta$

   Para n=3, que es la fórmula de De Moivre, determina la identidad trigonométrica para $Cos\ 3\theta$ y $Sen\ 3\theta$ (sugerencia: desarrolla el término de la izquierda mediante el binomio de Newton).

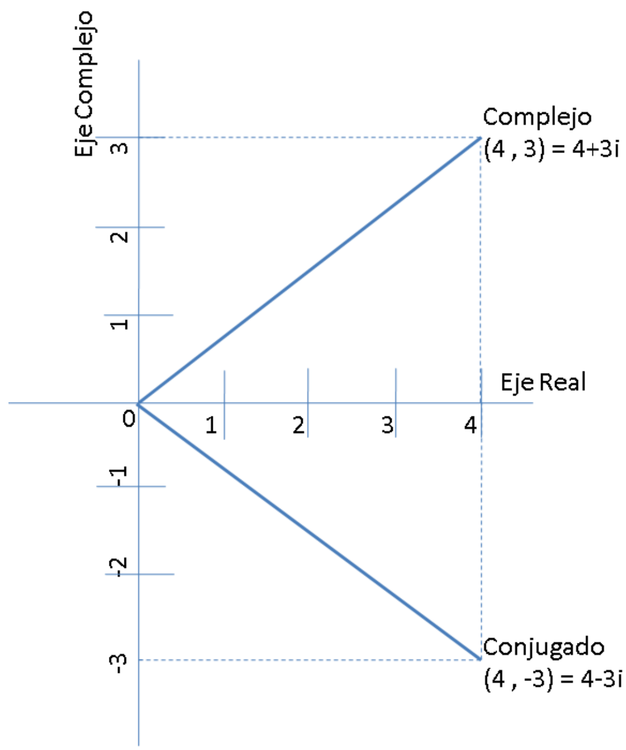
4. En el tema 4.4 de esta unidad, se ha calculado la potencia cuadrada de $4 + 3i$. Por el método que prefieras, calcula la potencia sexta de $3 + 4i$.

5. El conjunto de los números complejos no es cerrado con respecto a la operación de producto. Desarrolla el producto de (0,a)(0,b) y demuestra que es un número real.

RESPUESTAS

1. (4,2)(2/5,-1/5).

2. Conjugado $(4,-3)$. Interpretación: El conjugado de un número complejo c, se obtiene como una imagen simétrica de c alrededor del eje real.



3. $Cos\ 3\theta + i\ Sen\ 3\theta = (Cos\ \theta + i\ Sen\ \theta)^3 = \mathrm{Cos}^3\theta + 3i\mathrm{Cos}^2\theta\ \mathrm{Sen}\theta - 3\ \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}^2\theta - i\ \mathrm{Sen}^3\theta$

   igualando las partes reales y las imaginarias, se concluye:

   $Cos\ 3\theta = \mathrm{Cos}^3\theta - 3\ \mathrm{Cos}\theta\mathrm{Sen}^2\theta$ y $Sen\ 3\theta = 3\mathrm{Cos}^2\theta\ \mathrm{Sen}\theta - \mathrm{Sen}^3\theta$

4. $11753 + 10296i$.

5. (0,a)(0,b)=(-ab,0)=-ab

UNIDAD 5

ECUACIONES

OBJETIVO

El estudiante desarrollará destrezas y habilidades en la solución de ecuaciones lineales y cuadráticas en los números reales y complejos, así como en la solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales por cualquiera de sus métodos.

TEMARIO

5.1 ECUACIONES LINEALES

5.1.1 Propiedades de la igualdad

5.1.2 Solución de ecuaciones lineales

5.2 ECUACIONES CUADRÁTICAS

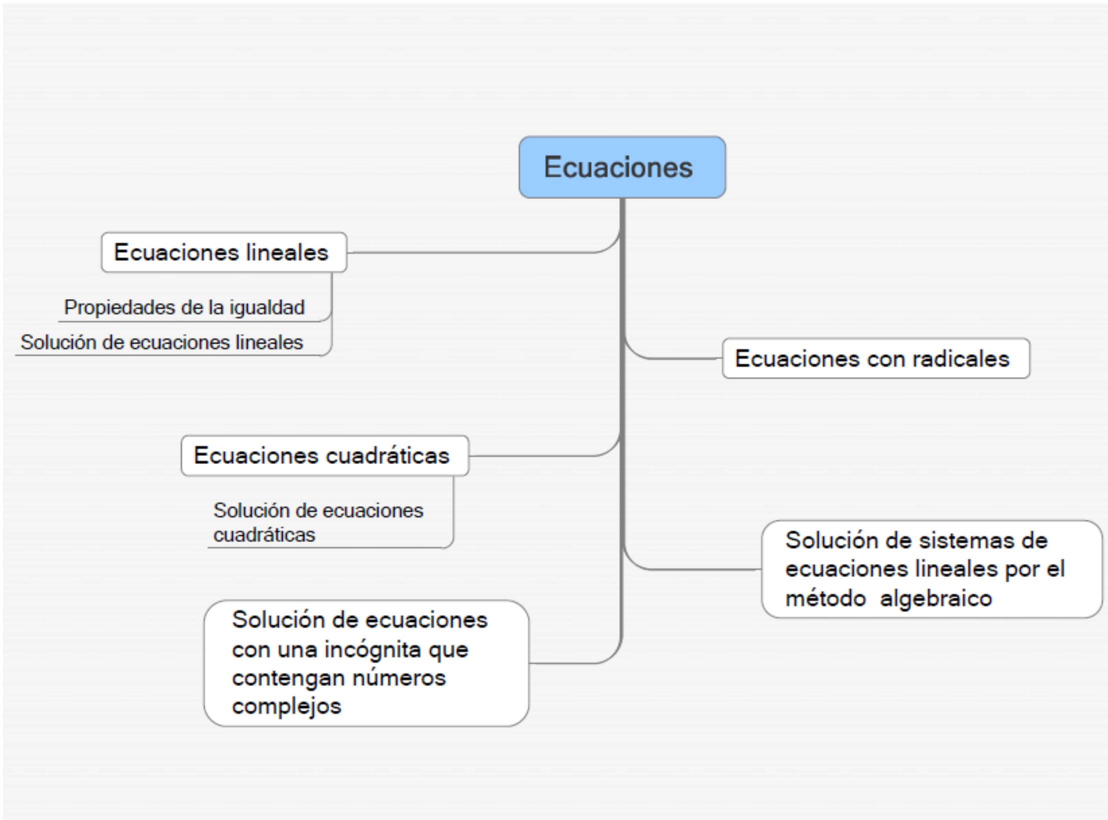
5.2.1 Solución de ecuaciones cuadráticas

5.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES CON UNA INCÓGNITA QUE CONTENGAN NÚMEROS COMPLEJOS

5.4 ECUACIONES CON RADICALES

5.5 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR EL MÉTODO ALGEBRAICO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudiarán los conceptos básicos y la operativa para su solución en las ecuaciones lineales, cuadráticas y sistemas de ecuaciones lineales.

Se debe señalar que en el álgebra, la solución de ecuaciones forma parte sustancial y tiene gran diversidad de aplicaciones, tanto científicas como comerciales. Aquí se expondrán a los números reales y a los números complejos en la obtención de las raíces.

En ciertos problemas es necesario trabajar con más de una ecuación de manera simultánea, por lo que es preciso el estudio de los sistemas de ecuaciones, particularmente de dos variables y dos ecuaciones.

5.1 ECUACIONES LINEALES

Retomando el concepto de expresión algebraica, una igualdad entre dos expresiones algebraicas en las que al menos una de éstas involucra una variable o incógnita se denomina ecuación.

Específicamente, se consideran los números reales $a, b\ y\ c$ con $a \neq 0$. Se denomina ecuación lineal con una incógnita a cualquier ecuación del tipo:

$$ax + b = c.$$

A este tipo de ecuaciones también se le denomina de primer grado por ser el valor uno el exponente de la variable x. A continuación se muestran algunos ejemplos de ecuaciones primer grado:

$$x + 1 = 0, \quad 2x + 2 = 2, \quad \frac{x}{2} + 1 = 5, \quad x + \sqrt[3]{2} = 0.$$

5.1.1 Propiedades de la igualdad

En este tipo de ecuaciones, cualquier número que se encuentre contenido en el conjunto solución de la variable donde esta se ha definida[5], y que al evaluar la ecuación en ese número hace que la igualdad obtenga un valor lógico verdadero, es una solución de la ecuación. Por ejemplo, la ecuación $x + 1 = 0$ al ser evaluada en el valor 2 da por resultado: $2 + 1 = 0$, $3 = 0$ que es falso. Si al contrario se evalúa en el valor -1, $-1 + 1 = 0$, $0 = 0$ que es verdadero, entonces $x = -1$ es una solución de la ecuación debido a que satisface la igualdad.

A las soluciones de una ecuación también se les denomina raíces de la ecuación.

[5] El conjunto solución de una ecuación es aquel que está contenido en el dominio de la incógnita y son los números reales o complejos tales que al ser sustituidos en la ecuación, da como resultado una identidad numérica. Por lo anterior, es imprescindible señalar en que sistema se ha definida la incógnita.

5.1.2 Solución de ecuaciones lineales

Resolver una ecuación significa determinar su conjunto solución, es decir, el conjunto de todas sus raíces. Si dos ecuaciones poseen el mismo conjunto solución, entonces son ecuaciones equivalentes.

Un método que se utiliza para resolver ecuaciones lineales es reemplazar la ecuación por una cadena de ecuaciones equivalentes, transformando la ecuación en otras equivalentes a la original con el objetivo de llegar a expresiones más simples hasta obtener una ecuación de la forma $x = c$, donde x es una incógnita y c es una constante en los números reales.

Con lo anterior y para la solución de ecuaciones de primer grado, se deben estudiar las transformaciones para obtener ecuaciones equivalentes. Estas transformaciones se originan en el siguiente teorema:

Se consideran tres expresiones algebraicas p, q, r en la variable x para las cuales el conjunto solución es la intersección de los dominios de p, q, r. Si $p = q$ entonces $p + r = q + r$, y si además el valor de $r \neq 0$, se cumple $pr = qr$.

El teorema anterior también se puede expresar con las siguientes formas:

a. Intercambiar la ecuación: $ax + b = c$ es equivalente a $c = ax + b$.

b. Sumar el mismo número: $ax + b = c$ es equivalente a $ax + b + d = c + d$.

c. Multiplicar ambos miembros por un número distinto de cero: $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = \mathrm{c}$ es equivalente a $\mathrm{d}(\mathrm{ax} + \mathrm{b}) = \mathrm{d\,c}$.

d. Las propiedades de la adición y la multiplicación definidas en los reales.

El teorema anterior indica el camino para la solución de ecuaciones de primer grado en una variable, y de manera específica para una ecuación de la forma $ax + b = c$, después de aplicar el teorema, se tiene que la solución a esta ecuación está dada por la expresión:

$$x = (c - b)/a$$

Ejemplo:

Determina la raíz de la ecuación $-2x + 4 = 6$.

$$-2x + 4 = 6$$

$$x = (6 - 4)/(-2)$$

$$x = 2/(-2)$$

$$x = -1$$

En general, es excelente práctica verificar el resultado, evaluando la ecuación original en el valor $x = -1$:

$$-2x + 4 = 6$$

$$-2(-1) + 4 = 6$$

$$2 + 4 = 6$$

$$6 = 6$$

Al resultar una afirmación verdadera como se había previsto, también se le denomina identidad.

5.2 Ecuaciones cuadráticas

Al considerar el producto notable: $(x + \mathrm{y})(x - \mathrm{y}) = x^2 - y^2$, un caso particular de éste se tiene con $\mathrm{y} = 1$, $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$. ¿Qué significa el proceso en sentido inverso?, es decir, ¿qué significa $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$?

En general, si un polinomio está escrito como el producto de otros polinomios, a cada uno de éstos se le denomina *factor*, y al proceso de encontrar todos los factores se le llama factorización. La expresión algebraica anterior: $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ muestra un ejemplo de factorización para el polinomio $x^2 - 1$ con los factores: $(x+1)$ y $(x-1)$.

Con lo anterior, y con el formato de ecuación $x^2 - 1 = 0$, se concluye que una forma de solución es: $(x+1)$ y $(x-1)$, lo cual se estudiará con detalle en el siguiente apartado. En este momento sólo se formalizará el concepto de ecuación cuadrática como aquella expresión algebraica de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$ con a, b, c constantes reales y $a \neq 0$.

5.2.1 Solución de ecuaciones cuadráticas

En la sección anterior se explicó la determinación de raíces de una ecuación de primer grado, en esta sección se analizarán las ecuaciones de segundo grado también llamadas cuadráticas.

Sean a, b, c constantes reales con $a \neq 0$. Se denomina ecuación cuadrática con una incógnita a toda ecuación que se puede llevar a la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Para determinar las raíces de esta ecuación existen diversas técnicas:

a. Si $c = 0$ y $b \neq 0$, por medio de ecuaciones equivalentes se tiene:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

Entonces, $x = 0$ o $x = -b/a$.

b. Si $b = 0$ y $c<0$, por medio de ecuaciones equivalentes se tiene:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$x^2 = -c/a$$

Entonces, $x = \sqrt{c/a}$ o $x = -\sqrt{c/a}$

c. Si $a = 1, b \neq 0$ y $c \neq 0$, el método de factorización notable consiste en convertir la ecuación cuadrática en un producto de binomios (como se describió en la unidad tres), o bien completando cuadrados.

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

Entonces, $x = x_1$ o $x = x_2$

d. Además, existe un método general para resolver una ecuación de segundo grado: Sean $\mathrm{a, b, c}$ constantes reales con $\mathrm{a} \neq 0$ tales que $\mathrm{ax^2 + bx + c} = 0$ y $\Delta = \mathrm{b^2 - 4ac}$, entonces:

i. Si $\Delta < 0$ no tiene solución en el conjunto de los números reales. La solución a esta forma se propone en la siguiente sección.

ii. Si $\Delta = 0$, la solución a la ecuación está dada por la expresión $x = -b/2a$ y además esta raíz es doble.

iii. Si $\Delta > 0$, las soluciones a la ecuación están dadas por las expresiones: $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ejemplos:

Resolver la ecuación $x^2 + x + 6 = 0$: Aplicando el método de factorización notable[6] $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, entonces $x_1 = 2$ o $x_2 = -3$.

[6] El nemónico opera de la siguiente manera: se buscan dos números que multiplicados den el valor de c y a la vez sumados den el valor de b.

Resolver la ecuación $x^2 + 4x = 0$: Factorizando $x^2 + 4x = x(x+4) = (x-0)(x+4) = 0$, entonces $x_1 = 0$ o $x_2 = -4$.

Resolver la ecuación $x^2 - 16 = 0$: Por ecuaciones equivalentes $x^2 - 16 = 0;\ x^2 = 16;\ x^2 = 16$, entonces $x_1 = -\sqrt{16} = -4$ o $x_2 = \sqrt{16} = 4$.

Resolver la ecuación $2x^2 - 7x = 15$: Por la fórmula general con $a = 2, b = -7$ y $c = -15$, $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = 49 + 120 = 169 > 0$. Las soluciones están dadas por: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o $x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$x_1 = \frac{+7+\sqrt{49-4(2)(-15)}}{2(2)} = \frac{+7+\sqrt{49+120}}{2(2)} = \frac{+7+\sqrt{169}}{4} = \frac{+7+13}{4} = 5 \text{ o}$$

$$x_2 = \frac{+7-\sqrt{49-4(2)(-15)}}{2(2)} = \frac{+7-\sqrt{49+120}}{2(2)} = \frac{+7-\sqrt{169}}{4} = \frac{+7-13}{4} = \frac{-6}{4} = \frac{-3}{2}.$$

5.3 Solución de ecuaciones cuadráticas con una incógnita que contengan números complejos

En la unidad cuatro se enfatizó en la creación del sistema de los números complejos con unidad imaginaria: $i^2 = -1$ (o equivalentemente $i = \sqrt[2]{-1}$), para la solución de ecuaciones del tipo $x^2 + k = 0$ con k un número real. El par de soluciones para esta ecuación están dadas por: $x = i\sqrt[2]{k}$ o $x = -i\sqrt[2]{k}$; por lo tanto, la ecuación $x^2 + k = 0$ se puede expresar como el producto de los factores: $(x - i\sqrt[2]{k})(x + i\sqrt[2]{k}) = 0$.

Como se estableció, existe un método general para resolver una ecuación de segundo grado. Sean $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ constantes reales con $\mathrm{a} \neq 0$ tales que $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$ y $\Delta = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$, si $\Delta < 0$; las soluciones a esta ecuación están dadas por los complejos conjugados:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

Determinar las raíces de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$.

Aplicando la fórmula general con $a = 1, b = 1\ y\ c = 1$, se tiene $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = 1 - 4 = -3 < 0$, por lo tanto las raíces son complejas.

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Finalmente, se comenta el hecho de que en una ecuación cuadrática los coeficientes $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ se han limitado al conjunto de los números reales, no obstante, las propiedades que se estudiaron se extienden a los números complejos y las soluciones están dadas por las mismas ecuaciones.

5.4 Ecuaciones con radicales

Como se indicó en la unidad tres, una parte de los conceptos básicos de los números reales es la definición de radical, y más específicamente la raíz enésima de un número. Es necesario recordar que para n un número natural, si a y b son dos números reales no negativos entonces:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y solo si } b^n = a.$$

Esta definición aplica también para a y b negativos, y n entero positivo impar. Además, si x es un número real, para m entero y n entero positivos si $\frac{m}{n}$ es un número racional, en el cual m y n no tienen factores primos comunes, entonces para x un número real cualquiera, tal que $\sqrt[n]{x}$ existe, se tiene: $(x)^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$. Con lo anterior, ahora se trata de determinar las soluciones de ecuaciones que involucren radicales o exponentes racionales elevando ambos miembros de la ecuación a una potencia entera y positiva. Se denomina ecuación radical aquella en la que interviene al menos un radical en una expresión algebraica en la variable x, en su dominio de definición.

Al considerar n un número entero positivo, x una variable y p y q dos expresiones algebraicas tales que $p = q$; entonces, el conjunto de soluciones del sistema $p = q$ es un subconjunto de soluciones del sistema $p^n = q^n$, es decir, toda solución de $p = q$ es también solución de $p^n = q^n$.

Ejemplo:

Para la ecuación lineal $\sqrt[2]{2x+1} = 2$, determinar la solución.

Por ecuaciones equivalentes:

$$\sqrt[2]{2x+1} = 2$$

$$2x + 1 = 2^2$$

$$2x = 4 - 1$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Ejemplo:

Determinar las soluciones de $\sqrt[3]{2x^2+6} = 2$.

Por ecuaciones equivalentes:

$$\sqrt[3]{2x^2+6} = 2$$

$$2x^2 + 6 = 8$$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

5.5 Solución de sistemas de ecuaciones lineales por el método algebraico

Un sistema de ecuaciones es aquel que se construye mediante el trabajo simultáneo de dos o más ecuaciones, y el objetivo es determinar las soluciones comunes a todas las ecuaciones.

En la relación geométrica algebraica de una ecuación de primer grado, toda ecuación de primer grado representa a una recta, por lo tanto, un sistema de ecuaciones lineales representarán a diversas rectas. El objetivo de un sistema de ecuaciones lineales es determinar en su caso, el punto común o de intersección de todas las rectas. Es claro que esta intersección puede no existir, como en el caso de líneas paralelas.

Una expresión algebraica de la forma $ax + by + c = 0$ se denomina ecuación lineal en las variables x y y. Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es entonces un sistema de la forma:

$$ax + by + c = 0$$

$$dx + ey + f = 0$$

La solución a un sistema de ecuaciones lineales se basa en el principio establecido de las ecuaciones equivalentes, es decir, mediante una sucesión de pasos se obtienen ecuaciones simples en su solución.

Dado un sistema de ecuaciones simultáneas de primer grado, su solución queda establecida en el siguiente teorema que garantiza la equivalencia del sistema en otro algebraicamente más simple en su solución.

a. Un intercambio de la posición de dos ecuaciones cualesquiera.

b. Por el proceso de multiplicar ambos lados de una ecuación por un número real distinto a cero.

c. Reemplazar una ecuación del sistema por otra que es combinación lineal de la otra ecuación con la primera.

Para distinguir en detalle la aplicación de este teorema, considerar el siguiente sistema y su solución con la aplicación de tres técnicas tácitas:

$$x - 3y - 3 = 0 \qquad \text{(ecuación 1)}$$

$$2x - 7y - 5 = 0 \qquad \text{(ecuación 2)}$$

Método de suma y resta

Multiplicar la ecuación 1 por -2 y la ecuación resultado se suma a la ecuación 2:

$$-2x + 6y + 6 = 0$$

$$2x - 7y - 5 = 0$$

Sumando:

$$-y + 1 = 0$$

Entonces, $y = 1$.

Sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo en la ecuación 1, se tiene el valor de x:

$$x - 3y - 3 = 0$$

$$x - 3(1) - 3 = 0$$

$$x = 6$$

La solución al sistema de ecuaciones es: $(x, y) = (6,1)$.

Método de sustitución

Tomar de la ecuación 1 el valor de x y sustituirlo en la ecuación 2:

$$x - 3y - 3 = 0$$

$$x = +3y + 3$$

Sustituyendo y resolviendo la ecuación resultado:

$$2x - 7y - 5 = 0$$

$$2(+3y + 3) - 7y - 5 = 0$$

$$6y + 6 - 7y - 5 = 0$$

$$-y + 1 = 0$$

$$y = 1$$

Ahora, se procede igual que en el método anterior, sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener x. Nuevamente, el par ordenado resultado es: $(x, y) = (6,1)$.

Método de igualación

Ahora, se selecciona alguna de las dos variables en ambas ecuaciones y mediante ecuaciones equivalentes se despeja, se igualan los resultados para obtener una nueva ecuación en la otra variable, y finalmente se procede a su solución.

De ambas ecuaciones, trabajar con la variable x:

$$x = 3y + 3$$

$$x = (7y + 5)/2$$

Igualando $x = x$ y realizando las operaciones indicadas para la variable y:

$$3y + 3 = (7y + 5)/2$$

$$2(3y + 3) = 7y + 5$$

$$6y + 6 = 7y + 5$$

$$6y - 7y = 5 - 6$$

$$y = 1$$

Finalmente, y como en los casos anteriores, se toma este valor de la variable y y se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de la variable x.

$$2x - 7y - 5 = 0$$

$$2x - 7(1) - 5 = 0$$

$$2x - 12 = 0$$

$$x = 12/2$$

$$x = 6$$

Se observa que en los tres métodos, los resultados son idénticos. Además, se sugiere la comprobación mediante la sustitución de tales valores en las ecuaciones originales para la obtención de identidades.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Existen diversas aplicaciones de los temas descritos en esta unidad. En este sentido, investiga el detalle de las siguientes aplicaciones:

a. Proporciones
b. Porcentajes
c. Mezclas
d. Realización de trabajo
e. Movimiento a velocidad uniforme
f. Problemas que involucran conceptos económicos
   i. Función lineal de costo
   ii. Función lineal de ingreso
   iii. Punto de equilibrio financiero
   iv. Función lineal de utilidad
   v. Función lineal de demanda
   vi. Función lineal de oferta

Realiza un informe escrito con un esquema conceptual, un planteamiento matemático y un ejemplo de aplicación de por lo menos tres de los temas listados.

AUTOEVALUACIÓN

1. La ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ permite la conversión de grados Fahrenheit a grados centígrados; mediante ecuaciones equivalentes determina la ecuación que convierte grados centígrados a grados Fahrenheit:

2. Determina las raíces de $2x^2 + 2x - 2 = 0$:

3. Determina la solución de la ecuación $2x - 2\sqrt{2x - 5} = 8$:

4. Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x+y}{6} - \frac{x-y}{8} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{(ecuación 1)}$$

$$\frac{3x-y}{4} - \frac{x+2y}{6} + 1 = 0 \quad \text{(ecuación 2)}$$

RESPUESTAS

1. $F = \frac{9}{5}C + 32$.

2. $x = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ o $x = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $x = 7$.

4. $(x, y) = \left(0, \frac{13}{7}\right)$.

UNIDAD 6

RAÍCES DE POLINOMIOS

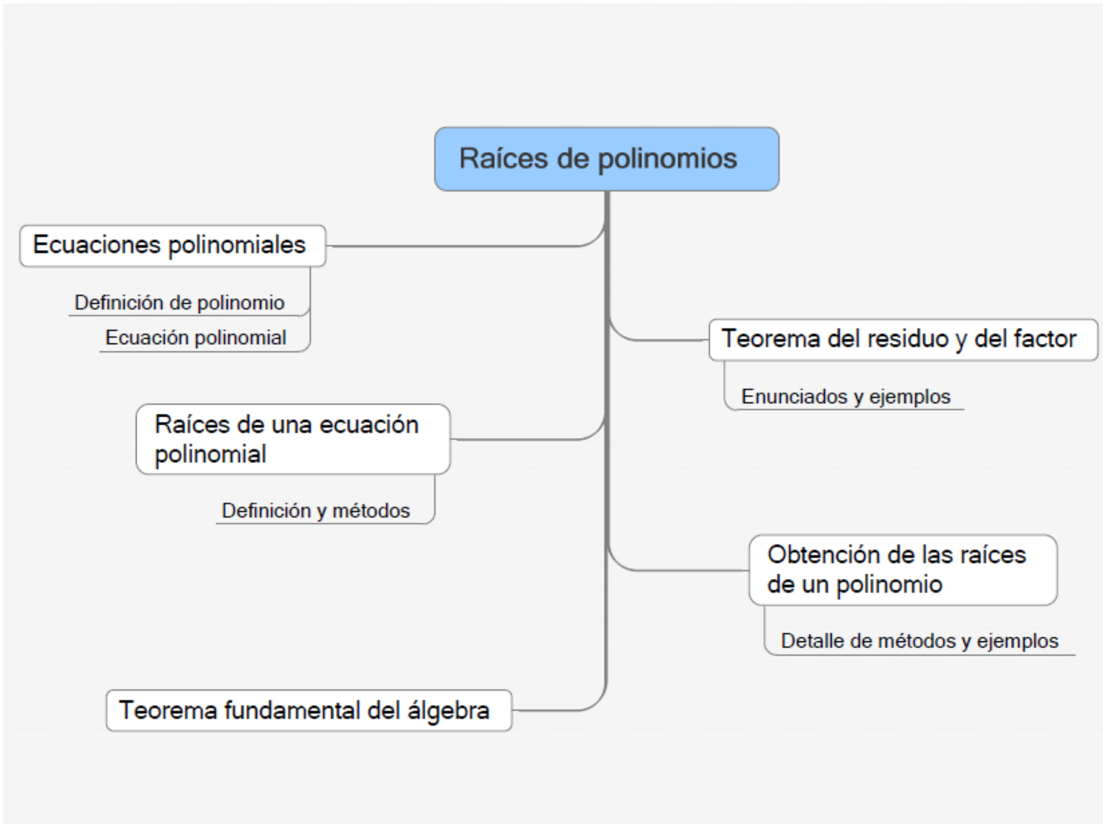
OBJETIVO

El estudiante desarrollará destrezas y habilidades en la determinación de raíces de polinomios; la ejercitación estará destinada a adquirir práctica en el manejo y comprensión de la factorización, y de las operaciones con polinomios.

TEMARIO

6.1 Ecuaciones polinomiales
6.2 Raíces de una ecuación polinomial
6.3 Teorema fundamental del álgebra
6.4 Teorema del residuo y del factor
6.5 Obtención de las raíces de un polinomio

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

En esta unidad se estudiarán los conceptos y métodos para el cálculo de raíces de polinomios.

En unidades anteriores, se estudiaron a los polinomios y sus operaciones básicas como sumar y multiplicar, además de operaciones específicas como la factorización. Particularmente, en la unidad cinco se explicó el proceso de cálculo de raíces de polinomios lineales y cuadráticos.

En esta unidad se examinará la teoría de polinomios de grado arbitrario para la determinación de sus raíces. La teoría de polinomios se extrapola a diversas áreas del conocimiento, por lo que es conveniente visualizar a la variable x como un ente genérico.

La teoría de los polinomios tiene aplicación en la informática, en la economía para los cálculos de intereses y duración de las hipotecas, así como en la medicina y en gran cantidad de ramas de la ciencia.

6.1 ECUACIONES POLINOMIALES

Una expresión algebraica del tipo:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

con a_i números reales para $i=0,\ldots,n$, $a_n \neq 0$ y n un entero no negativo, se denomina polinomio de grado n en la variable x. Se trata de una función que tiene por dominio el conjunto de los números reales, y por imagen para cada número real x el resultado de la expresión P(x). A cada uno de los monomios $a_i x^i$ para $i=0,\ldots,n$ se le llama término del polinomio; a_n se denomina coeficiente principal.

Con los elementos descritos, se denomina ecuación polinómica a una igualdad del tipo:

$$P(x) = 0,$$

de forma equivalente:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

Se debe recordar que el grado del polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman. En este caso, el polinomio es de grado n, además, todo polinomio de grado n tiene n + 1 coeficientes (pudiendo ser algunos de éstos el valor 0).

Ejemplos:

Las siguientes son ecuaciones polinomiales:

$P(x) = 4x^5 + 3x^4 - 10x^2 + 11x - \frac{12}{5} = 0$, $P(x) = 6x^2 + 2x - 1 = 0$, $P(x) = \frac{3}{2}x^2 + 3x = 0$

Ejemplo:

En estricto apego a la definición, la siguiente expresión $\frac{x^2-1}{(x-1)} - 4 = 0$ no es polinomial, debido a que puede escribirse en la forma $(x^2-1)(x-1)^{-1} - 4 = 0$, en la cual la variable x tiene una potencia -1 que está fuera de la definición de polinomio que exige un entero no negativo. Pero, tal expresión puede transformarse en polinomial mediante ecuaciones equivalentes:

$$\frac{x^2-1}{(x-1)}-4=0$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}-4=0$$

$$(x+1)-4=0$$

$$x-3=0$$

Para los resultados que se manejan mediante el texto, se trabaja con los coeficientes a_i números reales o complejos (a menos que sea necesario, este dato ya no se especificará). En casos como el anterior, es imprescindible precisar el dominio de la función polinomial y omitir de éste los valores donde no está definida la función, en este caso x=1.

6.2 Raíces de una ecuación polinomial

El tema central de esta unidad es la determinación de las raíces de un polinomio, por ello se inicia con la definición de raíz de un polinomio.

Para un polinomio

$$P(x)= a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x^1+a_0$$

un número , en el dominio del polinomio, es raíz de $P(x)$ si

$$P(a)=0,$$

es decir, si se cumple la identidad:

$$P(a) = a_n(a)^n+a_{n-1}(a)^{n-1}+a_{n-2}(a)^{n-2}+\ldots+a_2(a)^2+a_1(a)^1+a_0 = 0$$

Ejemplo:

En la unidad anterior se calcularon los valores $x_1=2$ o $x_2=-3$ del polinomio $x^2+x-6=0$. Estos valores ¿cumplen la definición de raíz del polinomio?

Para $x_1=2$:

$x^2+x-6=0$

$2^2+2-6=0$

Para $x_2=-3$:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(-3)^2 + (-3) - 6 = 0$$

En ambos casos, las expresiones son idénticamente nulas, entonces los valores propuestos son raíces del polinomio.

Se denomina multiplicidad de una raíz al número de veces que aparece como raíz en la descomposición del polinomio. Por ejemplo, $(x-1)(x-1)=x^2-2x+1=0$, implica que $x=1$ es raíz de multiplicidad 2.

Los métodos para calcular las raíces de una ecuación polinomial usando los coeficientes del propio polinomio aplican de manera excelente para ecuaciones de primer y segundo grado, como se hizo en la unidad cinco. ¿Cuál es el procedimiento para ecuaciones no lineales ni cuadráticas?

El siguiente teorema garantiza la existencia de las raíces, no así un método tácito para determinarlas.

6.3 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Uno de los grandes resultados del álgebra es justamente su teorema fundamental, el cual establece que si P(x) es un polinomio de grado mayor que 0, entonces la función polinomial P(x) tiene por lo menos una raíz compleja (se debe recordar que los complejos contienen a los reales). De este teorema se deriva que en el sistema de números complejos, una función polinomial de grado mayor que 0, tiene exactamente n raíces.

6.4 TEOREMA DEL RESIDUO Y DEL FACTOR

Para la determinación de las raíces de polinomios es necesario reafirmar los siguientes resultados.

Si P(x) y Q(x) son dos polinomios en su dominio, tales que el producto de ellos es el polinomio cero, entonces se cumple que: P(x)=0 o Q(x)=0.

Haciendo una similitud entre los polinomios y el algoritmo de la división que se estudió en la unidad dos, junto con los teoremas descritos en esta unidad, un polinomio se puede descomponer en productos de factores, y cada factor divide al polinomio exactamente. Entonces, el problema es determinar cómo se construyen esos factores. El siguiente algoritmo de la división para polinomios propone un escenario:

Si P(x) y G(x) son polinomios en los complejos con G(x) ≠ 0, entonces existen polinomios únicos Q(x) y R(x), llamados cociente y residuo respectivamente, tales que:

$$P(x) = G(x)\,Q(x) + R(x)$$

con R(x)=0 o el grado de R(x) menor que el grado de G(x).

Si G(x) es un polinomio lineal de la forma (x-a), es decir, G(x)=(x-a), se obtiene el siguiente resultado, denominado teorema del residuo.

Teorema del residuo

Si un polinomio P(x) se divide entre el binomio (x–a), con a cualesquiera número real o complejo, entonces el residuo es P(a), esto significa que el residuo de la división de un polinomio P(x) por (x–a), es igual al valor numérico del polinomio cuando x = a.

Finalmente, y como consecuencia del teorema anterior, el teorema del factor, establece que lo siguiente:

Teorema del factor

Cuando un polinomio P(x) se divide entre un binomio (x–a) y su residuo es cero, entonces se puede afirmar que a es raíz del polinomio, es decir, el residuo r = P(a)=0.

Ahora, se debe analizar el siguiente ejemplo:

$$P(x) = G(x)\, Q(x) + R(x)$$

$$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10 = (x-2)\, Q(x) + R(x)$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^3 + 3x^2 + 4x - 5 \quad \leftarrow Q(x) \\
G(x) \rightarrow (x-2) & \overline{\big)\, 2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10} \quad \leftarrow P(x) \\
 & \underline{-2x^4 + 4x^3} \\
 & \qquad +3x^3 - 2x^2 \\
 & \qquad \underline{-3x^3 + 6x^2} \\
 & \qquad\qquad +4x^2 - 13x \\
 & \qquad\qquad \underline{-4x^2 + 8x} \\
 & \qquad\qquad\qquad -5x + 10 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{+5x - 10} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \quad \leftarrow R(x)
\end{array}
$$

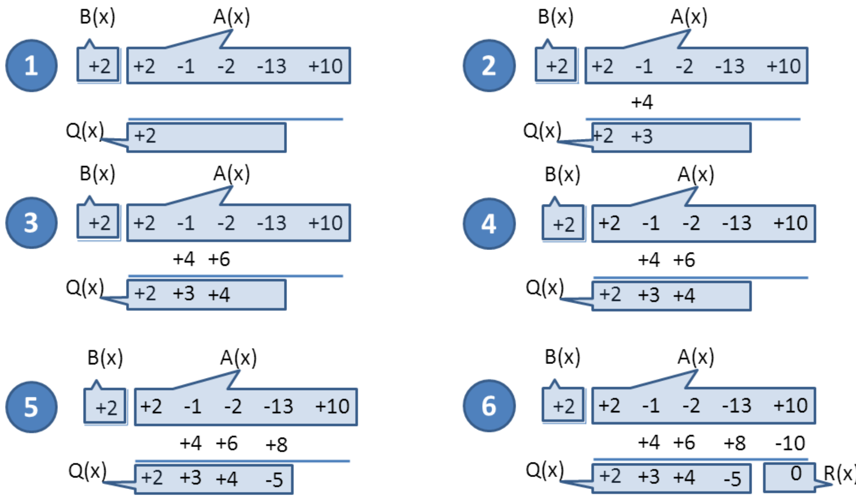
Con estos resultados, el residuo r es el valor de P en el punto a, es decir, r = P(a), si además r=0, entonces (x – a) = (x – 2) es un factor. El valor r = 0, implica que 2 es una raíz de la función P(x), y por lo tanto, el punto (2,0) es una intersección de la gráfica de P(x) con el eje X del sistema cartesiano.

6.5 Obtención de las raíces de un polinomio

Con el trabajo desarrollado en esta unidad y de acuerdo con el tema de la división sintética de la unidad tres, además del ejemplo anterior, se concluye que el procedimiento de la división sintética simplifica el trabajo para divisores de polinomios con la forma (x – a). Se debe recordar la división sintética aplicada a los polinomios del ejemplo anterior, el cual ilustra del mismo modo el siguiente corolario: “Todo polinomio con coeficientes reales o complejos y grado mayor que cero tiene un factor de la forma (x – a), donde a es un número complejo.”

$$P(x) = G(x)\,Q(x) + R(x)$$

$$2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10 = (x - 2)\,Q(x) + R(x)$$



Por lo tanto: $2x^4 - x^3 - 2x^2 - 13x + 10 = (x - 2)(2x^3 + 3x^2 + 4x - 5) + 0(x)$

Lo anterior indica que siempre es posible expresar un polinomio como un producto de polinomios lineales. Esta idea conduce al siguiente teorema:

Si P(x) es un polinomio de grado n (n mayor que cero) con coeficientes reales o complejos, y a el coeficiente principal de P(x), entonces existen n números complejos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que permiten la siguiente descomposición factorial del polinomio:

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

Hasta aquí se han recopilado una serie de resultados que garantizan la existencia de las raíces, pero no existe un procedimiento directo que permita su obtención para grados mayores. En general, para la aproximación de las raíces de un polinomio se utilizan algoritmos del análisis numérico mediante computadora. No obstante, algunos resultados particulares para las raíces de un polinomio se mencionan enseguida:

- El número 0 es raíz de un polinomio si y sólo si el término independiente del polinomio es cero.
- 1 es raíz de un polinomio si y sólo si la suma de los coeficientes es cero.

- 1 es raíz de un polinomio si y sólo si la suma de los coeficientes de los términos de grado par es igual a la suma de los coeficientes de los términos de grado impar.
- Si P(x) es un polinomio de grado n>0 con coeficientes reales y posee una raíz compleja c, entonces el conjugado de c también es raíz del polinomio.
- Las raíces no nulas de un polinomio con coeficientes enteros son divisores del coeficiente de menor grado del polinomio.
- Si

  $$P(x)=a_nx^n+ a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$$

  es un polinomio de grado n>0 con coeficientes enteros y el número racional $\frac{c}{d}$ con c>0, entonces c es un factor de a_0 y d es un factor de a_n.

Ejemplos:

En cada caso, determinar las raíces del polinomio propuesto. En bastantes ocasiones se pueden combinar los métodos de solución o aplicar algunos y otros no, según se presente el polinomio. Se debe intentar aplicar primero algún método de factorización, y luego en uno de los factores que ya es de grado menor, se pueden seguir aplicando otros métodos.

a.

x^3-x=0

x(x^2-1)=0, factorizar x

(x-0)(x^2-1)=0, raíz x=0

(x-0)(x^2-1)=0, x^2-1=(x-1)(x+1) por factorización notable

(x-0)(x-1)(x+1)=0, raíces x=0, x=1 y x= -1

En el ejemplo anterior, también se pudo haber aplicado el hecho de que x=1 es raíz, porque la suma de los coeficientes del polinomio es 0.

b.

2x^5-32x=0

$2x(x^4-16)=0$, factorizar $2x$, raíz $x=0$

$2x(x^4-16)=0$, factorizar $(x^4-16)=(x^2-4)(x^2+4)$

$2x(x^2-4)(x^2+4)$, productos notables $(x^2-4)=(x-2)(x+2)$, las raíces son $x=2$, $x=-2$

$2x(x-2)(x+2)(x^2+4)$,resolver por fórmula general grado dos $x^2+4=0$

$2x(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)=0$, raíces complejas $x=2i$, $x=-2i$

Por lo tanto, las cinco raíces del polinomio son: $x=0$, $x=2$, $x=-2$, $x=2i$, $x=-2i$ y el polinomio factorizando es:

$2x^5- 32x = 2x (x-2) (x+2) (x-2i) (x+2i)$.

c.

$x^3+6x^2+11x+6=0$

Aplicando el criterio: las raíces no nulas de un polinomio con coeficientes enteros, son divisores del coeficiente de menor grado del polinomio, se tiene que los factores de 6 son 1x2x3, por lo tanto, las raíces candidato serán {1, 2, 3,-1,-2,-3}. Por ejemplo, aplicando el método de la división sintética para estos valores se comprueba que las raíces son: -1, -2 y -3, esto es, $x^3+6x^2+11x+6=(x+1)(x+2)(x+3)$.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

En la unidad se presentaron diversos métodos para la obtención de raíces de polinomios de primero y segundo grados. Existen técnicas para la solución de ecuaciones polinomiales de grados tres y cuatro. Una buena referencia bibliográfica es: “La matemática: su contenido, método y significado”.[7]

Para el caso de la ecuación de tercer grado se tiene el siguiente bosquejo:

La ecuación

$$P(y)=y^3 + ay^2 + by+ c = 0$$

[7] A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Laurentiev y otros, *La matemática: su contenido, método y significado,* p.p. 321-326.

mediante el cambio de variable $y = x - \frac{a}{3}$ puede expresarse en la forma

$$x^2 + px + q = 0$$

cuyas soluciones están dadas por la fórmula de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt[2]{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Para el caso de la ecuación polinomial de tercer y cuarto grado, investiga los detalles propuestos en sus métodos de solución mediante un informe escrito adicionando resolución de ecuaciones como ejemplo.

AUTOEVALUACIÓN

1. El valor x=-1 es raíz del polinomio $x^2+2x+3=0$, explica tu respuesta:

2. Realiza el producto de los $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=0$, y entonces determina sus raíces:

3. Determina las raíces de $2x^4-30x^3+20x+48=0$:

4. Determina las raíces de $x^4+x^2=0$:

5. Considera el polinomio $x^6-2x^5+x^4-x^2+2x-1=0$, ¿1 es candidato a raíz?, explica por qué:

RESPUESTAS

1. No es raíz porque al aplicar la evaluación por división sintética el residuo es distinto de cero por el teorema del factor.

2. x=1, x=2, x=3, x=4.

3. x=-1, x=2, x=3, x=-4.

4. x=0 (raíz doble), $x = i, x = -i$

5. Sí, porque “1 es raíz de un polinomio si y sólo si la suma de los coeficientes es cero”, en este caso: 1-2+1-1+2-1=0.

UNIDAD 7

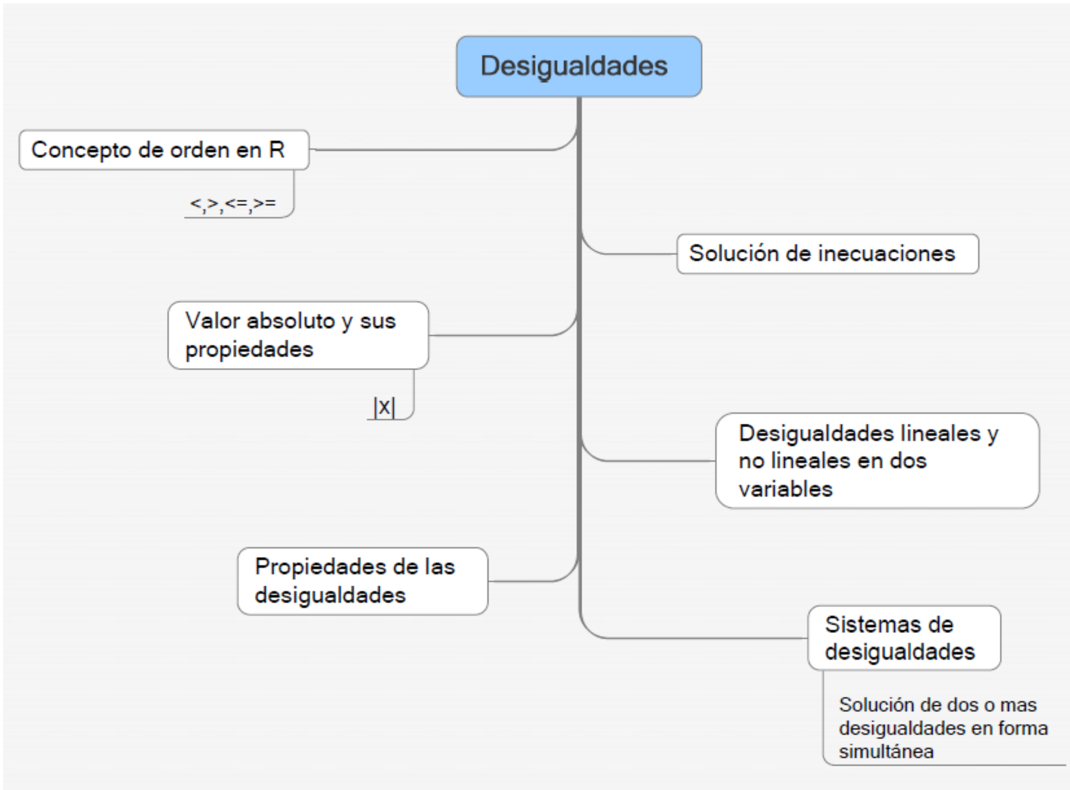
DESIGUALDADES

OBJETIVO

El estudiante desarrollará destrezas y habilidades en la determinación de las soluciones de las inecuaciones lineales y no lineales, así como en la solución de sistemas de inecuaciones, partiendo del concepto de orden en los reales.

TEMARIO

MAPA CONCEPTUAL



INTRODUCCIÓN

Como sucede con las ecuaciones, la teoría de las desigualdades es de gran utilidad en la solución de diversos problemas de la vida cotidiana, por lo que las inecuaciones han alcanzado el mismo nivel de importancia.

En esta unidad se plantean las bases teóricas para la usabilidad de las desigualdades en su razonamiento y solución. Primero se conceptualiza al orden en los reales, así como al valor absoluto y sus propiedades.

Después se exponen las desigualdades y sus propiedades, así como la solución de desigualdades lineales y no lineales en una y dos variables.

Al final de la unidad se presenta la solución de sistemas de desigualdades.

7.1 CONCEPTO DE ORDEN EN R

En la unidad dos se han considerado las relaciones "menor que (<)" y "mayor que (>)", de tal forma que para a y b dos números cualquiera, a es menor que o mayor que si existe un número positivo, tal que $a + c = b$, y se denota por: "$a < b$" o "$b > a$", que constituye la relación de orden en los reales para a, b, c números reales.

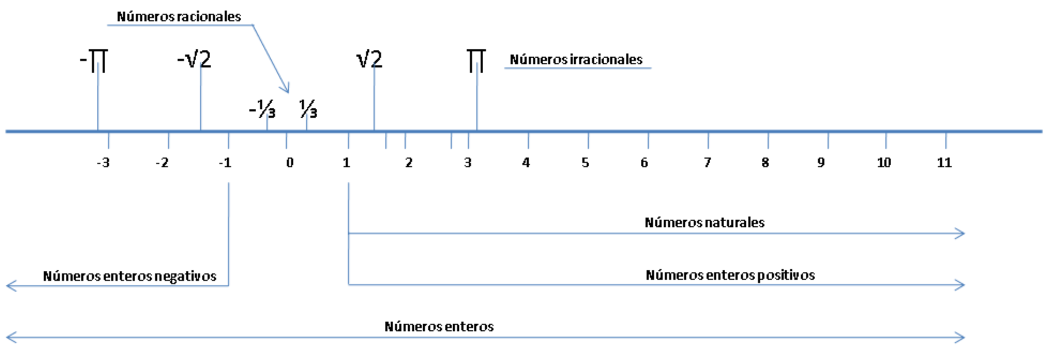
Ahora se precisa esta definición de orden en los reales, como se ha hecho con las ecuaciones, se consideran expresiones con esta relación pero con el uso de variables.

Dados a y b dos números reales cualesquiera:

1. "a es menor que b" o "b es mayor que a" si y sólo si b−a pertenece a los reales positivos y la relación se denota por $a<b$ o $b>a$.
2. "a es menor o igual que b" o "b es mayor o igual que a" si y sólo si $a<b$ o $a=b$ y se denota por $a \leq b$.
3. "a es mayor que b" o "b es menor que a" si y sólo si a-b pertenece a los reales positivos y se denota por $a>b$.
4. "a es mayor o igual que b" o "b es menor o igual que a" si y sólo si $a>b$ o $a=b$ y se denota por $a \geq b$.

   Por ejemplo, si a=-3 y b=-1 entonces, b-a=-1-(-3)=-1+3=+2 que es positivo y por lo tanto, $-3<-1$.

De manera intuitiva y tomando como referencia la representación gráfica de los números reales que se indicó en la unidad dos, todo número a que está a la derecha de otro b es mayor que éste último.



Todo número a la derecha de otro en la recta real es mayor que éste último.

Entonces todo número a real tal que a>0 es un número real positivo, y todo número real a es negativo si su inverso aditivo es positivo, en símbolos: –a>0.

7.2 Definición de valor absoluto y sus propiedades

El concepto de valor absoluto es de los más importantes en las desigualdades, y se refiere a la siguiente definición:

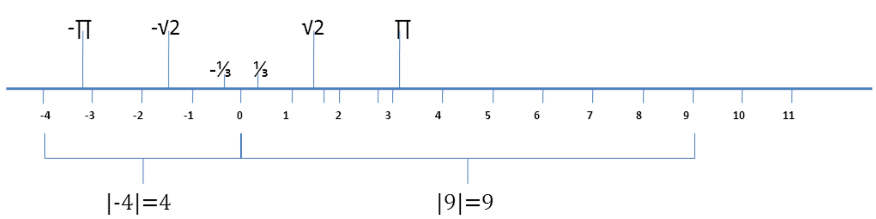
Se llama valor absoluto de un número real a, denotado |a|, al número tal que:

Si a≥0 entonces |a|=a

Si a<0 entonces |a|=-a

Por ejemplo, |0|=0, |7|=7, |-5|=-(-5)=5.

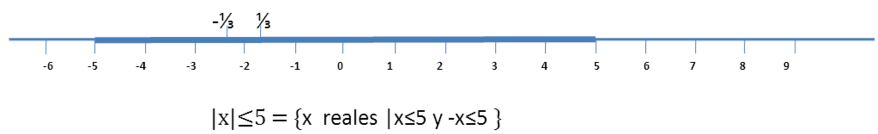
La representación gráfica de los números reales permite visualizar el valor absoluto de un número como la distancia del valor de a hacia el cero.



El valor absoluto de un número representa la distancia del número al cero.

El concepto del valor absoluto asociado al de las desigualdades, lleva a determinar el conjunto solución de expresiones algebraicas, por ejemplo, del tipo: $|x| \leq 5$, como se muestra enseguida:

Si $x \geq 0$ entonces $|x| \leq 5$ implica $x \leq 5$, y por otro lado, si $x<0$ entonces $|x| \leq 5$ implica $-x \leq 5$. En este caso, la solución es la unión de los elementos reales tales que $x \leq 5$ y $-x \leq 5$. La interpretación gráfica de este conjunto solución se presenta en la siguiente figura:



Interpretación gráfica de la solución de $|x| \leq 5$.

Algunas propiedades de la función valor absoluto se describen a continuación:

Dados a y b dos números reales cualesquiera, se cumplen:

1. $|ab|=|a||b|$
2. Si $b \neq 0$, $|a/b|=|a|/|b|$
3. Si $k>0$, entonces $|a| \leq k$ si y solo si $-k \leq a \leq k$
    a. Si $k>0$, entonces $|a| \geq k$ si y solo si $a \geq k$ o $a \leq -k$
4. La desigualdad del triángulo: $|a+b| \leq |a|+|b|$
5. $|a|-|b| \leq ||a|-|b|| \leq |a-b|$

Por ejemplo, la solución de la desigualdad $|x| \leq 5$ implica por la propiedad (3) anterior $-5 \leq x \leq 5$, como ya se había resuelto en el ejemplo inmediato anterior.

7.3 Propiedades de las desigualdades

El siguiente teorema (que en lo sucesivo se referirá como el teorema 7.3) proporciona las propiedades de las desigualdades para llevar a cabo la solución de inecuaciones.

Considerar las expresiones algebraicas p, q y r en la variable x y la desigualdad $p<q$. Entonces:

1. La desigualdad $p<q$ es equivalente a $p+r < q+r$.
2. Si además $r>0$ para todo valor de x, entonces $pr < qr$.
3. Si además $r<0$ para todo valor de x, entonces $pr > qr$.
4. En las proposiciones 1, 2 y 3 anteriores, si los símbolos “<” y “>” se intercambian, las proposiciones resultantes también son verdaderas.
5. En las proposiciones 1, 2 y 3 anteriores, si los símbolos “<” y “>” se intercambian por “≤” y “≥” respectivamente, las proposiciones resultantes también son verdaderas.

Con lo anterior y para una mejor ejemplificación del teorema, se sugiere pasar a la solución de inecuaciones.

7.4 Solución de inecuaciones

Recapitulando conceptos, se dice que una desigualdad o inecuación es una expresión algebraica de la forma $p < q \ (p > q)$, en la cual p y q son expresiones algebraicas en la variable x.

Una solución o el conjunto solución de la inecuación se refiere al valor o valores de la variable x tales que al sustituirlos en la inecuación se obtiene una afirmación. Resolver una inecuación significa determinar el conjunto solución.

Como sucede con las ecuaciones, dos desigualdades son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución, y un método para la solución de las inecuaciones es mediante el reemplazo de desigualdades equivalentes.

Por ejemplo: Determina el conjunto solución de la inecuación: $8x-6<4x+10$.

Mediante la aplicación del teorema 7.3 y una secuencia de desigualdades equivalentes:

$8x-3<4x+5$, desigualdad original.

8x-3+3-4x<4x+5+3-4x, por (1) del teorema 7.3

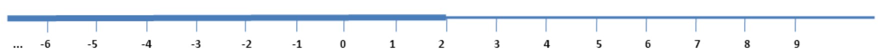
4x<8, simplificando y aplicando las propiedades de los números reales.

x<8/4, por (2) del teorema 7.3

x<2, el conjunto solución son todos los números reales menores a 2.

Las soluciones de una desigualdad se puede expresar de diversas formas, incluso ya se han usado:

1. Como una desigualdad: x<2
2. Como un conjunto: {x reales **|** x<2}
3. Empleando la notación de intervalo:[8] $(-\infty,2]$
4. Mediante una representación gráfica, como se ha hecho en las figuras anteriores (se puede decir que es una representación gráfica del intervalo).



x<2 = {x reales |x<5 }

Por ejemplo: Determina el conjunto solución de la inecuación: −6 ≤ 12x −2< 6.

Mediante la aplicación del teorema 7.3 y una secuencia de desigualdades equivalentes:

−6 ≤ 12x −2< 6, desigualdad original.

−6+2 ≤ 12x −2+2< 6+2, por (1) del teorema 7.3

−4 ≤ 12x<8, simplificando.

−4/12 ≤ 12x/12< 8/12, por (2) del teorema 7.3

−1/3 ≤ x<2/3, el conjunto solución son todos los números reales tales que son mayores o iguales a -1/3 y a la vez menores que 2/3.

[8] (a, b) intervalo abierto de extremos a y b, no incluye los extremos.
[a, b] intervalo cerrado de extremos a y b, incluye los extremos.
(a, b] intervalo semiabierto por la izquierda o semicerrado por la derecha, no incluye a y sí incluye a b.
[a, b) intervalo semiabierto por la derecha o semicerrado por la izquierda, sí incluye a y no incluye a b.

En relación con el valor absoluto, es conveniente precisar el siguiente teorema:

Si $k>0$ y p una expresión algebraica en la variable x, entonces la desigualdad $|p|<k$ es equivalente a: $-k<p<k$. Por otro lado, el conjunto solución de $|p|>k$ es la unión de los conjuntos solución de $p>k$ y $p<-k$.

Por ejemplo: Determina el conjunto solución de: $|x-3|<1$.

Mediante la aplicación del teorema 7.3 y las propiedades del valor absoluto, una secuencia de desigualdades equivalentes es:

$|x-3|<1$, desigualdad original.

$-1<x-3<1$, por teorema del valor absoluto anterior.

$-1+3<x-3+3<1+3$, por (1) del teorema 7.3 y simplificando.

$2<x<4$, el conjunto solución son todos los números reales tales que son mayores a 2 y menores a 4.

7.5 Desigualdades lineales y no lineales en dos variables

Del mismo modo que se ha desarrollado el trabajo con las ecuaciones y las desigualdades en una variable, se debe hacer lo propio con dos e incluso más variables (en este caso se trabajará sólo con dos).

De manera genérica, si p y q son dos desigualdades algebraicas en dos variables x y y, entonces una solución al sistema de desigualdades está definida como el conjunto de pares ordenados (a, b) que dan una afirmación para x=a y y=b. Al identificar en un plano x-y al conjunto solución se obtiene la gráfica de la desigualdad y viceversa. Las definiciones y afirmaciones del teorema 7.3 se mantienen para desigualdades en dos o más variables.

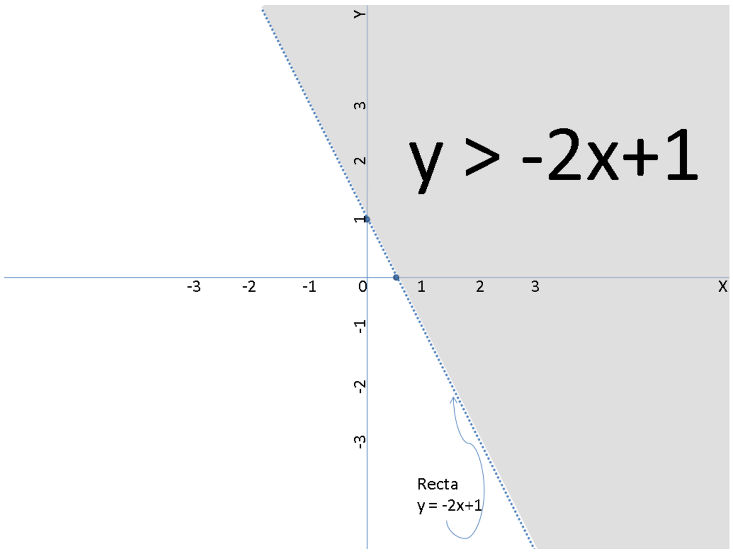
Por ejemplo: Determinar el conjunto solución y la gráfica de la desigualdad $5x-1>3x-y$, que es del tipo lineal porque el exponente de las variables es la unidad.

$5x-1>3x-y$, desigualdad original.

$5x-1+y-5x+1>3x-y+y-5x+1$, por (1) del teorema 7.3 y simplificando.

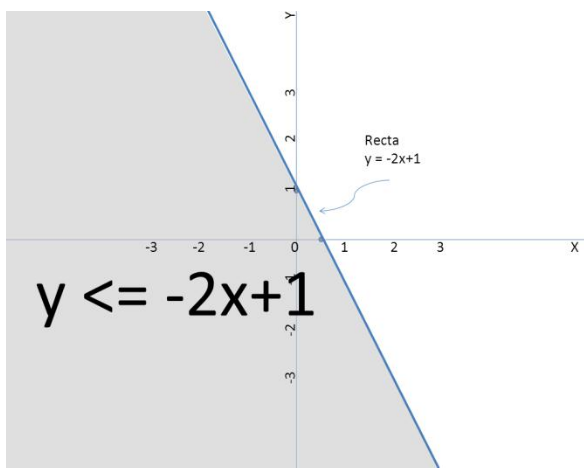
$y>-2x+1$, por lo tanto, el conjunto solución es $\{(x,y) \mid y>-2x+1\}$.

Para una visualización gráfica de la solución {(x,y) | y>-2x+1} se tiene que este conjunto consta de todos puntos en el plano que están por encima y a la derecha de la recta y=-2x+1 (sin incluir a la recta), como se ilustra en la siguiente gráfica:



El área sombreada es la solución de la desigualdad 5x-1>3x-y.

Se aprovecha el mismo ejemplo para ilustrar la solución de la desigualdad 5x-1≤3x-y, que es: {(x,y) | y≤-2x+1}.



El área sombreada es la solución de la desigualdad 5x-1≤3x-y.

El siguiente ejemplo ilustra el caso de una desigualdad en dos variables y no lineal.

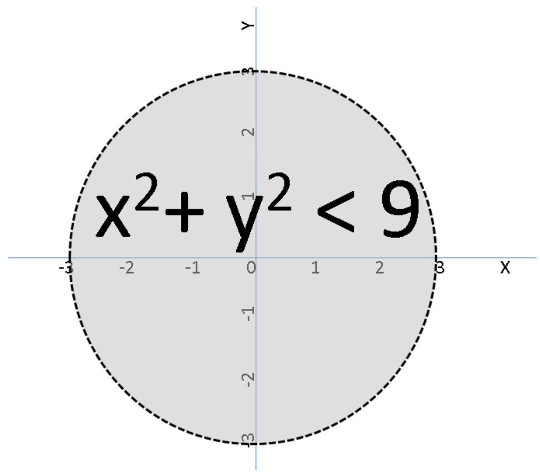
Por ejemplo: Determinar el conjunto solución y la gráfica de la desigualdad $x^2+3y^2<18+y^2-x^2$, que es del tipo cuadrático en x y y porque el exponente de las variables es de valor dos.

$x^2+3y^2<18+y^2-x^2$, desigualdad original.

$x^2+3y^2+x^2-y^2<18+y^2-x^2+x^2-y^2$, por (1) del teorema 7.3 y simplificando.

$2x^2+2y^2<18$, multiplicando por ½,

$x^2+y^2<9$, por lo tanto, el conjunto solución es $\{(x, y) \mid x^2+y^2<3^2\}$ y su gráfica se muestra en la siguiente figura.



El área sombreada es la solución de la desigualdad $x^2+3y^2<18+y^2-x^2$.

La gráfica muestra que se trata del interior de una circunferencia de radio 3 y centro en el origen, sin incluir los puntos de la propia circunferencia (la frontera del círculo). Si al contrario se toma la desigualdad $x^2+y^2>=3^2$ la solución es el conjunto de puntos que se encuentran fuera de la circunferencia citada, y en este caso sí incluyen a la frontera. En la figura anterior es toda el área no sombreada incluyendo a la circunferencia dada por la ecuación $x^2+y^2=3^2$.

7.6 Sistemas de desigualdades

Finalmente, ahora se trabajará con sistemas de desigualdades, es decir, se trabajará simultáneamente con varias desigualdades con dos variables. En este caso, el conjunto solución es la intersección de los conjuntos de soluciones de todas las desigualdades en el sistema. Todas las propiedades y reglas que se han usado para la determinación de las soluciones de desigualdades aplican al sistema de desigualdades.

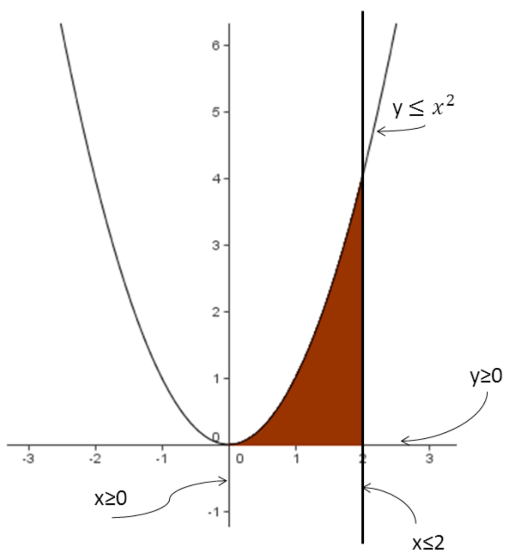
Por ejemplo: Dibuja la gráfica del sistema de desigualdades:

$$y \leq x^2$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq 0$$

$$x \leq 2$$



El área sombreada es la solución al sistema de ecuaciones planteado.

Por ejemplo: Determinar analíticamente el conjunto solución del siguiente sistema de inecuaciones:

$$y + 2x - 2 \leq 0$$

$$y - 2x - 2 \leq 0$$

$$y + 2 \geq 0$$

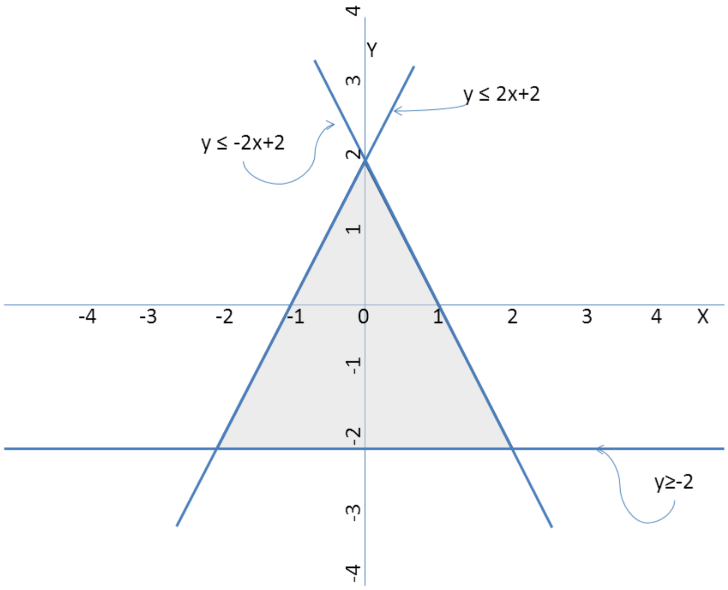
El sistema dado es equivalente a:

$$y \leq -2x + 2$$

$$y \leq +2x + 2$$

$$y \geq -2$$

La gráfica del conjunto solución está dada en la siguiente figura:



El área sombreada es la solución al sistema de ecuaciones planteado.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

Demuestra las siguientes dos desigualdades:

1. $x^2 >= 0$ para todo x real.
2. Si x y y son reales positivos, entonces: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Sugerencia, recuerda el binomio cuadrado para la expresión: $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2$ y apóyate en el apartado del primer ejercicio $x^2 >= 0$.

Finalmente, realiza una investigación y elabora un informe de una cuartilla acerca de la generalización de la desigualdad triangular y sus aplicaciones, esto en los números reales y los números complejos:

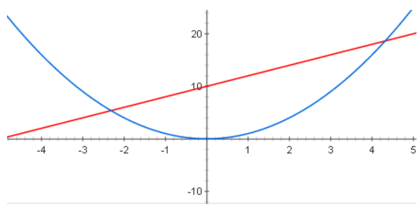
$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

AUTOEVALUACIÓN

1. Determina el conjunto solución de las siguientes desigualdades (no es un sistema de desigualdades):
   $|x-9|<1$
   $|x^2-1|<2$

2. Determina el conjunto solución de:
   y-2x-4>0 y de y-2x-4<=0 (no es un sistema de desigualdades). Además, grafica las soluciones.

3. A partir de la siguiente gráfica:

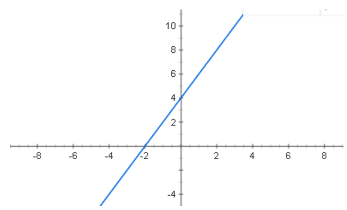
   Determina un posible sistema de desigualdades que tenga por solución el área contenida entre la recta de ecuación $y=2x+10$ y la parábola $y=x^2$, incluyendo las fronteras (la recta y la parábola).

RESPUESTAS

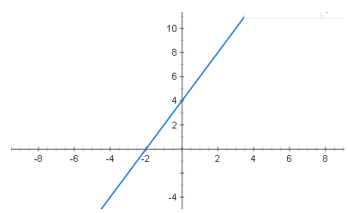
1. $8<x<10$,

   $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

2. $y>+2x+4$, su gráfica es el conjunto de puntos sobre la recta sin incluir a esta.

   Para su complemento, la solución es $y<=+2x+4$ y la gráfica es el conjunto de puntos por debajo de la recta incluyéndola.

3. La recta es $y<=2x+10$ y la parábola $y>=x^2$, como desigualdades simultaneas.

GLOSARIO

Base: Número o expresión algebraica que se eleva a una potencia, por ejemplo, x^n x es la base y n es la potencia.

Binomio: Expresión algebraica con dos términos, por ejemplo, $x+y$.

Cociente: Resultado de dividir una cantidad o expresión algebraica por otra, y expresa cuántas veces está contenido el divisor en el dividendo.

Coeficiente: Es el número que multiplica a una variable, por ejemplo, en la expresión algebraica $10x^2$, 10 es el coeficiente.

Cuadrado perfecto: Polinomio que es igual al cuadrado de otro polinomio, por ejemplo en $x^2+2xy+y^2= (x+y)^2$, $x^2+2xy+y^2$ es un trinomio cuadrado perfecto.

Descomposición factorial o factorización: Es la expresión numérica o algebraica representada como el producto de sus factores, por ejemplo, en $x^2+1 = (x+1)(x-1)$, estos últimos factores constituyen la descomposición factorial de x^2+1.

Diagrama de Venn: Visualización gráfica utilizada para mostrar las relaciones entre los elementos de los conjuntos.

Diferencia de cuadrados: Expresión algebraica de la forma: x^2-y^2.

Dividendo: En un cociente, es la cantidad o expresión algebraica que debe dividirse por otra llamada divisor.

Divisor: En un cociente, es la cantidad o expresión algebraica por la cual debe dividirse otra llamada dividendo.

Desigualdad: Afirmación de que un valor o expresión algebraica es menor o mayor que otra, por ejemplo, $y + 5 < 3$ y $4 + 3 < 15$ son desigualdades.

Ecuación: Afirmación de que una expresión algebraica es igual a otra expresión algebraica.

Evaluar una expresión: Se refiere a determinar el valor numérico de una expresión algebraica.

Expresión algebraica: Es una combinación cualquiera de constantes, variables y signos interrelacionados mediante una cantidad finita de operaciones del tipo: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Factor: Es cada una de las cantidades o expresiones algebraicas que se multiplican para formar un producto.

Fracción equivalente: Cociente que representan al mismo valor numérico o en expresión algebraica.

Fracción impropia: Cociente en el cual el numerador es mayor que el denominador.

Fracción inversa: Cociente o fracción que al multiplicarse por la fracción original da por resultado la unidad.

Fracción irreducible: Cociente o expresión algebraica que ya no puede ser simplificada.

Función: Relación que asocia un valor de la variable independiente con un único valor de la variable dependiente, por ejemplo, $y=mx+b$.

Función cuadrática: Función en la que la variable independiente tiene exponente dos (también se dice cuadrático), por ejemplo, $y=x^2$.

Función racional: Es una función que se expresa como el cociente de dos expresiones polinomiales.

Grado de un monomio: Es la suma aritmética de los exponentes de las variables que integran el monomio, por ejemplo, $x^2y^3z^5$ tiene por grado 10 (=2+3+5).

Identidad algebraica: Igualdad en expresiones algebraicas que se mantiene invariante independientemente de los valores que se asignen a las variables.

Monomio: Expresión algebraica con un término, por ejemplo, $-7x^3$.

Números enteros: Conjunto formado por los números: {. . . , –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

Números imaginarios: Números de la forma a+bi con a y b números reales e i la unidad imaginaria con la propiedad de que $i^2=-1$.

Números irracionales: Conjunto de números que no es posible representar como un cociente de números enteros.

Números naturales: Conjunto formado por los números: {1, 2, 3, ...}

Números primos: Conjunto de números que tienen sólo dos divisores: la unidad y el mismo número.

Números racionales: Conjunto de números que se pueden representar como el cociente de dos números enteros.

Números reales: La unión de los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales e irracionales.

Polinomio: Expresión algebraica con gran cantidad de términos (dos o más términos), por ejemplo, $-7x^3+x^2-x+y$.

Polinomio de grado n: Es una expresión algebraica del tipo
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$
con a_i números reales para $i=0,\ldots,n$, $a_n \neq 0$ y n un entero no negativo.

Raíces: Son las soluciones de una ecuación.

Resolver una ecuación: Determinar las soluciones que hacen cierta la ecuación.

Sistema de ecuaciones: Es un conjunto integrado de dos o más ecuaciones con las mismas variables.

Trinomio: Expresión algebraica con tres términos, por ejemplo, $x^2+2xy+y^2$.

Variable dependiente: En una función, es el conjunto de valores que se obtienen al sustituir algún valor en la variable independiente.

Variable independiente: En una función, es el conjunto de valores que se pueden sustituir en la función.

BIBLIOGRAFÍA

Allen, R. Ángel, *Álgebra elemental*, México, Pearson/McGraw-Hill, 1998.

Allen, R. Ángel, *Álgebra intermedia,* México, Prentice Hall Hispanoamericana, 1992.

Cárdenas, Humberto et. al., *Álgebra superior*, México, Trillas, 1973.

Gobran, Alfonse, *Álgebra elemental*, México, Grupo editorial Iberoamericana, 1990.

Gustafson, R. David, *Álgebra intermedia*, México, Matemáticas Thompson, 2000.

Kaufmann, Jerome E; Schwitters, Karen L, *Álgebra intermedia*, México, International Thomson Editores, 2000.

Lovaglia, Florence et al., *Álgebra*, México, Hada, 1969.

Rees, Paul K; Sparks, Fred W, *Álgebra*, México, Editorial Reverte Mexicana, 1970.

Swokowski, Earl, *Álgebra universitaria*, México, Editorial Cecsa, 1992.

Uspensky, James Víctor, *Teoría de ecuaciones*, México, Limusa, 1990.